

Arbeitsmaterialien

(Bezeichnungen, Definitionen,
Sätze, Beispiele, Übungsaufgaben)

zur Vorlesung

Analysis I+II

im WS 1993/94 und SS 1994

FB Mathem., Univ. – GH – Siegen

zusammengestellt von

Prof. Dr. Hans-Jürgen Reinhardt

und

Dipl.-Math. Frank Seiffarth

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Abbildungen	1
1.1 Aussagen	1
1.2 Mengen	1
1.3 Funktionen, Abbildungen $(A, B \text{ Mengen})$	2
2 Natürliche und ganze Zahlen	5
2.1 Axiomatische Einführung	5
2.2 Der Wohlordnungssatz	6
2.3 Einfache Anzahlaussagen	7
2.4 Primzahlen	9
2.5 Ganze Zahlen	10
3 Der Körper der rationalen Zahlen	12
3.1 Körper	12
3.2 Der Körper der rationalen Zahlen	14
3.3 Angeordnete Körper	16
3.4 Der (Absolut-)Betrag $((\mathbb{K}, P) = \text{angeordneter Körper})$	19
4 Reelle Zahlen	20
4.1 Einführung	20
4.2 Der Körper der reellen Zahlen	22
4.3 Der Satz von Archimedes	23

4.4	Die Quadratwurzel	24
4.5	Permutationen und Binomialkoeffizienten	24
5	Der Körper der komplexen Zahlen	27
5.1	Einführung	27
5.2	Der Körper $\mathbb{C}$	27
5.3	Der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$	28
6	Zahlenfolgen	30
6.1	Folgen	30
6.2	Der Konvergenzbegriff	31
6.3	Rechenregeln	32
6.4	Konvergenzkriterien	34
6.5	Wurzelberechnung	35
6.6	Häufungswerte	36
6.7	Anmerkungen zu komplexen Zahlenfolgen	38
7	Reihen	38
7.1	Konvergenz von Reihen	38
7.2	Konvergenzkriterien	39
7.3	Die Exponentialfunktion	42
7.4	Umordnung von Reihen, das Cauchy-Produkt	43
7.5	Die g -adische Entwicklung	45

8	Stetigkeit	46
8.1	Reelle Funktionen, Grenzwerte	46
8.2	Stetige Funktionen	49
8.3	Rechenregeln	50
9	Einige Sätze über stetige Funktionen	50
9.1	Der Zwischenwertsatz	50
9.2	Existenz von Extrema	52
9.3	Gleichmäßig stetige Funktionen	52
9.4	Bemerkungen zur Exponentialfunktion	53
9.5	Die Logarithmusfunktion	55
10	Differenzierbarkeit	57
10.1	Motivation und Definition	57
10.2	Rechenregeln	59
10.3	Zur Exponentialfunktion	61
10.4	Zum Newton-Verfahren	62
11	Einige Sätze über differenzierbare Funktionen	62
11.1	Charakterisierung von Extrema	62
11.2	Der Satz von Rolle, Mittelwertsatz	63
11.3	Taylorsche Formel	65
11.4	Anmerkung zu lokalen Extrema	67
11.5	Die Regel von de l'Hospital	68

11.6 Die trigonometrischen Funktionen	69
12 Das Riemann–Integral	72
12.1 Treppenfunktionen	72
12.2 Das Integral von Treppenfunktionen	73
12.3 Ober– und Unterintegrale	74
12.4 Riemann–Integrierbarkeit	76
12.5 Eine Auswahl integrierbarer Funktionen	78
12.6 Weitere Aussagen über Integrale	78
13 Integration und Differentiation	79
13.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung	79
13.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	81
13.3 Substitutionsregel	83
13.4 Partielle Integration	84
13.5 Das Taylorsche Restglied in Integralform	84
13.6 Integrationsrezepte	84
14 Reihen von Funktionen	87
14.1 Gleichmäßige Konvergenz	87
14.2 Gleichmäßige Konvergenz von Reihen	88
14.3 Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit von Funktionenreihen	90
14.4 Potenzreihen	91

15 Metrische und topologische Räume	95
15.1 Metrische Räume	95
15.2 Topologie	96
15.3 Stetige Abbildungen	99
15.4 Abgeschlossene Mengen	101
15.5 Kompakte Mengen	102
16 Vollständige metrische Räume, Banachräume	103
16.1 Vollständige metrische Räume	103
16.2 Der Raum der beschränkten und stetigen Abbildungen	104
16.3 Normierte Räume; Banachräume	106
16.4 Gleichmäßige Konvergenz	107
17 Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$	108
17.1 Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum	108
17.2 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum	111
17.3 Kurven in $\mathbb{R}^n$	112
17.4 Differenzierbare Wege	119
18 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$	122
18.1 Hinführung	122
18.2 Partielle Ableitungen	124
18.3 Vollständige Differenzierbarkeit	127
18.4 Differentiationsregeln	131

18.5 Die Richtungsableitung	133
18.6 Mittelwertsätze und Hauptsatz	134
18.7 Der Taylorsche Satz und die Taylorformel	138
19 Der Satz über implizite Funktionen	141
19.1 Der Kontraktionssatz	141
19.2 Der Satz über die inverse Abbildung	145
19.3 Der Satz über implizite Funktionen	148
19.4 Maxima und Minima	151
19.5 Lagrangesche Multiplikatorenregel	154
A Grundlagen der Aussagenlogik	161
A.1 Bezeichnungen	161
A.2 Verknüpfungszeichen, Verknüpfungen	161
A.3 Gesetze der Aussagenlogik	163
B Übungen und Musterlösungen zu Analysis I	165
C Übungen und Musterlösungen zu Analysis II	248
Index	321

Literatur

Blatter, C. *Analysis 1, 2, 3.* Heidelberger Taschenbücher, 1975.

Endl, K. *Analysis I, II, III.* Akademische Verlagsanstalt, 1974.

Erwe, F. *Differential- und Integralrechnung I, II.* B. I. Mannheim, 1962.

Forster, O. *Analysis 1, 2.* Vieweg, 1976, 1977.

Grauert, H., Lieb, I. *Differential- und Integralrechnung I.* Heidelberger Taschenbücher
Bd 26, Springer, 1973.

Grauert, H., Fischer, W. *Differential- und Integralrechnung II.* Heidelberger Taschenbücher
Bd 36, Springer, 1973.

