Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

27. Mai 2014

Übungen zur Vorlesung

# Geomathematik

**Sommersemester 2014**
**Blatt 6**

Abgabe am **Dienstag, dem 3. Juni 2014** zu Beginn der Vorlesung.

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Sei $0 < \alpha < \beta$ und sei $\Omega_{]\alpha,\beta[} := \{x \in \mathbb{R}^3 | \alpha < |x| < \beta\}$ eine Kugelschale. Beweisen Sie, dass eine Funktion $f \in \mathrm{c}^{(1)}\left(\Omega_{]\alpha,\beta[}\right)$ mit

$$\nabla \cdot f = 0$$

in $\Omega_{]\alpha,\beta[}$ und

$$\int_{S_{r_1}} f(x) \cdot \frac{x}{|x|} \mathrm{d}\omega(x) = 0$$

in einer Sphäre $S_{r_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| = r_1\}, r_1 \in ]\alpha, \beta[$, immer solenoidal in $\Omega_{]\alpha,\beta[}$ ist.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)

Die Permutation eines Tupels $(a_1, \ldots, a_n)$ ist gerade, wenn sie durch eine gerade Anzahl aufeinanderfolgender paarweiser Vertauschungen von Komponenten aus $(a_1, \ldots, a_n)$ erreicht werden kann. Sonst ist sie ungerade. Demzufolge ist $(1, 2, 6, 5, 4, 3)$ eine gerade Permutation von $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
Das Levi-Cività alternierende Symbol $\varepsilon_{ijk}; i, j, k \in \{1, 2, 3\}$; wird definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ beliebige Vektoren und $w = (w_i)_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$w_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_j v_k,$$

$i \in \{1, 2, 3\}$.
Beweisen Sie, dass $w = u \wedge v$.

b) Zeigen Sie, dass das Levi–Cività alternierende Symbol $\varepsilon_{ijk}$ die folgenden Gleichungen erfüllt:

(i) $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

(ii) $\sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$,

(iii) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$.

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)

Seien $f, g \in \mathrm{c}^{(1)}(D)$ und $U \in \mathrm{C}^{(1)}(D)$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^3$ nicht leer ist. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe des Levi–Cività alternierenden Symbols:

a) $\operatorname{div}(f \wedge g) = g \cdot (\operatorname{rot} f) - f \cdot (\operatorname{rot} g)$,

b) $\operatorname{rot}\,(Uf) = U \operatorname{rot} f + (\operatorname{grad} U) \wedge f$,

c) $\operatorname{rot}\,(f(x) \wedge x) = (\nabla_x \otimes f(x)) \cdot x + 2f(x) - (\operatorname{div}_x f(x))x$.

**Aufgabe 24:** (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ nicht leer und seien $f \in \mathrm{c}^{(2)}(D)$, $F \in \mathrm{C}^{(2)}(D)$ gegeben. Beweisen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

a) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$, also $\nabla \cdot (\nabla \wedge f) = 0$.

b) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$, also $\nabla \wedge (\nabla F) = 0$.

c) $\Delta f = \operatorname{grad} \operatorname{div} f - \operatorname{rot} \operatorname{rot} f$, also $(\nabla \cdot \nabla) f = \nabla(\nabla \cdot f) - \nabla \wedge (\nabla \wedge f)$,
wobei $\Delta f$ die komponentenweise Anwendung des Operators auf $f$ bezeichnet.