

Übungen zur Vorlesung

**Konstruktive Approximation:  
Fourier-, Spline- und Waveletverfahren**  
Sommersemester 2021  
Blatt 6

Abgabe bis **Mittwoch, den 02. Juni 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

**Aufgabe 21:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Oberflächenrotationsgradienten  $L^*$  folgendes gilt:

$$L^* \cdot L^* = \Delta^*,$$

wobei  $\Delta^*$  der Beltrami-Operator ist.

**Aufgabe 22:** (4 Punkte)

a) Beweisen Sie:

$$(\Delta_\eta^* - (\Delta^*)^{\wedge(n)}) K_{\text{Harm}_n(\Omega)}(\xi, \eta) = 0, \quad \eta \in \Omega,$$

für alle  $\xi \in \Omega$ .

b) Zeigen Sie, dass  $K_{\text{Harm}_n(\Omega)}$  der einzige Reprojektor von  $\text{Harm}_n(\Omega)$  ist.

**Aufgabe 23:** (4 Punkte)

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  gegeben und  $Y_n \in \text{Harm}_n(\Omega)$  eine beliebige Kugelflächenfunktion. Zeigen Sie, dass die Funktionen  $H_n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $H_{-n-1} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche definiert sind durch

$$\begin{aligned} H_n(x) &:= r^n Y_n(\xi), \quad x = r\xi \in \mathbb{R}^3, \\ H_{-n-1}(x) &:= r^{-n-1} Y_n(\xi), \quad x = r\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

beide harmonisch sind.

**Aufgabe 24:** (4 Punkte)

Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein beliebiger Hilbertraum.

- a) Beweisen Sie die Cauchy–Schwarz’sche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

für alle  $x, y \in H$ .

- b) Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , die gegen  $x \in H$  in der  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -Topologie konvergiert, nennt man stark konvergent. Beweisen Sie, dass die starke Konvergenz stets die schwache Konvergenz impliziert, d.h. es gilt:

$$\langle y, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H.$$