

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2021

Blatt 8

Abgabe bis **Donnerstag, den 17. Juni 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Es gilt folgender Satz:

Satz (*J.R. Driscoll, D.M. Healy*)

Sei $F \in L^2(\Omega)$ mit $F^\wedge(n, j) = 0$ für $n > m$ (m ungerade), $j \in \{1, \dots, 2n + 1\}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} F(\eta) d\omega(\eta) = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{p=0}^m a_p \sum_{q=0}^m F(\eta_{p,q}),$$

wobei die Einheitsvektoren $\eta_{p,q}$ durch die Polarkoordinaten

$$\varphi_q = q \frac{2\pi}{m+1}; \quad q = 0, \dots, m; \quad (\text{Längengrad})$$

$$\vartheta_p = p \frac{\pi}{m+1}; \quad p = 0, \dots, m; \quad (\text{Breitengrad})$$

gegeben sind und die Gewichte a_p wie folgt berechnet werden:

$$a_p = \frac{4}{m+1} \sin\left(\frac{p\pi}{m+1}\right) \sum_{s=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{1}{2s+1} \sin\left((2s+1)p\frac{\pi}{m+1}\right); \quad p = 0, \dots, m.$$

Verwenden Sie diesen Satz, um die Skalarprodukte $\langle Y_{10,1}, Y_{10,-1} \rangle_{L^2(\Omega)}$, $\langle Y_{20,3}, Y_{20,3} \rangle_{L^2(\Omega)}$ und $\langle Y_{50,1}, Y_{100,-27} \rangle_{L^2(\Omega)}$ zu berechnen, wobei $\{Y_{n,j}\}_{n,j}$ hier für die fully normalized spherical harmonics steht.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei (A_n) mit $A_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Folge. Zeigen Sie, dass $\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}((1); \Omega)}$ für alle $F \in \mathcal{H}((A_n); \Omega)$, $G \in \mathcal{H}((A_n^{-1}); \Omega)$ existiert.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Seien $(A_n), (B_n)$ zwei Folgen mit $A_n \neq 0 \neq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $|A_n| \leq |B_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{H}((B_n); \Omega) \subset \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Sei $A_n := h^{-n/2}(n + \frac{1}{2})^{1/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $h \in]0, 1[$ fest ist. Der Repronkern $K_{\mathcal{H}}$ des zugehörigen Sobolevraums $\mathcal{H} = \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ heißt *Singularitätskern*.

Leiten Sie eine geschlossene Darstellung, d.h. eine Darstellung ohne Reihe, für $K_{\mathcal{H}}$ her. Dies ist analog zu den Betrachtungen für den Abel–Poisson–Kern in der Vorlesung möglich.