Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

01. Juni 2021

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2021
Blatt 5

Abgabe bis **Dienstag, den 08. Juni 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Finden Sie die eindeutige Lösung von

$$y' - y^2 = -1$$

zu beliebigem Anfangswert $y(x_0) = y_0$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)

Lösen Sie die Riccati-Differentialgleichungen

a) $y' + (2x+1)y - y^2 = 1 + x + x^2$

b) $y' - y - e^{-x}y^2 = -e^x$

jeweils zum Anfangswert $y(0) = y_0$ ($y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig).

Aufgabe 19: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = y + \frac{\sin t}{y}$$

Auf die Bestimmung des Definitionsbereichs kann hierbei verzichtet werden.

Aufgabe 20: (4 Punkte)

Ein Gefäß sei bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt, wobei die Querschnittsfläche $A(x)$ des Gefäßes mit dem Abstand x zum Abfluss am Boden variieren kann und $A(x)$ stetig von x abhängig ist. Es sei $A(h) =: A_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Ausfluss (mit Querschnitt $A_{\text{Aus}} \ll \min_{x\in[0,h]} A(x)$) geöffnet. Das pro Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsvolumen ist dann $\dot{V} = -\alpha A_{\text{Aus}}\nu$, wobei der Verengungskoeffizient ν durch die Torricellische Ausflussformel $\nu(x) = \sqrt{2gx}$ (g:Fallbeschleinigung) gegeben ist und α eine gegebene Konstante ist.

a) Leiten Sie eine Differentialgleichung mit Anfangswert für die Flüssigkeitshöhe $x(t)$ her.

b) Lösen Sie diese für den Fall eines konstanten Querschnitts $A(x) = A_0 \; \forall \; x$.