

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2020

Blatt 9

Abgabe Aufgabe 33 und 34 bis **Donnerstag, den 25. Juni 2020, 12 Uhr** per E-Mail.
Abgabe Aufgabe 35 bis **Donnerstag, den 02. Juli 2020, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Sei $F \in \mathcal{H}$. Außerdem erfülle $K_{\mathcal{H}}$ die Ungleichung

$$|K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \zeta) - K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \eta)| \leq E_{(A_n)}^2 |\zeta - \eta|^\sigma$$

für alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$, einen festen Wert $\sigma \geq 0$ und eine positive Konstante $E_{(A_n)}$. Sei $S_N \in \text{Spline}((A_n); X_N)$ der Spline, der durch $S_N(\eta_i) = F(\eta_i)$ für alle $i = 1, \dots, N$ gegeben ist. Beweisen Sie:

$$\|F - S_N\|_{C(\Omega)} \leq 2\sqrt{2}E_{(A_n)}\Theta_{X_N}^{\sigma/2} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Es sei eine Folge von Punktsystemen $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \Theta_{X_N} = 0$ gegeben, wobei

$\Theta_{X_N} := \max_{\xi \in \Omega} \left(\min_{\eta \in X_N} |\xi - \eta| \right)$. Ferner sei $F \in \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ eine gegebene Funktion, wobei (A_n) eine (n) -summierbare Folge ist. Zeigen Sie, dass die Folge der Splines $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$, die durch

$$S_N(\eta_i^{(N)}) = F(\eta_i^{(N)}); \quad i = 1, \dots, N;$$

$S_N \in \text{Spline}((A_n); X_N)$ mit $X_N = \{\eta_1^{(N)}, \dots, \eta_N^{(N)}\}$ gegeben ist, gleichmäßig gegen F konvergiert:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|F - S_N\|_{C(\Omega)} = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Legendre-Polynome die Ungleichung

$$|P_n(\xi \cdot \zeta) - P_n(\eta \cdot \zeta)| \leq \frac{n(n+1)}{2} |\xi - \eta|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$ erfüllen.

Aufgabe 35: (8 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung kann ein Datensatz heruntergeladen werden. Dieser besteht aus vier Spalten. Die ersten drei Spalten enthalten die x -, y - und z -Koordinaten von Punkten auf der Einheitssphäre. Die vierte Spalte gibt die Werte einer unbekannt Funktion an diesen Punkten an.

Bestimmen Sie den interpolierenden Spline in $\mathcal{H}((h^{-n/2}); \Omega)$ für $h = 0.9$ und $h = 0.95$ und plotten Sie beide Splines auf einem Driscoll–Healy–Gitter mit $m = 100$. Was beobachten Sie?

Anmerkung: Sie werden feststellen, dass die Matrix A des linearen Gleichungssystems in beiden Fällen numerisch singular ist. Addieren Sie deshalb $0.1 \cdot \max_{i,j} |a_{i,j}|$ auf alle Diagonaleinträge von $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$, bevor Sie das Gleichungssystem lösen.