

Übungen zur Vorlesung

## Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2019

Blatt 4

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 09. Mai 2019

### Aufgabe 13: (3 + 1 = 4 Punkte)

- a) Sei  $f \in C^{(2)}[a, b]$  und sei  $S$  ein kubischer Spline zum Punktgitter  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Zeigen Sie, dass

$$\|f'' - S''\|_{L^2[a,b]}^2 = \|f''\|_{L^2[a,b]}^2 - \|S''\|_{L^2[a,b]}^2 - 2 \left[ (f'(x) - S'(x)) S''(x) \Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} (f(x) - S(x)) S'''(x) \Big|_{x_i^+}^{x_{i+1}^-} \right]$$

gilt, wobei  $x_i^+$  und  $x_{i+1}^-$  für den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert steht.

- b) Beweisen Sie den Satz von Holladay: Der natürliche kubische Spline  $S$ , der  $S(x_j) = y_j$  für alle  $j = 0, \dots, n$  erfüllt, minimiert  $\|F''\|_{L^2[a,b]}$  unter allen  $F \in C^{(2)}[a, b]$ , für die  $F(x_j) = y_j$  für alle  $j = 0, \dots, n$  ( $a = x_0$ ,  $b = x_n$ ) gilt.

### Aufgabe 14: (2 + 2 = 4 Punkte)

Bezüglich einer streng monoton wachsenden Folge  $(t_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  mit  $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} t_j = \pm\infty$  definieren wir für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Funktionen

$$\begin{aligned} B_{i,1} &:= \chi_{[t_i, t_{i+1}[} , \\ \omega_{i,k}(x) &:= \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \chi_{[t_i, t_{i+k-1}[}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ B_{i,k} &:= \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1} . \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass jedes  $B_{i,k}$  stückweise polynomial vom Grad  $< k$  ist.  
*(Anmerkung: Die Funktionen  $B_{i,k}$  heißen B-Splines und das System  $\{B_{i,4}\}_{i \in \mathbb{Z}}$  kann als Basis für kubische Splines verwendet werden.)*
- b) Plotten Sie  $B_{0,4}$  für  $t_i = i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 15:** (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  ein gegebenes Punktgitter. Die Funktionen  $L_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , die die so genannte Lagrange-Basis bezüglich des Punktgitters bilden, definiert man durch

$$L_j(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} .$$

a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom  $P$  vom Grad  $\leq n$  darstellbar ist als

$$P(x) = \sum_{j=0}^n P(x_j) L_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Beweisen Sie: Für jedes gegebene Punktgitter existieren Konstanten  $w_0, \dots, w_n$ , so dass

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j P(x_j) \quad \text{für alle } P \in \text{Pol}_{0..n}$$

gilt. Ermitteln Sie eine Formel für  $w_0, \dots, w_n$ .

**Aufgabe 16:** (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Haar-Wavelet-Koeffizienten  $d_{j,k}$  und alle Haar-Skalierungsfunktionskoeffizienten  $c_{j,k}$  von  $f(x) := x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .