

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Wintersemester 2013/2014

Blatt 8

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Donnerstag, den 12. Dezember 2013.

Aufgabe 29: (4 Punkte)

Es gilt folgender Satz:

Satz (*J.R. Driscoll, D.M. Healy*)

Sei $F \in L^2(\Omega)$ mit $F^\wedge(n, j) = 0$ für $n > m$ (m ungerade), $j \in \{1, \dots, 2n + 1\}$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} F(\eta) d\omega(\eta) = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{p=0}^m a_p \sum_{q=0}^m F(\eta_{p,q}),$$

wobei die Einheitsvektoren $\eta_{p,q}$ durch die Polarkoordinaten

$$\varphi_q = q \frac{2\pi}{m+1}; \quad q = 0, \dots, m; \quad (\text{Längengrad})$$

$$\vartheta_p = p \frac{\pi}{m+1}; \quad p = 0, \dots, m; \quad (\text{Breitengrad})$$

gegeben sind und die Gewichte a_p wie folgt berechnet werden:

$$a_p = \frac{4}{m+1} \sin\left(\frac{p\pi}{m+1}\right) \sum_{s=0}^{\frac{m+1}{2}-1} \frac{1}{2s+1} \sin\left((2s+1)p\frac{\pi}{m+1}\right); \quad p = 0, \dots, m.$$

Verwenden Sie diesen Satz, um die Skalarprodukte $\langle Y_{10,1}, Y_{10,-1} \rangle_{L^2(\Omega)}$, $\langle Y_{20,3}, Y_{20,3} \rangle_{L^2(\Omega)}$ und $\langle Y_{50,1}, Y_{100,-27} \rangle_{L^2(\Omega)}$ zu berechnen, wobei $\{Y_{n,j}\}_{n,j}$ hier für die fully normalized spherical harmonics steht.

Aufgabe 30: (8 Punkte) (Abgabe bis 18. Juni 2012)

Berechnen Sie $F^\wedge(n, j)$ für $n \in \{0, \dots, 50\}$, $j \in \{-n, \dots, n\}$ im Fall von

$$F(\varphi, \vartheta) := \begin{cases} (\sin \frac{1}{\vartheta - \frac{\pi}{2}}) e^{-(\vartheta - \pi)^2} \log(4 + \varphi) & , \vartheta \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \vartheta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

indem Sie ein Driscoll-Healy-Gitter mit $m = 101$ verwenden. Berechnen Sie dann

$$\sum_{n=0}^{50} \sum_{j=-n}^n (F^\wedge(n, j))^2$$

und plotten Sie

$$F - \sum_{n=0}^{50} \sum_{j=-n}^n F^\wedge(n, j) Y_{n,j}$$

auf einem Driscoll-Healy-Gitter mit $m = 201$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)

Sei (A_n) mit $A_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine gegebene Folge. Zeigen Sie, dass $\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}((1); \Omega)}$ für alle $F \in \mathcal{H}((A_n); \Omega)$, $G \in \mathcal{H}((A_n^{-1}); \Omega)$ existiert.

Aufgabe 32: (4 Punkte)

Seien (A_n) , (B_n) zwei Folgen mit $A_n \neq 0 \neq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $|A_n| \leq |B_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{H}((B_n); \Omega) \subset \mathcal{H}((A_n); \Omega)$ gilt.