Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
Bianca Kretz, M.Sc.

13. Juli 2021

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2021
Blatt 11

Abgabe bis **Dienstag, den 20. Juli 2021, 12 Uhr** per E-Mail.

Aufgabe 41: (4 Punkte)

Ein durch $x \in [0, l]$ definierter, hinreichend dünner Stab mit Temperaturverteilung $\vartheta(x, t)$ werde am Ende $x = 0$ auf der konstanten Temperatur 0 (in irgendeiner Einheit) gehalten. Am anderen Ende wird jedoch eine Wärmeabgabe an ein umgebendes Medium der Temperatur 0 zugelassen, wobei hier das Gesetz

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(l, t) + \sigma \vartheta(l, t) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

gilt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ habe der Stab die Temperaturverteilung $x \mapsto f(x)$. Ferner gilt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Hierbei sind $\sigma \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Konstanten.

a) Zeigen Sie, dass der Separationsansatz $\vartheta(x, t) = u(x)v(t)$ zu einem so genannten Sturm-Liouville'schen Eigenwertproblem

$$u'' + \lambda u = 0,\ u(0) = 0,\ \sigma u(l) + u'(l) = 0,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ konstant, führt.

b) Zeigen Sie, zunächst ohne die Lösung zu bestimmen, dass Lösungen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sein müssen (bzgl. des $\mathrm{L}^2[0, l]$-Skalarprodukts $\langle f, g \rangle := \int_0^l f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$) und dass alle Eigenwerte zu nicht-trivialen Lösungen positiv sind. (Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^l u_1(x)u_2(x)\,dx$ unter Verwendung partieller Integration.)

c) Lösen Sie das Sturm-Liouville-Problem und leiten Sie eine (bedauerlicherweise implizite) Gleichung für die Eigenwerte λ her.

Aufgabe 42: (2+2=4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = A e^{tA}.$$

b) Ist $u \in C^{(1)}([a,b], \mathbb{R}^n)$, so ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tA}u(t)\right) = e^{tA}u'(t) + Ae^{tA}u(t).$$

Aufgabe 43: (4 Punkte)

Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, so ist

$$B^{-1}e^{A}B = e^{B^{-1}AB}.$$

Aufgabe 44: (4 Punkte)

Lösen Sie $y' = Ay, y(0) = y_0$ für

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.