

Übungen zur Vorlesung  
**Gewöhnliche Differentialgleichungen**  
Sommersemester 2021  
Blatt 3

Abgabe bis **Dienstag, den 18. Mai 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

**Aufgabe 9:** (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils den Definitionsbereich der Lösung an.

a)  $y' = \sqrt{1 - x^2} y$ ,  $y(0) = 2$

b)  $y' = \frac{y}{x} + 5x$ ,  $y(1) = 0$

**Aufgabe 10:** (4 Punkte)

Seien  $y_1, y_2, y_3 : I \rightarrow \mathbb{R}$  paarweise verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \alpha(x)y + s(x),$$

wobei  $\alpha$  und  $s$  stetig auf dem Intervall  $I$  seien. Zu einem beliebigen  $\xi \in I$  sei  $\eta_k := y_k(\xi)$  für  $k = 1, 2, 3$ . Zeigen Sie, dass dann an allen Stellen  $x \in I$  die Gleichung

$$\frac{y_3(x) - y_2(x)}{y_2(x) - y_1(x)} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}$$

gilt.

**Aufgabe 11:** (4 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine Lösung an:

$$(2y^2 + 6xy - x^2) dx + (y^2 + 4xy + 3x^2) dy = 0.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\cos x dx + (4ye^{-y} + \sin x) dy = 0, \quad x_0 = \pi, \quad y_0 = 0.$$

**Aufgabe 12:** (4 Punkte)

Eine Punktmasse der Masse  $M$  im Ursprung  $(0, 0)$  des  $\mathbb{R}^2$  übt auf eine andere Punktmasse  $m$  in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  die Kraft

$$f(x, y) = -\frac{\gamma mM}{|(x, y)|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

aus, wobei  $\gamma$  die Gravitationskonstante ist.

- a) Bestimmen Sie die Äquipotentiallinien dieses Kraftfeldes.
- b) Stellen Sie eine zugehörige exakte Differentialgleichung auf.