

Übungen zur Vorlesung
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2021
Blatt 10

Abgabe bis **Dienstag, den 13. Juli 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 37: (2+2=4 Punkte)

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Airy'schen Differentialgleichung

$$\ddot{u} - tu = 0.$$

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \log x.$$

Aufgabe 38: (4 Punkte)

In den dreidimensionalen Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sqrt{1-\tau^2} \cos \varphi \\ r\sqrt{1-\tau^2} \sin \varphi \\ r\tau \end{pmatrix},$$

wobei $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $\tau \in [-1, 1]$ ($\tau = \cos \vartheta$ für $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\tau = \sin \vartheta$ für $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) kann man, analog zum zweidimensionalen Fall, den Laplaceoperator wie folgt darstellen:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(-2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + (1 - \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{1 - \tau^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Verwenden Sie den Separationsansatz $u(t, r, \varphi, \tau) = v(t)w(r)f(\varphi)g(\tau)$ für die Wellengleichung (einer schwingenden, homogenen, kugelförmigen Erde)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u$$

und zeigen Sie, dass dies zu den folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen führt:

$$0 = \ddot{v} + \omega^2 v, \quad \omega \in \mathbb{R} \text{ konstant} \quad (1)$$

$$0 = r^2 w'' + 2rw' + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} r^2 - \lambda \right) w, \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant} \quad (2)$$

$$0 = f'' - \mu f, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ konstant} \quad (3)$$

$$0 = (1 - \tau^2) g'' - 2\tau g' + \left(\lambda + \frac{\mu}{1 - \tau^2} \right) g \quad (4)$$

Aufgabe 39: (4 Punkte)

Lösen Sie (1) und (3).

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Lösen Sie (2) (für $\lambda > -\frac{1}{4}$) mit dem Ansatz

$$w(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} h\left(\frac{\omega}{\alpha} r\right).$$