Harbarth, K., Riedrich, T., Schirotzek, W. *Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen.* Teubner, 1993.

Heuser, H. *Lehrbuch der Analysis 1, 2.* Teubner, 1993.

Kerner, H. *Einführung in die Analysis I, II.* Darmstadt, 1979, 1980.

Körber, K.-H., Pforr, E.-A. *Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen.*
Teubner, 1993.

Kreul, M., Kreul, H. *Differentialrechnung.* Fachbuchverlag Leipzig, 1991.

Kreul, M., Kreul, H. *Integralrechnung.* Fachbuchverlag Leipzig, 1991.

Kreul, M., Kreul, H. *Funktionen und Kurven.* Verlag Harri Deutsch, 1989.

Landau, E. *Grundlagen der Analysis.* Wiss. Buchges., Darmstadt, 1970.

Pforr, E.-A., Schirotzek, W. *Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen.* Teubner, 1993.

Rudin, W. *Analysis.* Physik Verlag, 1980.

Salas, S. L., Hille, E. *Calculus. Einführung in die Differential- und Integralrechnung.*
Spektrum, 1994.

Schäfer, W, Georgi, K. *Mathematik-Vorkurs.* Teubner, 1994.

Walter, W. *Analysis 1, 2.* Springer, 1992.

Wenzel, H., Heinrich, G. *Übungsaufgaben zur Analysis 1, 2.* Teubner, 1990.

1 Mengen und Abbildungen

1.1 Aussagen

Bezeichnungen

Junktor	Sprechweise	Symbol
Negation	... nicht ...	$\neg$
Konjunktion	... und ...	$\wedge$
Alternative	... oder ...	$\vee$
Implikation	... wenn, dann ...	$\implies$
Äquivalenz	... genau dann, wenn ...	$\iff$

Akkürzungen: $:=$, $=:$, $:\iff$, $\iff$:

Indirektes Beweisverfahren

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

1.2 Mengen

Definitionen:

Teilmenge: $A \subset B :\iff (x \in A \implies x \in B)$

Gleichheit: $A = B :\iff A \subset B, B \subset A$

Vereinigung: $A \cup B := \{x \in C \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

Durchschnitt: $A \cap B := \{x \in C \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

Komplement: $A \setminus B := \{x \in C \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$

Rechenregeln (A, B, C Mengen)

(R1) $A \subset B, B \subset C \implies A \subset C$ (Transitivität von „ $\subset$ “)

(R2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (Assoziativgesetze)

(R3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

$$(R4) \quad A \cup B = B \cup A \quad (\text{Kommutativgesetze})$$

$$(R5) \quad A \cap B = B \cap A$$

$$(R6) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{Distributivgesetze})$$

$$(R7) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Definition: *Potenzmenge* $P(A)$
 = Menge aller Teilmengen von A
 einschließlich der leeren Menge $\emptyset$

Definitionen: $(A, B \text{ Mengen})$
 (geordnetes) Paar: (a, b) mit $a \in A, b \in B$;
 $(a, b) = (a', b')$ wenn $a = a'$ und $b = b'$;
 Cartesisches Produkt $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Rechenregeln

$$(R8) \quad A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C, \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Beispiele von Mengen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{natürliche Zahlen}$$

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots\} \quad \text{ganze Zahlen}$$

$$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad \text{rationale Zahlen}$$

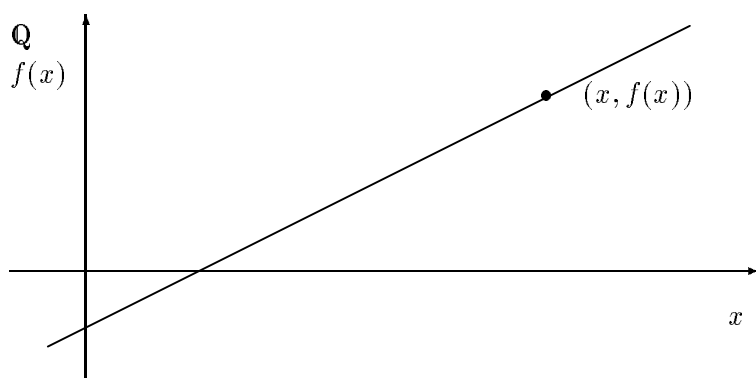
1.3 Funktionen, Abbildungen $(A, B \text{ Mengen})$

$$f : A \longrightarrow B, \quad A = \text{Definitionsbereich}, \quad B = \text{Bildbereich}$$

Bezeichnung: $f : A \ni x \mapsto f(x) \in B$

Definition: *Graph* von f

$$\text{graph } f := \{(a, b) | a \in A, b = f(a)\}$$



Beispiel: $A := B := \mathbb{Q}$, $f : A \ni x \mapsto \frac{1}{2}x - 1 \in B$

Satz 1 Seien A, B Mengen, $G \subset A \times B$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) Es gibt eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $\text{graph } f = G$.
- b) Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.

Definitionen: $(f : A \longrightarrow B, \quad X \subset A, \quad Y \subset B)$

Bild von X unter Abb. $f : f(X) := \{f(x) | x \in X\}$

Urbild von Y unter Abb. $f : f^{-1}(Y) := \{x \in A | f(x) \in Y\}$

Rechenregeln $(f : A \longrightarrow B, \quad X_1, X_2 \subset A, \quad Y_1, Y_2 \subset B)$

$$(R1) \quad X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$$

$$(R2) \quad f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$

$$(R3) \quad f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$$

$$(R4) \quad Y_1 \subset Y_2 \implies f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$$

$$(R5) \quad f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$$

$$(R6) \quad f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2), \quad \text{falls } Y_2 \subset Y_1.$$

Bezeichnungen: *Quantoren*

Notation	Sprechweise
$\forall a \in A$	„für alle Elemente a in A “
$\exists a \in A$	„es existiert $a \in A$ “
$\exists! a \in A$	„es existiert genau ein $a \in A$ “
$\forall a \in A(P)$	„für alle $a \in A$ ist P wahr“
$\forall a \in A(P)$	„für alle Elemente $a \in A$ gilt Aussage P “
$\forall a \in A : P$	„für alle Elemente $a \in A$ gilt Aussage P “

