Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M.Sc.

05. Juli 2022

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Sommersemester 2022
Blatt 12

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am **Dienstag, den 12. Juli 2022**

Aufgabe 45: (4 Punkte)

Betrachten Sie alle Beispiele für Skalierungsfunktionen aus der Vorlesung und untersuchen Sie die Detailräume, die von den zugehörigen P–Wavelets erzeugt werden. In welchen Fällen sind die Detailräume im $\mathrm{L}^2(\Omega)$–Sinne orthogonal? (Gehen Sie davon aus, dass $(\gamma_{j,n})_{j\in\mathbb{N}_0}$ bei der Tykhonov-Philips-Skalierungsfunktion für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ *streng* monoton fallend ist.)

Aufgabe 46: (4 Punkte)

Plotten Sie die Shannon–, die cp–, die Abel-Poisson– und die Gauß-Weierstraß–P–Wavelets $\Psi_j(\cos\vartheta)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, für $j \in \{0, \dots, 3\}$.

Aufgabe 47: (4 Punkte)

Die Funktionen $Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3} : \Omega \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned}
Y_{0,1}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\\
Y_{1,1}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta,\\
Y_{1,2}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\vartheta\cos\varphi,\\
Y_{1,3}\left(\varepsilon^r(\varphi, \cos\vartheta)\right) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\vartheta\sin\varphi,
\end{aligned}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[, \vartheta \in [0, \pi]$.

Zeigen Sie, dass die Systeme $\{Y_{0,1}, Y_{1,1}\}, \{Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}\}$ und $\{Y_{0,1}, Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}\}$ jeweils nicht unisolvent sind, indem Sie für jedes Funktionensystem ein Punktsystem bestimmen, für das die zugehörige Matrix singulär ist.

Aufgabe 48: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das System $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ auf jedem Intervall $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ unisolvent ist.