

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2019

Blatt 10

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 27. Juni 2019.

Aufgabe 36: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

für alle Legendre-Polynome gilt.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $|P'_n(t)| \leq P'_n(1)$ für alle $t \in [-1, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Diese Abschätzung dürfen Sie für die folgenden Aufgaben benutzen.

Aufgabe 37: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome die Ungleichung

$$|P_n(\xi \cdot \zeta) - P_n(\eta \cdot \zeta)| \leq \frac{n(n+1)}{2} |\xi - \eta|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$ erfüllen.

Aufgabe 38: (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung bereits erwähnt wurde, sind alle $F \in \mathcal{H}_s(\Omega)$ mit $s > 2$ Lipschitz-stetig (was Sie hiermit benutzen dürfen). Zeigen Sie nun, dass

$$C_F(s) := \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{n(n+1)}{(n+\frac{1}{2})^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}_s(\Omega)}$$

eine Lipschitz-Konstante ist, d.h.

$$|F(\xi) - F(\eta)| \leq C_F(s) |\xi - \eta| \quad \forall \xi, \eta \in \Omega.$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Sei $A_n := h^{-n/2}(n + \frac{1}{2})^{1/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $h \in]0, 1[$ fest ist. Der Reprokern $K_{\mathcal{H}}$ des zugehörigen Sobolevraums $\mathcal{H} = \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ heißt *Singularitätskern*.

Leiten Sie eine geschlossene Darstellung, d.h. eine Darstellung ohne Reihe, für $K_{\mathcal{H}}$ her. Dies ist analog zu den Betrachtungen für den Abel–Poisson–Kern in der Vorlesung möglich.