

Übungen zur Vorlesung  
**Gewöhnliche Differentialgleichungen**  
Sommersemester 2021  
Blatt 9

Abgabe bis **Dienstag, den 06. Juli 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

**Aufgabe 33:** (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine lokal integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$(\mathcal{L}f)(s) = 0 \text{ für alle } s \in K_f \Leftrightarrow \int_0^\tau f(t) dt = 0 \text{ für alle } \tau > 0.$$

Hinweise:

- Substituieren Sie  $u := e^{-t}$
- Benutzen Sie: Zu jedem  $F \in C[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein Polynom, so dass  $\|F - P\|_{C[a, b]} < \varepsilon$ .

**Aufgabe 34:** (4 · 0.5 + 2 · 1 = 4 Punkte)

(i) Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte:

a)  $f(t) = e^{at}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  konstant

b)  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c)  $f(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$

d)  $f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \sinh(\beta t)$

(ii) Berechnen Sie jeweils die inverse Laplacetransformierte

a)  $F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{s-\alpha}{s+\alpha}$

b)  $F(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$

**Aufgabe 35:** (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y'' - y' + y = -10 \cos(2t - 1) + 5 \sin(2t - 1)$$
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad y''\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

unter Verwendung der Laplacetransformation.

**Aufgabe 36:** (4 Punkte)

Für Funktionen  $f \in L^1(\mathbb{R})$  wird die **Fourier-Transformation** definiert durch

$$f^\wedge(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$   $n$ -fach stetig differenzierbar, so dass  $f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ , dann ist

$$(\mathcal{F}f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n (\mathcal{F}f)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$