Bem.: Unter Benutzung von Quantoren lassen sich die äquivalenten Bedingungen des letzten Satzes wie folgt formulieren:

$$\text{a) } \exists f : A \longrightarrow B : \text{graph } f = G$$

$$\text{b) } \forall a \in A \exists! b \in B : (a, b) \in G$$

Die letzte Bedingung b) — und damit auch a) — sagt, daß eine Abbildung immer *wohldefiniert* (oder *wohlbestimmt*) ist, was man noch äquivalent schreiben kann als

$$\forall a, a' \in A : a = a' \implies f(a) = f(a')$$

oder äquivalent als

$$\forall a, a' \in A : f(a) \neq f(a') \implies a \neq a' .$$

Definitionen: (A, B Mengen, $f : A \longrightarrow B$ Abb.)

$$f \text{ surjektiv} \quad :\iff \quad \forall b \in B \exists a \in A (b = f(a))$$

$$f \text{ injektiv} \quad :\iff \quad \forall a, a' \in A (a \neq a' \implies f(a) \neq f(a'))$$

$$f \text{ bijektiv} \quad :\iff \quad f \text{ injektiv und surjektiv}$$

identische Abbildung

$$id_A : A \ni x \mapsto x \in A$$

Hintereinander-Ausführung $g \circ f$ (A, B, C Mengen,

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow C)$$

$$A \ni x \mapsto g(f(x)) \in C$$

Rechenregeln

$$(R7) \quad id_B \circ f = f \circ id_A$$

$$(R8) \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad (\text{Assoziativgesetz})$$

Satz 2 Sei $f : A \longrightarrow B$ Abbildung. Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$f \text{ injektiv} \iff \exists g : B \longrightarrow A \ (g \circ f = id_A)$$

$$f \text{ surjektiv} \iff \exists g : B \longrightarrow A \ (f \circ g = id_B)$$

$$f \text{ bijektiv} \iff \exists g : B \longrightarrow A \\ (g \circ f = id_A \quad \text{und} \quad f \circ g = id_B)$$

Definition: $(f : A \longrightarrow B \text{ bijektiv})$

$$\text{Umkehrabbildung} \quad f^{-1} : f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

2 Natürliche und ganze Zahlen

2.1 Axiomatische Einführung

Peano-Axiome $(\mathbb{N}, \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ Nachfolgeabbildung}, 1 \in \mathbb{N})$

- (P1) σ ist injektiv
 (P2) $1 \notin \sigma(\mathbb{N})$
 (P3) Für $M \subset \mathbb{N}$ mit
 a) $1 \in M$, b) $n \in M \implies \sigma(n) \in M$
 folgt: $M = \mathbb{N}$

Prinzip der vollständigen Induktion:

Eine Eigenschaft oder Aussage $E(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, wenn

- a) $E(1)$ richtig ist („Induktionsverankerung“)
 b) $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt: $E(k) \implies E(\sigma(k))$

($E(k)$ heißt „Induktionsvoraussetzung“, $E(\sigma(k))$ „Induktionsbehauptung“)

Für *Addition* $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ und

Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gilt (definitionsgemäß):

- a) $\forall x \in \mathbb{N} : x + 1 = \sigma(x)$, $x \cdot 1 = x$
 b) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + \sigma(y) = \sigma(x + y)$, $x \cdot \sigma(y) = x \cdot y + x$

Rechenregeln

- (R1) $(m + n) + k = m + (n + k)$, $(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$
 (R2) $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$
 (R3) $m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k$
 (R4) $m + n = m + k \implies n = k$, $m \cdot n = m \cdot k \implies n = k$
 („Kürzungsregel“)

2.2 Der Wohlordnungssatz

Definitionen: $(m, n \in \mathbb{N})$

$$m < n : \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : n = m + x$$

$$m \leq n : \Longleftrightarrow m < n \quad \text{oder} \quad m = n$$

$$n > m : \Longleftrightarrow m < n$$

$$n \geq m : \Longleftrightarrow m \leq n$$

Satz 1 Für je zwei $m, n \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der folgenden Relationen:

$$m < n, \quad m = n, \quad m > n.$$

Rechenregeln

$$(R1) \quad k < m \wedge m < n \implies k < n$$

$$(R2) \quad m < n \implies m + k < n + k, \quad km < kn$$

$$(R3) \quad k \cdot m = k \cdot n \implies m = n$$

$$(R4) \quad k < m \implies \sigma(k) \leq m$$

Satz 2 $\mathbb{N}$ ist „wohlgeordnet“, d. h.

$$\forall V \subset \mathbb{N} \quad \exists k \in V \quad \forall x \in V : x \geq k.$$

2.3 Einfache Anzahlaussagen

Bezeichnung: $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$

Definitionen: ($A \neq \emptyset$ Menge)

a) A hat n Elemente, genau wenn es eine Bijektion $f : A \longrightarrow \mathbb{N}_n$ gibt. Wir schreiben:

$$\text{card } A = n \quad \text{oder} \quad \#A = n.$$

b) A heißt *unendliche Menge*, genau wenn es für kein $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $f : A \longrightarrow \mathbb{N}_n$ gibt. Wir schreiben: $\#A = \infty$.

c) A heißt *abzählbar unendlich*, genau wenn es eine Bijektion $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt.

Beispiele:

- 1) $\# \mathbb{N}_n = n$
- 2) $\mathbb{G} := \{m \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : m = 2k\}$ gerade Zahlen
 $\mathbb{G}$ ist abzählbar unendlich;
 Bijektion $f : \mathbb{G} \ni 2k \mapsto k \in \mathbb{N}$
- 3) $A := \{a, b, c\}, \quad B := \{d, e\}, \quad F = \{f \mid f : A \longrightarrow B \text{ Abb.}\}$
 $\#F = 8$

Lemma 3 $(M, N \text{ endliche Mengen}).$ Es gelten die folgenden Aussagen:

- 1) $\exists \text{ Bijektion } g : M \longrightarrow N \implies \#M = \#N$
- 2) $M \cap N = \emptyset \implies \#(M \cup N) = \#M + \#N$
- 3) $\#(M \times N) = \#M \cdot \#N$

Bezeichnung: $p^1 := p, \quad p^{n+1} := p \cdot p^n$

Satz 4 Sei M endliche Menge, $\#M =: m$. Dann gilt für die Potenzmenge

$$\#P(M) = 2^m.$$

Definition: $(M \text{ endliche Menge}).$ Jede bijektive Abb. $f : M \longrightarrow M$ heißt *Permutation*.

Die Menge

$$S_M := \{f : M \longrightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

heißt *symmetrische Gruppe von M*.

