Universität Siegen
Fakultät IV, Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
M.Sc. R. Telschow

12. Dezember 2013

Übungen zur Vorlesung

Konstruktive Approximation: Fourier-, Spline- und Waveletverfahren

Wintersemester 2013/14
Blatt 9

Abgabe zu Beginn der Vorlesung am Montag, den 19. Dezember 2013.

Aufgabe 33: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$P_n^{'}(1) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

für alle Legendre–Polynome gilt.
Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\left|P_n^{'}(t)\right| \leq P_n^{'}(1)$ für alle $t \in [-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Diese Abschätzung dürfen Sie für die folgenden Aufgaben benutzen.

Aufgabe 34: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome die Ungleichung

$$|P_n(\xi \cdot \zeta) - P_n(\eta \cdot \zeta)| \leq \frac{n(n+1)}{2} |\xi - \eta|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega^3$ erfüllen.

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Wie in der Vorlesung bereits erwähnt wurde, sind alle $F \in \mathcal{H}_s(\Omega)$ mit $s > 2$ Lipschitz–stetig (was Sie hiermit benutzen dürfen). Zeigen Sie nun, dass

$$C_F(s) := \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \quad \frac{2n+1}{4\pi} \quad \frac{n(n+1)}{(n+\frac{1}{2})^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \|F\|_{\mathcal{H}_s(\Omega)}$$

eine Lipschitz-Konstante ist, d.h.

$$|F(\xi) - F(\eta)| \leq C_F(s) \quad |\xi - \eta| \qquad \forall \xi, \eta \in \Omega.$$

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Sei $A_n := h^{-n/2}(n+\frac{1}{2})^{1/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $h \in]0,1[$ fest ist. Der Reprokern $K_{\mathcal{H}}$ des zugehörigen Sobolevraums $\mathcal{H} = \mathcal{H}((A_n);\Omega)$ heißt *Singularitätskern*.
Leiten Sie eine geschlossene Darstellung, d.h. eine Darstellung ohne Reihe, für $K_{\mathcal{H}}$ her. Dies ist analog zu den Betrachtungen für den Abel–Poisson–Kern in der Vorlesung möglich.