Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

27. April 2021

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2021
Blatt 2

Abgabe bis **Dienstag, den 04. Mai 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = xy,\ y(0) = 1$$

mit Hilfe des Iterationsverfahrens aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Geben Sie auch an, wo die Lösung existiert.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = \frac{t}{y^2+1},\ y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie, ausgehend von $\varphi_0 \equiv 0$, eine Näherungslösung $\widetilde{y}$, so dass $\|\widetilde{y} - y\|_{\mathrm{C}[-1,1]} \leq 0{,}14$ gilt.

Aufgabe 7: (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

a) Wandeln Sie es, analog zum Fall 1. Ordnung, in ein Fixpunktproblem um.

b) Führen Sie die entsprechende Fixpunktiteration $\varphi_n = A\varphi_{n-1}$ mit $\varphi_0 \equiv 0$ für

$$y'' = -y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

durch und überprüfen Sie Ihr Resultat durch Einsetzen in das Anfangswertproblem und in das Fixpunktproblem.

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A : X \to X$ ein linearer stetiger Operator. Hierzu sei eine Folge von Operatoren $T_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$T_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (T_n) bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|$ (siehe Grundlagen, Folie 15) konvergiert.

(Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass der Raum $\mathcal{L}(Y, Z) := \{S : Y \to Z \text{ linear und stetig}\}$ für normierte Räume Y und Z bezüglich der Operatornorm ein normierter Raum ist, der vollständig ist, wenn Z vollständig ist.)