Satz 5 Seien M, N endliche Mengen, $m := \#M, n := \#N$, und $m \leq n$. Dann gibt es genau

$$n \cdot (n-1) \cdot \cdots (n+1-m)$$

injektive Abbildungen $f : M \longrightarrow N$.

Bezeichnung: $(k, l \in \mathbb{N}, k > l)$

$$p := k - l : \Longleftrightarrow p + l = k$$

Definition: n -Fakultät $n!$

$$1! := 1, \quad (n+1)! := (n+1) \cdot n!$$

Folgerung 6 $(m := \#N) \quad \#S_M = m!$

2.4 Primzahlen

Definition: m teilt n ($m|n$), genau wenn $\exists k \in \mathbb{N} : m \cdot k = n$

Rechenregeln $(m, n, k \in \mathbb{N})$

$$(R1) \quad m|n \implies m \leq n$$

$$(R2) \quad m|n, n|k \implies m|k$$

$$(R3) \quad m|n, m|k \implies m|(in + jk) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

Definition: $p \in \mathbb{N}$ Primzahl, falls

$$p \neq 1 \quad \text{und} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{gilt die Aussage: } m|p \implies m = 1.$$

Falls $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ keine Primzahl, dann heißt q *zusammengesetzte Zahl*.

Satz 7 a) Jede Zahl $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, ist entweder Primzahl oder ein Produkt von Primzahlen („Faktorisierung in Primzahlen“)

b) Die Faktorisierung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Satz 8 Die Menge der Primzahlen ist nicht endlich.

Bemerkung: $p_n < 2^{2^n}$, wobei $p_n = n$ -te Primzahl.

2.5 Ganze Zahlen

Bemerkung: Auf der Grundlage der Peano-Axiome werden die ganzen Zahlen eingeführt. Es ist daher **nicht** möglich, die ganzen Zahlen durch $\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ oder } (-x) \in \mathbb{N}\}$ zu erklären, da an dieser Stelle $-x$ noch nicht definiert ist.

Definition: ($M \neq \emptyset$ Menge): Eine Menge $R \subset M \times M$ heißt *Äquivalenzrelation* auf M , genau wenn

- (1) $\forall x \in M : (x, x) \in R$ („Reflexivität“)
- (2) $\forall x, y \in M : (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$ („Symmetrie“)
- (3) $\forall x, y, z \in M : (x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$ („Transitivität“)

Beispiel: M, N Mengen, $f : M \longrightarrow N$ Abbildung,
 $R := \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}$ ist Äquivalenzrelation.

Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
 x \sim y &: \iff (x, y) \in R \\
 x^\sim &:= \{y \in M \mid y \sim x\} = \text{Äquivalenzklasse von } x \\
 M/R &:= M/\sim := \{x^\sim \mid x \in M\}
 \end{aligned}$$

Lemma 9 Sei R Äquivalenzrelation auf M . Dann gelten die Aussagen:

- a) Für jedes $x \in M$ gibt es $y^\sim$ mit $x \in y^\sim$.
- b) Zwei Äquivalenzklassen besitzen genau dann nichtleeren Durchschnitt, wenn sie gleich sind.

Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ läßt sich folgende Äquivalenzrelation einführen.

$$\hat{R} := \{((m, n), (k, l)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid m + l = n + k\}.$$

Definition: $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N} /_{\hat{R}}$ heißt Menge der ganzen Zahlen.

Bemerkung: Die Differenz der Zahlen m, n ist entscheidend für die Zuordnung der Äquivalenzklasse $(m, n)^\sim$ zu den bekannten ganzen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 & \text{ entspricht } (n, n)^\sim = \{(k, l) | n + l = n + k, \text{ d. h. } l = k\} \\ 1 & \text{ entspricht } (n + 1, n)^\sim = \{(k, l) | n + 1 + l = n + k, \text{ d. h. } k = l + 1\} \\ -1 & \text{ entspricht } (n, n + 1)^\sim = \{(k, l) | n + l = n + 1 + k, \text{ d. h. } l = k + 1\} \end{aligned}$$

Definitionen: $(m, n, k, l \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} \text{Addition : } & (m, n)^\sim + (k, l)^\sim := (m + k, n + l)^\sim \\ \text{Multiplikation : } & (m, n)^\sim \cdot (k, l)^\sim := (m \cdot k + n \cdot l, m \cdot l + n \cdot k)^\sim \\ \text{Anordnung : } & (m, n)^\sim < (k, l)^\sim : \Longleftrightarrow m + l < n + k \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Definitionen sind unabhängig vom Repräsentanten der Äquivalenzklasse.

Notation:

$$\mathbb{Z} = \{x | x = (m, n)^\sim, \quad m, n \in \mathbb{N}\}$$

Satz 10 In $\mathbb{Z}$ gelten die folgenden Gesetze:

$$\begin{aligned} (R1) \quad & (x + y) + z = x + (y + z) && (\text{„Assoziativgesetz“}) \\ & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ (R2) \quad & x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x && (\text{„Kommutativgesetz“}) \\ (R3) \quad & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z && (\text{„Distributivgesetz“}) \\ (R4) \quad & \text{Es gilt genau eine der folgenden Relationen:} \\ & x < y, \quad x = y, \quad x > y && (\text{„Trichotomiegesetz“}) \\ (R5) \quad & \forall x, y \in \mathbb{Z} \exists! z \in \mathbb{Z} : x + z = y \\ (R6) \quad & \underline{0} := (1, 1)^\sim \text{ ist neutrales Element der Addition,} \\ & \text{d. h. } \underline{0} + x = x \quad \forall x \in \mathbb{Z} \\ (R7) \quad & \underline{1} := (2, 1)^\sim \text{ ist neutrales Element der Multiplikation,} \\ & \text{d. h. } \underline{1} \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{Z} . \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. Aus (R5) folgt die Existenz eines *Negativen* von x oder *additiv inversen Elements* $(-x) \in \mathbb{Z}$, d. h. $\forall x \in \mathbb{Z} \exists (-x) \in \mathbb{Z} : x + (-x) = \underline{0}$.
2. Die Gesetze (R1) bis (R7) — ohne (R4) — definieren einen *kommutativen Ring*.

