

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2022

Blatt 1

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 19. April 2022**

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Der Bernstein-Operator $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, ist definiert durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1].$$

Bestimmen Sie die Funktionen $B_n g_j$ für $j = 0, 1, 2$ mit $g_j(x) := x^j$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $L_w^2[a, b]$ ein Hilbertraum ist, indem Sie benutzen, dass $L^2[a, b]$ ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Versucht man, eine Funktion F , von der man nur die Werte $\{F(x_j)\}_{j=0, \dots, n}$ mit $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ kennt, durch ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ vom Grad $\leq n$ zu interpolieren, so führt dies zum linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^n a_k x_j^k = F(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, n$$

mit der Vandermonde-Matrix $(x_j^k)_{j,k=0, \dots, n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Vandermonde-Matrix gleich

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

ist.

- b) Die Kondition $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ einer invertierbaren Matrix A ist ein Maß für die Anfälligkeit der Lösung von Gleichungssystemen $Ax = b$ gegenüber Rundungsfehlern.

Sei $x_j := \frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$, ein äquidistantes Punktgitter auf $[0, 1]$. Berechnen Sie (z.B. mit MATLAB) die Kondition der Vandermonde-Matrix für $n = 3, \dots, 20$ bzgl. der Matrixnorm

$$\|A\|_2 := |\lambda_{\max}|,$$

wobei λ_{\max} der größte Singulärwert von A ist. Man beachte, dass die Singulärwerte von A^{-1} die Kehrwerte der Singulärwerte von A sind.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\cos(nx)$ als algebraisches Polynom n -ten Grades in $\cos x$ geschrieben werden kann (für alle $n \in \mathbb{N}_0$), d.h. zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom T_n n -ten Grades gibt, so dass

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.