Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

04. Juni 2020

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2020
Blatt 7

Abgabe bis **Donnerstag, den 11. Juni 2020, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Mit $\xi(\varphi, \vartheta)$ sei die Darstellung von $\xi \in \Omega$ in Polarkoordinaten bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$Y_{n,j}(\xi(\varphi,\vartheta)) = F_{n,j}(\cos\vartheta) \begin{cases} \cos(j\varphi), & j = -n, \dots, 0 \\ \sin(j\varphi), & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}_0, j = -n, \dots, n$ für ein ONS in $\mathrm{L}^2(\Omega)$ zu der Bedingung

$$\int_{-1}^{1} F_{n,j}(t) F_{m,j}(t)\, dt = \frac{\delta_{nm}}{\pi(1 + \delta_{j0})} \tag{1}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $j = -n, \dots, n$ führt.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Benutzen Sie den Ansatz aus Aufgabe 25 für die Bestimmung von Eigenfunktionen des Beltrami-Operators zu den Eigenwerten $-n(n+1)$. Zeigen Sie hierbei, dass

$$\Delta^* Y_{n,j} = -n(n+1) Y_{n,j}$$

zur folgenden Differentialgleichung führt:

$$(1 - t^2) F''_{n,j} - 2t F'_{n,j} + \left[n(n+1) - \frac{j^2}{1 - t^2} \right] F_{n,j} = 0. \tag{2}$$

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Sei

$$F_{n,j}(t) := (1-t^2)^{\frac{|j|}{2}} \frac{d^{n+|j|}}{dt^{n+|j|}} (t^2-1)^n, \quad t \in [-1,1],$$

$n \in \mathbb{N}_0, j = -n, \dots, n.$

a) Zeigen Sie, dass $F_{n,j}$ eine Lösung von (2) ist.
(Hinweis: Substituieren Sie $G_{n,j}(t) := (1-t^2)^{-\frac{|j|}{2}} F_{n,j}(t), \quad t \in [-1,1]$).

b) Zeigen Sie, dass (1) zum Teil von $F_{n,j}$ erfüllt wird in dem Sinne, dass

$$\int_{-1}^{1} F_{n,j}(t) F_{m,j}(t)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)(F_{n,j}F'_{m,j} - F_{m,j}F'_{n,j})\right].$$

Aufgabe 28: (4 Bonuspunkte + 4 Punkte)

Ein Beispiel für ein System $\{Y_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N}_0; j=-n,\dots,n}$ kann wie folgt konstruiert werden:
Ist $\varphi \in [0, 2\pi[$ der Längengrad und $\vartheta \in [0,\pi]$ der Breitengrad, dann sei

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{n,0}\left(\xi(\varphi,\vartheta)\right) &:= \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos\vartheta)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0,\\
\overline{R}_{n,m}\left(\xi(\varphi,\vartheta)\right) &:= \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos\vartheta)\cos(m\varphi)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0, m \in \{1,\dots,n\};\\
\overline{S}_{n,m}\left(\xi(\varphi,\vartheta)\right) &:= \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos\vartheta)\sin(m\varphi)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0, m \in \{1,\dots,n\};
\end{aligned}$$

wobei

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{2^n n!}(1-t^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n\,, \quad t \in [-1,+1],\ n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \{0,\dots,n\},$$

die assoziierten Legendrefunktionen sind. Damit definiert man nun

$$Y_{n,j} := \begin{cases} \overline{R}_{n,-j} & ;\ j = -n,\dots,0 \\ \overline{S}_{n,j} & ;\ j = 1,\dots,n \end{cases}.$$

Diese $\{Y_{n,j}\}_{n,j}$ heißen *fully normalized spherical harmonics.*

a) Plotten Sie $Y_{3,j}$ für $j = -3,\dots,3$

b) Plotten Sie

$$4\pi \sum_{n=0}^{1000} \sum_{j=-n}^{n} (0.5)^n (2n+1)^{-1} Y_{n,j}(\xi) Y_{n,j}(\eta)\,, \quad \xi,\eta \in \Omega,$$

auf eine geeignete Art.

Anmerkung: Verwenden Sie die MATLAB-Funktion legendre.