

Übungen zur Vorlesung

## Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2021

Blatt 5

Abgabe bis **Donnerstag, den 27. Mai 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

### Aufgabe 17: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren  $\varepsilon^r$ ,  $\varepsilon^\varphi$  und  $\varepsilon^t$  ein Orthonormalsystem im  $\mathbb{R}^3$  bilden. Weisen Sie ferner nach, dass  $\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\varphi = \varepsilon^t$  gilt.
- b) Sei  $F \in C^{(1)}(\Omega)$ . Beweisen Sie, dass die Vektoren  $\xi F(\xi)$ ,  $\nabla_\xi^* F(\xi)$  und  $L_\xi^* F(\xi)$  für jedes feste  $\xi \in \Omega$  paarweise orthogonal sind.

### Aufgabe 18: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Gradient  $\nabla$  auf  $C^{(1)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  wie folgt darstellbar ist:

$$\nabla = \varepsilon^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla^* .$$

### Aufgabe 19: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Oberflächenrotationsgradient  $L^*$  wie folgt dargestellt werden kann:

$$L^* = -\varepsilon^\varphi \sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

### Aufgabe 20: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Beltrami-Operator  $\Delta^*$  auf  $C^{(2)}(\Omega)$ , der definiert ist durch

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial t} (1-t^2) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-t^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 ,$$

Folgendes erfüllt:

$$\nabla^* \cdot \nabla^* = \Delta^* .$$