

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2020
Blatt 3

Abgabe bis **Donnerstag, den 21. Mai 2020, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 9: (4 Punkte) ABGABE

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Lösung an.

a) $y' = \sqrt{1 - x^2} y$, $y(0) = 2$

b) $y' = \frac{y}{x} + 5x$, $y(1) = 0$

Aufgabe 10:

Seien $y_1, y_2, y_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$ paarweise verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \alpha(x)y + s(x),$$

wobei α und s stetig auf dem Intervall I seien. Zu einem beliebigen $\xi \in I$ sei $\eta_k := y_k(\xi)$ für $k = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass dann an allen Stellen $x \in I$ die Gleichung

$$\frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}$$

gilt.

Aufgabe 11: (4 Punkte) ABGABE

a) Geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$(2y^2 + 6xy - x^2) dx + (y^2 + 4xy + 3x^2) dy = 0.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\cos x dx + (4ye^{-y} + \sin x) dy = 0, \quad x_0 = \pi, \quad y_0 = 0.$$

Aufgabe 12:

Eine Punktmasse der Masse M im Ursprung $(0,0)$ des \mathbb{R}^2 übt auf eine andere Punktmasse m in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Kraft

$$f(x, y) = -\frac{\gamma m M}{|(x, y)|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

aus, wobei γ die Gravitationskonstante ist.

- a) Bestimmen Sie die Äquipotentiallinien dieses Kraftfeldes.
- b) Stellen Sie eine zugehörige exakte Differentialgleichung auf.