Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

15. Juni 2021

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2021
Blatt 7

Abgabe bis **Donnerstag, den 22. Juni 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = s(x)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ und Störfunktion $s \in \mathrm{C}[x_0-\alpha, x_0+\alpha], \alpha > 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen jeweils partikuläre Lösungen sind (wobei $|x-x_0| \leq \alpha$).

a)
$$y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_1 t}s(t)\ \mathrm{d}t - e^{\lambda_2 x}\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_2 t}s(t)\ \mathrm{d}t\right],$$
falls $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{C}$ zwei verschiedene Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms sind.

b)
$$y_{\mathrm{p}}(x) = e^{\mu x}\left[x\int_{x_0}^{x} e^{-\mu t}s(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} te^{-\mu t}s(t)\ \mathrm{d}t\right],$$
falls $\mu \in \mathbb{R}$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

Lösen Sie die (reellen) Anfangswertprobleme

a) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \sqrt{t+1}\, e^{-t}, \quad x(0) = \pi,\ \dot{x}(0) = \sqrt{2} - \pi$

b) $2\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 1, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

Aufgabe 27: (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Für nicht-lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es nur für besondere Ausnahmefälle Lösungsstrategien, welche in dieser und der nächsten Aufgabe exemplarisch abgehandelt werden. Speziell relevant sind explizite Gleichungen zweiter Ordnung, also

$$y'' = f(x, y, y'),$$

bei denen f nur von einem Argument abhängt.

a) Gleichungen der Form $y'' = f(x)$ sind leicht zu lösen: Bestimmen Sie alle y mit $y'' = \sqrt{x}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

b) Gleichungen der Form $y'' = f(y')$ lassen sich durch eine einfache Substitution in eine Gleichung erster Ordnung umwandeln: Bestimmen Sie alle y mit $y'' = \frac{1}{\cosh y'}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

c) Im Fall $y'' = f(y)$ multipliziert man die Gleichung mit $2y'$ und erhält so eine Gleichung der Form $(y')^2 = g(y)$, die also von erster Ordnung ist. Bestimmen Sie alle y mit $y'' = 2\sin(2y)$, $y(0) = \frac{3}{2}\pi$, $y'(0) = 2$.

Aufgabe 28: (1+1,5+1,5=4 Punkte)

Wenn f von nur zwei Argumenten abhängt, existieren ebenfalls Strategien:

a) Für $y'' = f(x, y')$ reicht, wie bei $y'' = f(y')$, eine einfache Substitution. Finden Sie alle y, für die $(y')^2\, y'' + x^2 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$ gilt.

b) Für $y'' = f(y, y')$ im Fall $y' \neq 0$, wodurch eine Umkehrfunktion $y \mapsto x(y)$ existiert, setzt man $p(y) := y'(x(y))$ und wandelt die Differentialgleichung um in die Form $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^{-1} f(y, p)$. Lösen Sie hiermit $yy'' = (y')^2$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 2$ und begründen Sie, warum dieser sogenannte Riccati'sche Ansatz allgemein zu $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p^{-1} f(y, p)$ führt.

c) Für den Fall $y'' = f(x, y)$ gibt es nur einen allgemeinen Ansatz, wenn speziell die rechte Seite separiert ist: $y'' = g(x)y$. Hier kann man $z := \frac{y'}{y}$ substituieren (wenn $y \neq 0$). Zeigen Sie, dass dann $z' = g(x) - z^2$ gilt und lösen Sie $y'' = (x^2 - 2x)y$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$.