Die Anordnung in $\mathbb{Z}$ sichert, neben (R4), die folgenden **Rechenregeln** (R8) bis (R10):

$$(R8) \quad x < y, y < z \implies x < z$$

$$(R9) \quad x < y \implies x + z < y + z$$

$$(R10) \quad x < y, z > \underline{0} \implies x \cdot z < y \cdot z$$

Es gilt noch

$$(R11) \quad x \cdot y = \underline{0} \implies (x = \underline{0} \text{ oder } y = \underline{0})$$

Die natürlichen Zahlen lassen sich in $\mathbb{Z}$ mit den Äquivalenzklassen $(n+1, 1)^\sim$ identifizieren, da die Abbildung

$$\iota : \mathbb{N} \ni n \mapsto (n+1, 1)^\sim \in \mathbb{Z}$$

injektiv ist. Die *negativen Zahlen* $-n$ lassen sich durch $(1, n+1)^\sim$ definieren.

Definitionen:

$$x - y := x + (-y),$$

$$x \cdot (-y) := -(x \cdot y), \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

3 Der Körper der rationalen Zahlen

3.1 Körper

Definition: Eine Menge $\mathbb{K}$ heißt ein *Körper*, wenn es zwei Abbildungen

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{K} \quad (\textit{Addition})$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (a, b) \mapsto a \cdot b \in \mathbb{K} \quad (\textit{Multiplikation})$$

gibt, so daß folgende Axiome erfüllt sind ($a, b, c \in \mathbb{K}$):

- (A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetze)
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- (A2) $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetze)
- (A3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)
- (A4) $\exists 0, 1 \in \mathbb{K}, 0 \neq 1 : a + 0 = a, a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$ (Existenz neutraler Elemente)
- (A5) $\forall a \in \mathbb{K} \exists b \in \mathbb{K} : a + b = 0$
 $\forall a \in \mathbb{K}^* \exists b \in \mathbb{K} : a \cdot b = 1$
wobei $\mathbb{K}^* := \{k \in \mathbb{K} \mid k \neq 0\}$ (Existenz inverser Elemente)

Folgerung 1

- (a) Das „Negative“ von $a \in \mathbb{K}$, d. h. eine Lösung von $a + b = 0$, ist eindeutig bestimmt ($b =: -a$).
- (b) Das „Inverse“ von $a \in \mathbb{K}^*$, d. h. eine Lösung von $a \cdot b = 1$, ist eindeutig bestimmt ($b =: a^{-1}$).

Satz 2 (a) Die Gleichung $a + x = b$ ($a, b \in \mathbb{K}$) hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}$, nämlich $x = -a + b$.

(b) Die Gleichung $a \cdot x = b$ ($a \in \mathbb{K}^*, b \in \mathbb{K}$) hat genau eine Lösung, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$.

Folgerung 3

- (a) Es gilt $-0 = 0, 1^{-1} = 1$.
- (b) Es gilt $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{K}$,
und $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{K}^*$.
- (c) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{K}$
- (d) $a \cdot b = 0 \implies (a = 0 \text{ oder } b = 0)$

Beispiel:

Sei p Primzahl, $R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = k \cdot p\}$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$; es gibt genau p zugehörige Äquivalenzklassen

$$0^\sim, 1^\sim, \dots, (p-1)^\sim.$$

Verknüpfungen $+, \cdot$ auf $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z} / \sim := \{0^\sim, 1^\sim, \dots, (p-1)^\sim\}$ sind erklärt durch

$$x^\sim + y^\sim := (x + y)^\sim, \quad x^\sim \cdot y^\sim := (x \cdot y)^\sim.$$

$\mathbb{Z}_p$ ist ein Körper mit Nullelement $0^\sim$ und Einselement $1^\sim$.

3.2 Der Körper der rationalen Zahlen

Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, mit $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$ ist Äquivalenzrelation durch

$$R := \{((m, n), (k, l)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \mid m \cdot l = n \cdot k\}$$

erklärt. Die Äquivalenzklassen $x := (m, n)^\sim$, $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, werden als *Brüche* geschrieben: $x = \frac{m}{n}$.

Bemerkung: O. E. (d. h. „ohne Einschränkung“, oder o. B. d. A. „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) läßt sich jede Klasse $x = (m, n)^\sim$ schreiben als $x = (k, l)^\sim$ mit $l > 0$.

Definitionen: $\underline{0} := \frac{0}{1}, \quad \underline{1} := \frac{1}{1}$

Definition:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &:= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R && \text{Menge der rationalen Zahlen} \\ x = \frac{a}{b} &\in \mathbb{Q} && \text{rationale Zahl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Addition:} \quad & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \\
\text{Multiplikation:} \quad & \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \\
\text{Anordnung:} \quad & \frac{a}{b} < \frac{c}{d} : \Longleftrightarrow a \cdot d < b \cdot c
\end{aligned}$$

(Beachte: O. E. $b > 0, d > 0$)

Satz 4 In $\mathbb{Q}$ gelten folgende Gesetze ($x, y, z \in \mathbb{Q}$):

- (Q1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativgesetze)
 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (Q2) $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativgesetze)
- (Q3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz)
- (Q4) Es gilt genau eine der folgenden Relationen:
 $x < y, x = y, x > y$ (Trichotomiegesetz)
- (Q5) $\forall x, y \in \mathbb{Q} \exists! z \in \mathbb{Q} : x + z = y$
- (Q6) $\underline{0} := \frac{0}{1}$ erfüllt: $\underline{0} + x = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$
(neutrales Element der Addition)
- (Q7) $\underline{1} := \frac{1}{1}$ erfüllt: $\underline{1} \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.
(neutrales Element der Multiplikation)
- (Q8) $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{\underline{0}\} \forall y \in \mathbb{Q} \exists! z \in \mathbb{Q} : x \cdot z = y$

Folgerung 5 $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.

Lemma 6 Die Abbildung

$$\iota : \mathbb{Z} \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$$

ist injektiv und hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b) \quad , \quad a, b \in \mathbb{Z} ;$
(b) $\iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b) \quad , \quad a, b \in \mathbb{Z} ;$
(c) $a < b \iff \iota(a) < \iota(b) \quad , \quad a, b \in \mathbb{Z} .$

Definitionen: x^{-1} : *Inverses* von $x \in \mathbb{Q}$ ($x \neq 0$)

$-x$: *Negatives* von $x \in \mathbb{Q}$

Bezeichnung: a statt $\frac{a}{1}$, 0 statt $\frac{0}{1}$, 1 statt $\frac{1}{1}$

3.3 Angeordnete Körper

Definition: Sei $\mathbb{K}$ = Körper, $P \subset \mathbb{K}$. Die Menge P heißt *Kegel positiver Elemente* (in $\mathbb{K}$), wenn gilt:

(a) Für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

(b) $x, y \in P \implies x \cdot y \in P$, $x + y \in P$.

