

Übungen zur Vorlesung
Geomathematik
Sommersemester 2014
Blatt 8

Abgabe am **Dienstag, dem 01. Juli 2014** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Seien $n \in \Omega$ und $u \in C^1(\overline{\Sigma_{\text{int}}})$. Beweisen Sie, dass

$$\left(\nabla_x \otimes u + (\nabla_x \otimes u)^T \right) n = 2 \frac{\partial u}{\partial n} + n \wedge \text{rot } u .$$

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Betrachten wir ein radial heterogenes Medium, also ein Medium, dessen Lamé-Parameter und Massendichte Funktionen in r sind: " $\rho = \rho(r)$, $\lambda = \lambda(r)$, $\mu = \mu(r)$ ". Zeigen Sie, dass aus der Cauchy-Navier-Gleichung

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + (\text{div } u) \nabla \lambda + \mu \Delta u + (\nabla \otimes u + (\nabla \otimes u)^T) \cdot \nabla \mu$$

in diesem Fall Folgendes wird:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) (\text{grad div } u) + \frac{d\lambda}{dr} (\text{div } u) \varepsilon^r + \frac{d\mu}{dr} \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon^r \wedge \text{rot } u \right) + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Betrachten wir die Cauchy-Navier-Gleichung mit $f = 0$ und konstanten Lamé-Parametern λ und μ , also

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (1)$$

Wir beobachten sich ausbreitende Raumwellen. Ein Vektorfeld u der Form

$$u(x, t) = a \sin(x \cdot k - ct) ; \quad x \in \overline{\Sigma_{\text{int}}}, \quad t \in \mathbb{R};$$

ist eine sinusförmige sich ausbreitende Welle mit Amplitude $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, Richtung $k \in \Omega$ und Geschwindigkeit c . Man sagt, dass u longitudinal ist, wenn $a \parallel k$ gilt. u ist transversal, wenn $a \perp k$ gilt.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

Eine sinusförmige sich ausbreitende Welle mit Geschwindigkeit c löst Gleichung (1) genau dann, wenn entweder

(a) $c^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$ gilt und die Welle longitudinal ist oder

(b) $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$ gilt und die Welle transversal ist.

Anmerkung:

Als Konsequenz sind die longitudinalen Wellen eines Erdbebens immer die ersten Raumwellen, die an einem Seismometer ankommen. Deswegen werden sie auch Primärwellen (P-Wellen) genannt. Die transversalen Wellen werden Sekundärwellen (S-Wellen) genannt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Die Datei 'GravPot.dat' enthält Werte des Gravitationspotentials der Erde auf dem folgenden Punktgitter:

$$\varphi_i = \frac{i}{90}\pi, \quad i = -90, \dots, 90$$
$$\vartheta_j = \frac{j}{90}\pi, \quad j = -45, \dots, 45$$

Die Werte sind als $(91 * 181) \times 3$ -Matrix gegeben, wobei die erste Spalte φ entspricht, die zweite Spalte ϑ und die dritte Spalte dem Potential. Zeichnen Sie die Daten mit Hilfe der mapping toolbox für die folgenden Projektionen (mit Küstenlinien, colorbar, ...)

- Robinson-Projektion
- Mollweide-Projektion
- Orthographische Projektion

und zeichnen Sie zusätzlich das Potential für die Region von Südamerika.