

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2022

Blatt 4

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Dienstag, den 10. Mai 2022

Aufgabe 13: (3 + 1 = 4 Punkte)

- a) Sei $f \in C^{(2)}[a, b]$ und sei S ein kubischer Spline zum Punktgitter $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Zeigen Sie, dass

$$\|f'' - S''\|_{L^2[a,b]}^2 = \|f''\|_{L^2[a,b]}^2 - \|S''\|_{L^2[a,b]}^2 - 2 \left[(f'(x) - S'(x)) S''(x) \Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n-1} (f(x) - S(x)) S'''(x) \Big|_{x_i^+}^{x_{i+1}^-} \right]$$

gilt, wobei x_i^+ und x_{i+1}^- für den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert steht.

- b) Beweisen Sie den Satz von Holladay: Der natürliche kubische Spline S , der $S(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \dots, n$ erfüllt, minimiert $\|F''\|_{L^2[a,b]}$ unter allen $F \in C^{(2)}[a, b]$, für die $F(x_j) = y_j$ für alle $j = 0, \dots, n$ ($a = x_0$, $b = x_n$) gilt.

Aufgabe 14: (2 + 2 = 4 Punkte)

Bezüglich einer streng monoton wachsenden Folge $(t_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} t_j = \pm\infty$ definieren wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} B_{i,1} &:= \chi_{[t_i, t_{i+1}[} , \\ \omega_{i,k}(x) &:= \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \chi_{[t_i, t_{i+k-1}[}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ B_{i,k} &:= \omega_{i,k} B_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k}) B_{i+1,k-1} . \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass jedes $B_{i,k}$ stückweise polynomial vom Grad $< k$ ist.
(Anmerkung: Die Funktionen $B_{i,k}$ heißen B-Splines und das System $\{B_{i,4}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ kann als Basis für kubische Splines verwendet werden.)
- b) Plotten Sie $B_{0,4}$ für $t_i = i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 15: (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ein gegebenes Punktgitter. Die Funktionen L_j , $j = 0, \dots, n$, die die so genannte Lagrange-Basis bezüglich des Punktgitters bilden, definiert man durch

$$L_j(x) := \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} .$$

a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom P vom Grad $\leq n$ darstellbar ist als

$$P(x) = \sum_{j=0}^n P(x_j) L_j(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Beweisen Sie: Für jedes gegebene Punktgitter existieren Konstanten w_0, \dots, w_n , so dass

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^n w_j P(x_j) \quad \text{für alle } P \in \text{Pol}_{0..n}$$

gilt. Ermitteln Sie eine Formel für w_0, \dots, w_n .

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Haar-Wavelet-Koeffizienten $d_{j,k}$ und alle Haar-Skalierungsfunktionskoeffizienten $c_{j,k}$ von $f(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$.