$(\mathbb{K}, P)$ heißt dann *angeordneter Körper*.

Folgerung 7 $\mathbb{Q}$ wird zu einem angeordneten Körper, wenn der Kegel positiver Elemente erklärt wird durch:

$$x \in P : \iff x > 0 .$$

Definition: $((\mathbb{K}, P)$ angeordneter Körper)

$$x \underset{P}{>} y : \iff x - y \in P$$

Entsprechend: $x \underset{\bar{P}}{>} y$, $x \underset{P}{<} y$, $x \underset{\bar{P}}{\leq} y$

(Wir schreiben: $>$, $\geq$, $<$, $\leq$)

Rechenregeln ($x, y, z, w \in \mathbb{K}$)

$$(R1) \quad x < 0 \iff -x > 0$$

$$(R2) \quad x > y \iff x + a > y + a \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

$$(R3) \quad x > y, y \geq z \implies x > z$$

$$(R4) \quad x > y, z \geq w \implies x + z > y + w$$

$$(R5) \quad x > y; z > 0 \implies x \cdot z > y \cdot z$$

$$(R6) \quad x \neq 0 \implies x \cdot x > 0$$

$$(R7) \quad 1 > 0$$

$$(R8) \quad x > 0 \implies x^{-1} > 0$$

$$(R9) \quad x > y \implies y^{-1} > x^{-1} (x, y \neq 0)$$

Bemerkung: $P \neq \emptyset$, da $1 \in P$.

Definitionen:

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ heißt *Unterkörper von $\mathbb{K}$* , wenn $\mathbb{K}_1$ mit arithmetischen Operationen von $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

(b) Seien $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ Körper. Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$ heißt *Homomorphismus*, wenn gilt:

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{K}.$$

Lemma 8 Seien $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ Körper, $\varphi: \mathbb{K}_1 \longrightarrow \mathbb{K}_2$ Homomorphismus. Dann gilt:

$$(a) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(-x) = -\varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}_1.$$

(b) Gibt es ein $\bar{x} \in \mathbb{K}_1$ mit $\varphi(\bar{x}) \neq 0$, so gilt

$$\varphi(1) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \quad \forall x \in \mathbb{K}_1^*;$$

ferner ist φ dann injektiv.

Definition: Sei $\mathbb{K}$ = Körper; $n \cdot x$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{K}$, wird erklärt durch (induktiv):

$$1 \cdot x := x, \quad (n+1) \cdot x := x + n \cdot x.$$

Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $a \cdot x$ erklärt durch $a \cdot x = 0$, falls $a = 0$; $a \cdot x = n \cdot x$, falls $n = a > 0$; $a \cdot x = -(-a) \cdot x$, falls $a < 0$.

Satz 9 Sei $(\mathbb{K}, P)$ angeordneter Körper. Dann gibt es einen Unterkörper $\mathbb{K}_1$ von $\mathbb{K}$ und einen Homomorphismus $\tau : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{K}_1$ mit

(a) τ ist bijektiv; (b) $\tau(x) \in P$, falls $x > 0$.

Der bijektive Homomorphismus in Satz 9 ist erklärt durch

$$\tau : \mathbb{Q} \ni \frac{a}{b} \mapsto (a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)^{-1} \in \mathbb{K} .$$

Bemerkung: Man kann einfach n statt $n \cdot 1$ schreiben. Nach Satz 9 kann $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{K}$ aufgefaßt werden.

Definition: Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, P)$ heißt *archimedisch angeordnet*, wenn gilt:

$$(R10) \quad \forall x \in \mathbb{K} \quad \forall y \in P \quad \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot y > x .$$

Die Aussage (R10) ist äquivalent zur folgenden, zunächst als schwächer erscheinende Aussage:

$$(R10') \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot m > k .$$

Mit Hilfe dieser Äquivalenz beweist man

Folgerung 10 $\mathbb{Q}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper.

Der folgende Satz läßt sich dahingehend interpretieren, daß es zwischen zwei voneinander verschiedenen Elementen eines archimedisch angeordneten Körpers immer eine rationale Zahl gibt.

Satz 11 Seien $(\mathbb{K}, P)$ angeordneter Körper, $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x < y$. Dann existieren $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x < (m \cdot 1)(n \cdot 1)^{-1} < y .$$

3.4 Der (Absolut-)Betrag $((\mathbb{K}, P) = \text{angeordneter Körper})$

Definition: $|x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 ; \\ -x & , \text{ falls } x < 0 . \end{cases}$

Rechenregeln

$$(R1) \quad |x| \geq 0, |x| \geq x, |x| \geq -x .$$

$$(R1) \quad |x| = 0 \iff x = 0 .$$

$$(R3) \quad |x| \leq y \iff -x \leq y, x \leq y .$$

$$(R4) \quad |-x| = |x| .$$

$$(R5) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| .$$

$$(R6) \quad |x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}, \quad \text{falls } y \neq 0 .$$

Satz 12 Für die „Betragsfunktion“ $\mathbb{K} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(a) \quad |x| = 0 \iff x = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(b) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{K} \quad (\text{Homogenität})$$

$$(c) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{K} \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Folgerung 13 $||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{K}$

Definitionen: Intervalle in $(\mathbb{K}, P)$. Seien $x, y \in \mathbb{K}, x \leq y$,

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{K} \mid x \leq z, z \leq y\}$$

abgeschlossenes Intervall mit Grenzen x, y ;

$$(x, y) := \{z \in \mathbb{K} \mid x < z, z < y\}$$

offenes Intervall mit Grenzen x, y ;

$$[x, y) := \{z \in \mathbb{K} \mid x \leq z, z < y\} ,$$

$$(x, y] := \{z \in \mathbb{K} \mid x < z, z \leq y\}$$

halboffene Intervalle.

Beispiel: $\mathbb{F} = \{0, e\}$ mit

Addition	und	Multiplikation
$ \begin{array}{c cc} + & 0 & e \\ \hline 0 & 0 & e \\ e & e & 0 \end{array} $		$ \begin{array}{c cc} \cdot & 0 & e \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & e \end{array} $

ist Körper mit $0 := 0$, $1 := e$, kann aber **nicht** zu einem angeordneten Körper gemacht werden (wegen $e + e = 0$).

