

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2021
Blatt 9

Abgabe bis **Dienstag, den 06. Juli 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine lokal integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$(\mathcal{L}f)(s) = 0 \text{ für alle } s \in K_f \Leftrightarrow \int_0^\tau f(t) dt = 0 \text{ für alle } \tau > 0.$$

Hinweise:

- Substituieren Sie $u := e^{-t}$
- Benutzen Sie: Zu jedem $F \in C[a, b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom, so dass $\|F - P\|_{C[a, b]} < \varepsilon$.

Aufgabe 34: (4 · 0.5 + 2 · 1 = 4 Punkte)

(i) Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte:

a) $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$ konstant

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $f(t) = \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t)$

d) $f(t) = \sin(\alpha t) \cdot \sinh(\beta t)$

(ii) Berechnen Sie jeweils die inverse Laplacetransformierte

a) $F(s) = \frac{1}{s^2} \frac{s-\alpha}{s+\alpha}$

b) $F(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s^2}$

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y'' - y' + y = -10 \cos(2t - 1) + 5 \sin(2t - 1)$$
$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad y''\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad t \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

unter Verwendung der Laplacetransformation.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird die **Fourier-Transformation** definiert durch

$$f^\wedge(\omega) := (\mathcal{F}f)(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ n -fach stetig differenzierbar, so dass $f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist

$$(\mathcal{F}f^{(n)})(\omega) = (i\omega)^n (\mathcal{F}f)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$