Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

20. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Sommersemester 2014
Blatt 5

Abgabe am **Dienstag, dem 27. Mai 2014** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Sei $x \in \mathbb{R}^3$ and $\rho > 0$ beliebig. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$F : y \mapsto \frac{1}{|x-y|}, \quad y \in \left\{ z \in \mathbb{R}^3 : |z-x| > \rho \right\},$$

harmonisch ist.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass das $(2,2)$–Legendre–Tensorfeld $\mathpzc{p}_n^{(2,2)}$ für $(\xi,\eta) \in \Omega^2$ durch

$$\begin{aligned} \mathpzc{p}_n^{(2,2)}(\xi,\eta) \quad &= \quad \frac{1}{n(n+1)} \left(P_n''(\xi\cdot\eta)(\eta - (\xi\cdot\eta)\xi) \otimes (\xi - (\xi\cdot\eta)\eta) \right. \\ &\qquad \left. + P_n'(\xi\cdot\eta)\left(\mathpzc{i} - \xi\otimes\xi - (\eta - (\xi\cdot\eta)\xi)\otimes\eta \right) \right), \end{aligned}$$

gegeben ist. $\mathpzc{i}$ ist die 3×3–Einheitsmatrix.

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass das $(3,3)$–Legendre–Tensorfeld $\mathpzc{p}_n^{(3,3)}$ für $(\xi,\eta) \in \Omega^2$ durch

$$\mathpzc{p}_n^{(3,3)}(\xi,\eta) = \frac{1}{n(n+1)} \left(P_n''(\xi\cdot\eta)(\xi\wedge\eta)\otimes(\eta\wedge\xi) + P_n'(\xi\cdot\eta)\left((\xi\cdot\eta)\,\mathpzc{i} - \eta\otimes\xi \right) \right),$$

gegeben ist.

Aufgabe 20: (1+3=4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$P_n'(1) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

b) Zeigen Sie, dass alle $y_n^{(i)} \in \operatorname{span}\left\{ y_{n,j}^{(i)} \middle| j = 1, \ldots, 2n+1 \right\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $n \geq 0_i$, die folgende Eigenschaft haben:

$$\left\| y_n^{(i)} \right\|_{\mathrm{c}(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \left\| y_n^{(i)} \right\|_{l^2(\Omega)}.$$