Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

17. Juni 2021

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2021
Blatt 9

Abgabe bis **Donnerstag, den 01. Juli 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Sei $F \in \mathcal{H}$. Außerdem erfülle $K_{\mathcal{H}}$ die Ungleichung

$$|K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \zeta) - K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \eta)| \leq E^2_{(A_n)} |\zeta - \eta|^{\sigma}$$

für alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$, einen festen Wert $\sigma \geq 0$ und eine positive Konstante $E_{(A_n)}$. Sei $S_N \in \operatorname{Spline}((A_n); X_N)$ der Spline, der durch $S_N(\eta_i) = F(\eta_i)$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gegeben ist. Beweisen Sie:

$$\|F - S_N\|_{\mathrm{C}(\Omega)} \leq 2\sqrt{2} E_{(A_n)} \Theta_{X_N}^{\sigma/2} \|F\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Aufgabe 34: (4 Punkte)

Es sei eine Folge von Punktsystemen $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{N\to\infty} \Theta_{X_N} = 0$ gegeben, wobei $\Theta_{X_N} := \max\limits_{\xi\in\Omega} \left(\min\limits_{\eta\in X_N} |\xi - \eta| \right)$. Ferner sei $F \in \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ eine gegebene Funktion, wobei (A_n) eine (n)–summierbare Folge ist. Zeigen Sie, dass die Folge der Splines $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, die durch

$$S_N\left(\eta_i^{(N)}\right) = F\left(\eta_i^{(N)}\right); \quad i = 1, \ldots, N;$$

$S_N \in \operatorname{Spline}((A_n); X_N)$ mit $X_N = \{\eta_1^{(N)}, \ldots, \eta_N^{(N)}\}$ gegeben ist, gleichmäßig gegen F konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \|F - S_N\|_{\mathrm{C}(\Omega)} = 0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Legendre-Polynome die Ungleichung

$$|P_n(\xi \cdot \zeta) - P_n(\eta \cdot \zeta)| \leq \frac{n(n+1)}{2} |\xi - \eta|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$ erfüllen.

Aufgabe 35: (8 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung kann ein Datensatz heruntergeladen werden. Dieser besteht aus vier Spalten. Die ersten drei Spalten enthalten die x–, y– und z–Koordinaten von Punkten auf der Einheitssphäre. Die vierte Spalte gibt die Werte einer unbekannten Funktion an diesen Punkten an.
Bestimmen Sie den interpolierenden Spline in $\mathcal{H}\left((h^{-n/2});\Omega\right)$ für $h = 0.9$ und $h = 0.95$ und plotten Sie beide Splines auf einem Driscoll–Healy–Gitter mit $m = 100$. Was beobachten Sie?
Anmerkung: Sie werden feststellen, dass die Matrix A des linearen Gleichungssystems in beiden Fällen numerisch singulär ist. Addieren Sie deshalb $0.1 \cdot \max_{i,j} |a_{i,j}|$ auf alle Diagonaleinträge von $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$, bevor Sie das Gleichungssystem lösen.