4 Reelle Zahlen

4.1 Einführung

In dem Körper der rationalen Zahlen ist das „Approximationsprinzip der Analysis“ nicht durchzuhalten, d. h. komplizierte Objekte können nicht durch Annäherung mit Hilfe von einfachen Objekten erhalten werden.

Satz 1 *Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$.*

Beispiel: Für die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \quad \text{bzw.} \quad B := \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 > 2\}$$

gibt es keine größte bzw. kleinste Zahl in $\mathbb{Q}$.

Man weiß aber, daß zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine weitere rationale Zahl liegt,

$$x < y \implies x < \frac{1}{2} \cdot (x + y) < y.$$

Definitionen: $((\mathbb{K}, P)$ angeordneter Körper, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{K}$)

(a) A heißt *nach oben beschränkt*

$$:\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : a \leq b ;$$

b heißt dann eine *obere Schranke* von A .

(b) A heißt *nach unten beschränkt*

$$:\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : b \leq a ;$$

b heißt dann eine *untere Schranke* von A .

(c) A heißt *beschränkt*

$$:\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{K} \quad \forall a \in A : -b \leq a \leq b ;$$

b heißt dann eine *Schranke* von A .

Beispiele: $(\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{K} \text{ ist angeordnet})$

(a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ist nach unten beschränkt; 1 ist untere Schranke.

(b) Endliche Teilmengen von $\mathbb{Q}$ sind beschränkt.

(c) $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ ist beschränkt (Schranke: 2).

Definitionen: $((\mathbb{K}, P)$ angeordneter Körper, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{K}$)

(a) $x \in \mathbb{K}$ heißt *obere Grenze (Supremum)* von A

$$\begin{aligned} :\Longleftrightarrow \quad & i) \quad x \text{ ist obere Schranke von } A ; \\ & ii) \quad \text{wenn } y \text{ obere Schranke von } A, \text{ dann gilt } x \leq y . \end{aligned}$$

(Wir schreiben dann: $x = \sup_{a \in A} a$ oder $x = \sup A$)

(b) $x \in \mathbb{K}$ heißt *untere Grenze (Infimum)* von A

- $:\Longleftrightarrow$ *i)* x ist untere Schranke von A ;
 ii) wenn y untere Schranke, dann gilt $y \leq x$.

(Wir schreiben dann: $x = \inf_{a \in A} a$ oder $x = \inf A$)

Folgerung 2 *Supremum und Infimum sind eindeutig bestimmt, falls sie existieren.*

4.2 Der Körper der reellen Zahlen

Definition: Der *Körper der reellen Zahlen* ist ein Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, in dem gilt:

- (A) $\mathbb{R}$ ist angeordnet durch eine Menge P ;
 (V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Bemerkungen:

1. (A) heißt *Anordnungsaxiom*, (V) heißt *Vollständigkeitsaxiom*.
2. Aus (V) folgt: Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.
3. Nach Folgerung 2 sind Supremum und Infimum eindeutig bestimmt.

Wir halten fest:

- (a) $0 \in \mathbb{R}$ Nullelement, $-a$ Negatives von $a \in \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$ Einselement,
 a^{-1} Inverses von $a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (b) Es ist definiert $x > y :\Longleftrightarrow x - y \in P$; damit auch $\geq, <, \leq$. Es gelten die Rechenregeln (R1) – (R9) aus 3.3.
- (c) Es sind induktiv definiert:

$$\begin{aligned} n \cdot x : \quad 1 \cdot x &:= x, \quad (n+1) \cdot x := x + n \cdot x, \\ x^n : \quad x^1 &:= x, \quad x^{n+1} := x \cdot x^n. \end{aligned}$$

(d) Die Abb. $\tau_0 : \mathbb{N} \ni n \mapsto n \cdot 1 \in \mathbb{R}$ ist injektiv, und es gelten:

$$\begin{aligned}\tau_0(m+n) &= \tau_0(m) + \tau_0(n) , \\ \tau_0(m \cdot n) &= \tau_0(m) \cdot \tau_0(n) , \\ m < n &\implies \tau_0(m) < \tau_0(n) .\end{aligned}$$

Also läßt sich $\mathbb{N}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ identifizieren.

(e) Die Abb. $\tau : \mathbb{Q} \ni \frac{a}{b} \mapsto (a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)^{-1} \in \mathbb{R}$ ist injektiv und ein Körper-Homomorphismus; also läßt sich $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen.

(f) Es ist induktiv definiert ($x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$):

$$x^0 := 1, \quad x^{-(n+1)} := x^{-1} \cdot x^{-n} .$$

(g) In $\mathbb{R}$ sind Intervalle erklärt:

$$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b] .$$

(h) Für die *Betragsfunktion* $|\cdot| : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$,

$$|x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 , \\ -x & , \text{ falls } x < 0 , \end{cases}$$

gelten die Rechenregeln (R1) – (R6) aus 3.4 und die Aussagen (a) – (c) aus Satz 3.12.

4.3 Der Satz von Archimedes

Satz 3 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$.

Bemerkung: $\mathbb{R}$ ist ein archimedisch angeordneter Körper.

Folgerung 4 $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < a$.

Folgerung 5 $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b.$

Folgerung 6 $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon.$

Lemma 7 (Charakterisierung eines Supremums) Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, A$ nach oben beschränkt, $x \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A . Dann sind äquivalent:

$$(a) \quad x = \sup_{a \in A} a,$$

$$(b) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : x - \varepsilon \leq a.$$

4.4 Die Quadratwurzel

Satz 8 $\forall b > 0 \exists! x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 = b.$

Bezeichnung: $x = b^{1/2}$ oder $x = \sqrt{b}.$

Bemerkung: Für $x := -\sqrt{b}$ gilt auch $x^2 = b.$

4.5 Permutationen und Binomialkoeffizienten

Definition: $0! := 1, \quad 1! := 1, \quad (N+1)! := (N+1) \cdot N!$

Frage: Wieviele Möglichkeiten gibt es, N Objekte auf r Plätze zu verteilen?

Antwort: $N \cdot (N-1) \cdots (N+1-r) = \frac{N!}{(N-r)!}$

Frage: Wieviele Teilmengen von $A, \#A = N$, mit $r (\leq N)$ Elementen können ausgewählt werden?

