Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

14. Juni 2022

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2022
Blatt 9

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 21. Juni 2022**

Aufgabe 33: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

für alle Legendre–Polynome gilt.
Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\left|P_n'(t)\right| \leq P_n'(1)$ für alle $t \in [-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Diese Abschätzung dürfen Sie für die folgenden Aufgaben benutzen.

Aufgabe 34: (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome die Ungleichung

$$|P_n(\xi \cdot \zeta) - P_n(\eta \cdot \zeta)| \leq \frac{n(n+1)}{2} |\xi - \eta|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$ erfüllen.

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Wie in der Vorlesung bereits erwähnt wurde, sind alle $F \in \mathcal{H}_s(\Omega)$ mit $s > 2$ Lipschitz–stetig (was Sie hiermit benutzen dürfen). Zeigen Sie nun, dass

$$C_F(s) := \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{n(n+1)}{(n+\frac{1}{2})^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\mathcal{H}_s(\Omega)}$$

eine Lipschitz-Konstante ist, d.h.

$$|F(\xi) - F(\eta)| \leq C_F(s) \quad |\xi - \eta| \qquad \forall \xi, \eta \in \Omega.$$

Aufgabe 36: (8 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung kann ein Datensatz heruntergeladen werden. Dieser besteht aus vier Spalten. Die ersten drei Spalten enthalten die x–, y– und z–Koordinaten von Punkten auf der Einheitssphäre. Die vierte Spalte gibt die Werte einer unbekannten Funktion an diesen Punkten an.
Bestimmen Sie den interpolierenden Spline in $\mathcal{H}\left((h^{-n/2});\Omega\right)$ für $h = 0.9$ und $h = 0.95$ und plotten Sie beide Splines auf einem Driscoll–Healy–Gitter mit $m = 100$. Was beobachten Sie?
Anmerkung: Sie werden feststellen, dass die Matrix A des linearen Gleichungssystems in beiden Fällen numerisch singulär ist. Addieren Sie deshalb $0.1 \cdot \max\limits_{i,j} |a_{i,j}|$ auf alle Diagonaleinträge von $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$, bevor Sie das Gleichungssystem lösen.