Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. R. Telschow

11. November 2013

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Winterersemester 2013/2014
Blatt 5

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 21. November 2013.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren ε^r, ε^φ und ε^t ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$ bilden. Weisen Sie ferner nach, dass $\varepsilon^r \wedge \varepsilon^\varphi = \varepsilon^t$ gilt.

b) Sei $F \in \mathrm{C}^{(1)}(\Omega)$. Beweisen Sie, dass die Vektoren $\xi F(\xi)$, $\nabla^*_\xi F(\xi)$ und $L^*_\xi F(\xi)$ für jedes feste $\xi \in \Omega$ paarweise orthogonal sind.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Gradient ∇ auf $\mathrm{C}^{(1)}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ wie folgt darstellbar ist:

$$\nabla = \varepsilon^r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla^* \; .$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Oberflächenrotationsgradient L^* wie folgt dargestellt werden kann:

$$L^* = -\varepsilon^\varphi \sqrt{1-t^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \; .$$

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Beltrami–Operator Δ^* auf $\mathrm{C}^{(2)}(\Omega)$, der definiert ist durch

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 ,$$

folgendes erfüllt:

$$\nabla^* \cdot \nabla^* = \Delta^* \; .$$