Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

18. Juni 2020

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2020
Blatt 8

Abgabe bis **Donnerstag, den 25. Juni 2020, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 29:

Zeigen Sie: Für eine lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gilt:

$$(\mathcal{L}f)\,(s) = 0 \text{ für alle } s \in K_f \;\Leftrightarrow\; \int_0^\tau f(t)\;\mathrm{d}t = 0 \text{ für alle } \tau > 0.$$

Hinweise:

- Substituieren Sie $u := e^{-t}$
- Benutzen Sie: Zu jedem $F \in \mathrm{C}[a,b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom, so dass $\|F - P\|_{\mathrm{C}[a,b]} < \varepsilon$.

Aufgabe 30: (4 Punkte) ABGABE

(i) Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte:

a) $f(t) = e^{at},\ a \in \mathbb{R}$ konstant

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $f(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$

d) $f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \sinh(\beta t)$

(ii) Berechnen Sie jeweils die inverse Laplacetransformierte

a) $F(s) = \frac{1}{s^2}\,\frac{s-\alpha}{s+\alpha}$

b) $F(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$

Aufgabe 31: (4 Punkte) ABGABE

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y''' - y'' - y' + y = -10\cos(2t-1) + 5\sin(2t-1) \\ &y\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2,\ y''\left(\frac{1}{2}\right) = 1,\ t \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

unter Verwendung der Laplacetransformation.

Aufgabe 32:

Für Funktionen $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ wird die **Fourier-Transformation** definiert durch

$$f^\wedge(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t},\ \omega \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ n-fach stetig differenzierbar, so dass $f', \ldots, f^{(n)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, dann ist

$$\left(\mathcal{F}f^{(n)}\right)(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^n\,(\mathcal{F}f)(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}.$$