

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2021
Blatt 6

Abgabe bis **Dienstag, den 15. Juni 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Der Luftdruck in der Atmosphäre ist bekanntermaßen höhenabhängig. Die Ursache ist hierfür zunächst die Höhe der Luftsäule, die sich über dem jeweils betrachteten Punkt in der Atmosphäre befindet. Je tiefer dieser Punkt ist, desto höher ist die Luftsäule, die sich darüber befindet, und somit desto größer auch die Schwere der Luftsäule. Hierdurch ergibt sich, dass der Luftdruck p in Höhe h von der Dichte ρ und der Fallbeschleunigung g wie folgt abhängt: $p'(h) = -g\rho(h)$. In einem idealen Gas gilt hierbei $\rho T = Cp$, wobei C eine Konstante ist und T die Temperatur in Kelvin ist. Letztere ist ebenfalls von der Höhe abhängig. In einem einfacheren, linearisierten Modell lässt sich dieser Zusammenhang schreiben als $T(h) = T_0 - a(h - h_0)$, wobei $T_0 = T(h_0)$. Stellen Sie die Differentialgleichung für p auf und lösen Sie sie für eine allgemeine Anfangsbedingung $p(h_0) = p_0$.

Aufgabe 22: (4 Punkte)

Befindet sich ein Objekt im freien Fall, so wirkt zunächst nur die Schwerkraft mg auf dieses Objekt, wenn m dessen Masse ist und g die Fallbeschleunigung (ca. $9,81\text{m/s}^2$) ist. Realistisch betrachtet wirkt hierbei aber auch die Reibungskraft durch den Luftwiderstand entgegen. Je nach Geschwindigkeit hängt der Luftwiderstand in unterschiedlichen Potenzen von der Geschwindigkeit v ab. Wir nehmen hier eine Abhängigkeit von v^α an mit $\alpha \approx 2$. Wegen des Newton'schen Gesetzes „Kraft=Masse mal Beschleunigung“ gilt somit für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t :

$$m\dot{v} = mg - kv^\alpha,$$

wobei der Punkt für die Zeitableitung steht und k konstant ist. Lösen Sie diese Gleichung. Was ergibt sich im Spezialfall $\alpha = 2$?

Aufgabe 23: (4 Punkte)

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels Integration durch Differentiation:

$$y = (x + 1)(y')^2.$$

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$4 - 4x^2 - y^2 = 3xyy'.$$