Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

25. Juni 2020

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2020
Blatt 9

Abgabe bis **Donnerstag, den 02. Juli 2020, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 33: (2+2=4 Punkte) ABGABE

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Airy'schen Differentialgleichung

$$\ddot{u} - tu = 0.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \log x.$$

Aufgabe 34: (4 Punkte) ABGABE

In den dreidimensionalen Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sqrt{1-\tau^2}\cos\varphi \\ r\sqrt{1-\tau^2}\sin\varphi \\ r\tau \end{pmatrix},$$

wobei $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $\tau \in [-1, 1]$ ($\tau = \cos\vartheta$ für $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\tau = \sin\vartheta$ für $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) kann man, analog zum zweidimensionalen Fall, den Laplaceoperator wie folgt darstellen:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(-2\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + (1-\tau^2)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{1-\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

Verwenden Sie den Separationsansatz $u(t, r, \varphi, \tau) = v(t)w(r)f(\varphi)g(\tau)$ für die Wellengleichung (einer schwingenden, homogenen, kugelförmigen Erde)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u$$

und zeigen Sie, dass dies zu den folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen führt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \ddot{v} + \omega^2 v \ , \qquad \omega \in \mathbb{R} \quad \text{konstant} && (1) \\
0 &= r^2 w'' + 2rw' + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} r^2 - \lambda \right) w \ , \qquad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{konstant} && (2) \\
0 &= f'' - \mu f \ , \qquad \mu \in \mathbb{R} \quad \text{konstant} && (3) \\
0 &= \left(1 - \tau^2\right) g'' - 2\tau g' + \left(\lambda + \frac{\mu}{1 - \tau^2} \right) g && (4)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 35:

Lösen Sie (1) und (3).

Aufgabe 36:

Lösen Sie (2) (für $\lambda > -\frac{1}{4}$) mit dem Ansatz

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \ h\left(\frac{\omega}{\alpha} r \right) .$$