

Übungen zur Vorlesung

## Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2019

Blatt 1

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 18. April 2019

### Aufgabe 1: (4 Punkte)

Der Bernstein-Operator  $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist definiert durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Bestimmen Sie die Funktionen  $B_n g_j$  für  $j = 0, 1, 2$  mit  $g_j(x) := x^j$ .

### Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass  $L_w^2[a, b]$  ein Hilbertraum ist, indem Sie benutzen, dass  $L^2[a, b]$  ein Hilbertraum ist.

### Aufgabe 3: (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Versucht man, eine Funktion  $F$ , von der man nur die Werte  $\{F(x_j)\}_{j=0, \dots, n}$  mit  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  kennt, durch ein Polynom  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  vom Grad  $\leq n$  zu interpolieren, so führt dies zum linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^n a_k x_j^k = F(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, n$$

mit der Vandermonde-Matrix  $(x_j^k)_{j,k=0, \dots, n}$ .

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix gleich

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

ist.

- b) Die Kondition  $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  einer invertierbaren Matrix  $A$  ist ein Maß für die Anfälligkeit der Lösung von Gleichungssystemen  $Ax = b$  gegenüber Rundungsfehlern.

Sei  $x_j := \frac{j}{n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , ein äquidistantes Punktgitter auf  $[0, 1]$ . Berechnen Sie (z.B. mit MATLAB) die Kondition der Vandermonde-Matrix für  $n = 3, \dots, 20$  bzgl. der Matrixnorm

$$\|A\|_2 := |\lambda_{\max}|,$$

wobei  $\lambda_{\max}$  der größte Singulärwert von  $A$  ist. Man beachte, dass die Singulärwerte von  $A^{-1}$  die Kehrwerte der Singulärwerte von  $A$  sind.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass  $\cos(nx)$  als algebraisches Polynom  $n$ -ten Grades in  $\cos x$  geschrieben werden kann (für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ), d.h. zeigen Sie, dass es zu jedem  $n \in \mathbb{N}_0$  ein Polynom  $T_n$   $n$ -ten Grades gibt, so dass

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.