Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. Roger Telschow

03. Juni 2014

Übungen zur Vorlesung

Geomathematik

Sommersemester 2014
Blatt 7

Abgabe am **Dienstag, dem 17. Juni 2014** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die skalare Funktion

$$F : x \mapsto -\frac{1}{2}\left(|\omega|^2|x|^2 - (\omega \cdot x)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathbb{R}^3 \text{ fest},$$

das Zentrifugalpotential ist, also dass $-\nabla F$ die Zentrifugalkraft f pro Einheitsmasse gegeben durch

$$f : x \mapsto -\omega \wedge (\omega \wedge x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

ist.

Falls Sie Eigenschaften des Vektorprodukts benutzen, die in der Vorlesung eingeführt wurden, beweisen Sie sie bitte mit Hilfe des Levi–Cività alternierenden Symbols.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Corioliskraft pro Einheitsmasse im Allgemeinen

$$f : x \mapsto -2\omega \wedge v(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \omega \in \mathbb{R}^3 \text{ fest},$$

kein Potential hat.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Seien $F \in \mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$ und $v \in \mathrm{c}^{(2)}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \nabla^*_\xi \cdot (F(\xi)v(\xi)) &= \nabla^*_\xi F(\xi) \cdot v(\xi) + F(\xi)\nabla^*_\xi \cdot v(\xi) \text{ und} \\ \nabla^*_\xi \cdot \xi &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Um ozeanische Strömungen modellieren zu können, muss man zuerst die Bewegung einer kleinen Blase aus Wasser beschreiben. Dies kann mit der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(x,t) = -\frac{1}{\rho} \nabla_x P(x,t) - 2\omega \wedge v(x,t) + g(x) + F_f(x,t)$$

erreicht werden. Dabei ist P der Druck, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, g die Fallbeschleunigung und

$$F_f = v_{\mathrm{nor}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) v + v_{\tan} \frac{1}{r^2} \Delta^* v$$

ist der Reibungsterm. Wir nehmen, wie in der Boussinesq-Approximation, an, dass Meerwasser inkompressibel und homogen ist. Aus dieser Annahme können wir unter Anderem folgern, dass div $v = 0$ für das Geschwindigkeitsfeld v gilt. Dann kann ein Teil des Reibungsterms wie folgt umgeschrieben werden:

Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ divergenzfrei. Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) (v \cdot \varepsilon^r) = -\frac{1}{r} \left(\nabla^* \cdot p_{\tan}(v) \right).$$