Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

31. Mai 2022

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2022
Blatt 8

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 14. Juni 2022**

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Es gilt folgender Satz:
Satz *(J.R. Driscoll, D.M. Healy)*
Sei $F \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ *mit* $F^\wedge(n,j) = 0$ *für* $n > m$ (m ungerade), $j \in \{1, \ldots, 2n+1\}$. *Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega F(\eta)\ d\omega(\eta) = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{p=0}^{m} a_p \sum_{q=0}^{m} F(\eta_{p,q}),$$

wobei die Einheitsvektoren $\eta_{p,q}$ *durch die Polarkoordinaten*

$$\begin{aligned} \varphi_q &= q\,\frac{2\pi}{m+1};\ q = 0, \ldots, m; \quad (\textit{Längengrad}) \\ \vartheta_p &= p\,\frac{\pi}{m+1};\ p = 0, \ldots, m; \quad (\textit{Breitengrad}) \end{aligned}$$

gegeben sind und die Gewichte a_p *wie folgt berechnet werden:*

$$a_p = \frac{4}{m+1} \sin\left(\frac{p\pi}{m+1}\right) \sum_{s=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{1}{2s+1} \sin\left((2s+1)\,p\frac{\pi}{m+1}\right); p = 0, \ldots, m.$$

Verwenden Sie diesen Satz, um die Skalarprodukte $\langle Y_{10,1}, Y_{10,-1}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$, $\langle Y_{20,3}, Y_{20,3}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ und $\langle Y_{50,1}, Y_{100,-27}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ zu berechnen, wobei $\{Y_{n,j}\}_{n,j}$ hier für die fully normalized spherical harmonics steht.

Aufgabe 30: (4 Punkte)

Sei (A_n) mit $A_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Folge. Zeigen Sie, dass $\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}((1);\Omega)}$ für alle $F \in \mathcal{H}((A_n);\Omega)$, $G \in \mathcal{H}((A_n^{-1});\Omega)$ existiert.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Seien (A_n), (B_n) zwei Folgen mit $A_n \neq 0 \neq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $|A_n| \leq |B_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{H}((B_n);\Omega) \subset \mathcal{H}((A_n);\Omega)$ gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Sei $A_n := h^{-n/2}(n + \frac{1}{2})^{1/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $h \in]0,1[$ fest ist. Der Reprokern $K_{\mathcal{H}}$ des zugehörigen Sobolevraums $\mathcal{H} = \mathcal{H}((A_n);\Omega)$ heißt *Singularitätskern*.
Leiten Sie eine geschlossene Darstellung, d.h. eine Darstellung ohne Reihe, für $K_{\mathcal{H}}$ her. Dies ist analog zu den Betrachtungen für den Abel–Poisson–Kern in der Vorlesung möglich.