Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

21. Juni 2022

Übungen zur Vorlesung

# Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

**Sommersemester 2022**
**Blatt 10**

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 28. Juni 2022**

**Aufgabe 37:** (4 Punkte)

Sei $F \in \mathcal{H}$. Außerdem erfülle $K_{\mathcal{H}}$ die Ungleichung

$$\left|K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \zeta) - K_{\mathcal{H}}(\xi \cdot \eta)\right| \leq E_{(A_n)}^2 \left|\zeta - \eta\right|^{\sigma}$$

für alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$, einen festen Wert $\sigma \geq 0$ und eine positive Konstante $E_{(A_n)}$. Sei $S_N \in \operatorname{Spline}((A_n); X_N)$ der Spline, der durch $S_N(\eta_i) = F(\eta_i)$ für alle $i = 1, \ldots, N$ gegeben ist. Beweisen Sie:

$$\|F - S_N\|_{\mathrm{C}(\Omega)} \leq 2\sqrt{2} E_{(A_n)} \Theta_{X_N}^{\sigma/2} \|F\|_{\mathcal{H}} .$$

**Aufgabe 38:** (4 Punkte)

Es sei eine Folge von Punktsystemen $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{N\to\infty} \Theta_{X_N} = 0$ gegeben, wobei $\Theta_{X_N} := \max\limits_{\xi\in\Omega}\left(\min\limits_{\eta\in X_N} |\xi - \eta|\right)$. Ferner sei $F \in \mathcal{H}((A_n);\Omega)$ eine gegebene Funktion, wobei $(A_n)$ eine $(n)$–summierbare Folge ist. Zeigen Sie, dass die Folge der Splines $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, die durch

$$S_N\left(\eta_i^{(N)}\right) = F\left(\eta_i^{(N)}\right); \quad i = 1, \ldots, N;$$

$S_N \in \operatorname{Spline}((A_n); X_N)$ mit $X_N = \{\eta_1^{(N)}, \ldots, \eta_N^{(N)}\}$ gegeben ist, gleichmäßig gegen $F$ konvergiert:

$$\lim_{N\to\infty} \|F - S_N\|_{\mathrm{C}(\Omega)} = 0 .$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 34.

**Aufgabe 39:** (4 Punkte)

Sei $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt. Ferner existiere eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass

$$\gamma(t) = O(t^{-1-\varepsilon}) \quad \text{für} \quad t \to \infty \tag{1}$$

gilt. Zeigen Sie, dass $\gamma$ zulässig ist.

**Aufgabe 40:** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass (1) nicht aus der Zulässigkeitsbedingung folgt.