

Übungen zur Vorlesung

**Konstruktive Approximation:  
Fourier-, Spline- und Waveletverfahren**  
Sommersemester 2022  
Blatt 7

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 31. Mai 2022**

**Aufgabe 25:** (4 Punkte)

Mit  $\xi(\varphi, \vartheta)$  sei die Darstellung von  $\xi \in \Omega$  in Polarkoordinaten bezeichnet. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$Y_{n,j}(\xi(\varphi, \vartheta)) = F_{n,j}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(j\varphi), & j = -n, \dots, 0 \\ \sin(j\varphi), & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}_0, j = -n, \dots, n$  für ein ONS in  $L^2(\Omega)$  zu der Bedingung

$$\int_{-1}^1 F_{n,j}(t) F_{m,j}(t) dt = \frac{\delta_{nm}}{\pi(1 + \delta_{j0})} \quad (1)$$

für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$  und alle  $j = -n, \dots, n$  führt.

**Aufgabe 26:** (4 Punkte)

Benutzen Sie den Ansatz aus Aufgabe 25 für die Bestimmung von Eigenfunktionen des Beltrami-Operators zu den Eigenwerten  $-n(n+1)$ . Zeigen Sie hierbei, dass

$$\Delta^* Y_{n,j} = -n(n+1) Y_{n,j}$$

zur folgenden Differentialgleichung führt:

$$(1-t^2)F''_{n,j} - 2tF'_{n,j} + \left[ n(n+1) - \frac{j^2}{1-t^2} \right] F_{n,j} = 0. \quad (2)$$

**Aufgabe 27:** (4 Punkte)

Sei

$$F_{n,j}(t) := (1-t^2)^{\frac{|j|}{2}} \frac{d^{n+|j|}}{dt^{n+|j|}}(t^2-1)^n, \quad t \in [-1, 1],$$

$n \in \mathbb{N}_0, j = -n, \dots, n$ .

a) Zeigen Sie, dass  $F_{n,j}$  eine Lösung von (2) ist.

(Hinweis: Substituieren Sie  $G_{n,j}(t) := (1-t^2)^{-\frac{|j|}{2}} F_{n,j}(t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ ).

b) Zeigen Sie, dass (1) zum Teil von  $F_{n,j}$  erfüllt wird in dem Sinne, dass

$$\int_{-1}^1 F_{n,j}(t) F_{m,j}(t) dt = 0 \quad \text{für } n \neq m$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2)(F_{n,j} F'_{m,j} - F_{m,j} F'_{n,j}) \right].$$

**Aufgabe 28:** (4 Bonuspunkte + 4 Punkte)

Ein Beispiel für ein System  $\{Y_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}_0; j = -n, \dots, n}$  kann wie folgt konstruiert werden:

Ist  $\varphi \in [0, 2\pi[$  der Längengrad und  $\vartheta \in [0, \pi]$  der Breitengrad, dann sei

$$\bar{R}_{n,0}(\xi(\varphi, \vartheta)) := \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\cos \vartheta), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\bar{R}_{n,m}(\xi(\varphi, \vartheta)) := \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos \vartheta) \cos(m\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0, m \in \{1, \dots, n\};$$

$$\bar{S}_{n,m}(\xi(\varphi, \vartheta)) := \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos \vartheta) \sin(m\varphi), \quad n \in \mathbb{N}_0, m \in \{1, \dots, n\};$$

wobei

$$P_{n,m}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}}(t^2-1)^n, \quad t \in [-1, +1], \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \{0, \dots, n\},$$

die assoziierten Legendrefunktionen sind. Damit definiert man nun

$$Y_{n,j} := \begin{cases} \bar{R}_{n,-j} & ; j = -n, \dots, 0 \\ \bar{S}_{n,j} & ; j = 1, \dots, n \end{cases}.$$

Diese  $\{Y_{n,j}\}_{n,j}$  heißen *fully normalized spherical harmonics*.

a) Plotten Sie  $Y_{3,j}$  für  $j = -3, \dots, 3$

b) Plotten Sie

$$4\pi \sum_{n=0}^{1000} \sum_{j=-n}^n (0.5)^n (2n+1)^{-1} Y_{n,j}(\xi) Y_{n,j}(\eta), \quad \xi, \eta \in \Omega,$$

auf eine geeignete Art.

Anmerkung: Verwenden Sie die MATLAB-Funktion `legendre`.