Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. K. Seibert

19. April 2017

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2017
Blatt 1

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, den 08. Mai 2017

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Der Bernstein-Operator $B_n : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{C}[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1].$$

Bestimmen Sie die Funktionen $B_n g_j$ für $j = 0,1,2$ mit $g_j(x) := x^j$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{L}^2_w[a,b]$ ein Hilbertraum ist, indem Sie benutzen, dass $\mathrm{L}^2[a,b]$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Versucht man, eine Funktion F, von der man nur die Werte $\{F(x_j)\}_{j=0,\ldots,n}$ mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ kennt, durch ein Polynom $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ vom Grad $\leq n$ zu interpolieren, so führt dies zum linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k = F(x_j) \quad \forall j = 0, \ldots, n$$

mit der Vandermonde-Matrix $(x_j^k)_{j,k=0,\ldots n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix gleich

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

ist.

b) Die Kondition $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ einer invertierbaren Matrix A ist ein Maß für die Anfälligkeit der Lösung von Gleichungssystemen $Ax = b$ gegenüber Rundungsfehlern.
Sei $x_j := \frac{j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$, ein äquidistantes Punktgitter auf $[0, 1]$. Berechnen Sie (z.B. mit MATLAB) die Kondition der Vandermonde-Matrix für $n = 3, \ldots, 20$ bzgl. der Matrixnorm

$$\|A\|_2 := |\lambda_{\max}|,$$

wobei $\lambda_{\max}$ der größte Singulärwert von A ist. Man beachte, dass die Singulärwerte von A^{-1} die Kehrwerte der Singulärwerte von A sind.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\cos(nx)$ als algebraisches Polynom n-ten Grades in $\cos x$ geschrieben werden kann (für alle $n \in \mathbb{N}_0$), d.h. zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom T_n n-ten Grades gibt, so dass

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.