Antwort: in Satz 9.

Satz 9 Die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge von N Elementen Teilmengen mit r Elementen auszuwählen, ist gegeben durch

$$c_{N,r} := \frac{N!}{(N-r)! r!}$$

Definition: *Binomialkoeff.*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Folgerung 10

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1, & \binom{n}{1} &= n, & \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, \\ \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

Definitionen: $((\mathbb{K}, +, \cdot)$ Körper, $a_\nu \in \mathbb{K}$)

$$\text{Summe} \quad \sum_{\nu=1}^1 a_\nu := a_1, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu := \sum_{\nu=1}^n a_\nu + a_{n+1}$$

$$\text{Produkt} \quad \prod_{\nu=1}^1 a_\nu := a_1, \quad \prod_{\nu=1}^{n+1} a_\nu := \prod_{\nu=1}^n a_\nu \cdot a_{n+1}$$

Rechenregeln $(a_1, \dots, a_{m+n} \in \mathbb{K}, a \in \mathbb{K}, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K})$

$$(R1) \quad \sum_{\nu=1}^m a_\nu + \sum_{\nu=1}^n a_{m+\nu} = \sum_{\nu=1}^{m+n} a_\nu$$

$$(R2) \quad a \cdot \sum_{\nu=1}^n a_\nu = \sum_{\nu=1}^n a \cdot a_\nu$$

$$(R3) \quad \sum_{\nu=1}^m a_\nu + \sum_{\nu=1}^m b_\nu = \sum_{\nu=1}^m (a_\nu + b_\nu)$$

$$(R4) \quad \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu \right) \cdot \left(\sum_{\mu=1}^m b_\mu \right) = \sum_{\nu=1}^n \left(\sum_{\mu=1}^m a_\nu \cdot b_\mu \right) = \sum_{\mu=1}^m \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu \cdot b_\mu \right)$$

Für das Produkt $\prod$ gelten analoge Regeln:

$$(R5) \quad \prod_{\nu=1}^m a_\nu \cdot \prod_{\nu=1}^n a_{m+\nu} = \prod_{\nu=1}^{m+n} a_\nu;$$

$$(R6) \quad \prod_{\nu=1}^m a_\nu \cdot \prod_{\nu=1}^m b_\nu = \prod_{\nu=1}^m (a_\nu \cdot b_\nu);$$

$$(R7) \quad a \cdot \left(\prod_{\nu=1}^m a_\nu \right) = \prod_{\nu=1}^m (a^{1/m} \cdot a_\nu), \quad \text{falls } a > 0;$$

$$(R8) \quad \prod_{\nu=m+1}^n \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} = \frac{a_n}{a_m}, \quad \text{falls } m < n$$

(„Teleskopprodukt“);

$$(R9) \quad \sum_{\nu=m+1}^n (a_\nu - a_{\nu-1}) = a_n - a_m, \quad \text{falls } m < n$$

(„Teleskopsumme“).

Satz 11 (Binomischer Lehrsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beispiele:

1. Wähle zufällig 4mal aus den Ziffern $\{0, \dots, 9\}$ eine Ziffer aus. Wie groß ist die (Laplace-) Wahrscheinlichkeit, lauter verschiedene Ziffern zu erhalten?

Definition: Die (Laplace-)Wahrscheinlichkeit durch einen „Zufallsmechanismus“ aus einer endlichen Menge X ein Element einer Teilmenge B , $B \subset X$, auszuwählen, ist definiert durch

$$P_L(B) := \frac{\#B}{\#X}.$$

Im Beispiel: $A = \{0, \dots, 9\}$, $X = A \times A \times A \times A$,

$$B = \{(w, x, y, z) \in X \mid w, x, y, z \text{ paarweise verschieden}\}.$$

Es gilt $\#X = 10^4$, $\#B = 10!/(10-4)! = 5040$, also $P_L(B) = 0.504$.

2. (ATP-WM) 2 Gruppen mit je 4 (Tennis-)Spielern.

Frage: Wieviele Spiele müssen pro Gruppe gespielt werden, damit jeder einmal gegen jeden (seiner Gruppe) spielt?

Antwort: $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$

5 Der Körper der komplexen Zahlen

5.1 Einführung

Da der Körper der reellen Zahlen angeordnet ist, gibt es keine Lösung $a \in \mathbb{R}$ von $a^2 = -1$ (Quadrate müssen in angeordneten Körpern positiv sein!)

Die Lösbarkeit von $x^2 = -1$ ist äquivalent zu

$$x^2 + 1 = 0 .$$

Allgemein interessiert man sich für Nullstellen von *Polynomen vom Höchstgrad* $n \geq 2$,

$$\mathcal{P}_n := \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k , \quad x \in \mathbb{R} , \\ \text{mit } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{array} \right. \right\} .$$

Ziel: Erweiterung von $\mathbb{R}$ so, daß obige Gleichung lösbar ist; Rechnen mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$.

5.2 Der Körper $\mathbb{C}$

Definitionen: $(\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

Addition $+$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((x, y), (u, v)) \mapsto (x + u, y + v) \in \mathbb{R}^2$

Multiplikation $\cdot$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((x, y), (u, v)) \mapsto (xu - yv, xv + yu) \in \mathbb{R}^2$

Satz 1 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement $\underline{0} := (0, 0)$ und Einselement $\underline{1} := (1, 0)$.

Bemerkung: Das Inverse (u, v) von $(x, y) \neq (0, 0)$ ist gegeben durch

$$u := \frac{x}{x^2 + y^2} , \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Definition: $\mathbb{C} = \text{Körper } (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$;

$i := (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*

Folgerung 2

(a) $\mathbb{C}$ ist ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ mit Addition wie oben und skalarer Multiplikation $r \cdot (x, y) := (rx, ry)$. Basis: $\underline{1} = (1, 0)$, $i = (0, 1)$.

(b) $\mathbb{C}$ ist ein 1-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$. (Basis: $\underline{1} = (1, 0)$).

Schreibweise: $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$

Definitionen:

$x = \operatorname{Re}(z)$ Realteil von z

$y = \operatorname{Im}(z)$ Imaginärteil von z

Schreibweisen:

1 statt $(1, 0)$ bzw. $1 + i \cdot 0$,

0 statt $(0, 0)$ bzw. $0 + i \cdot 0$,

x statt $(x, 0)$ bzw. $x + i \cdot 0$,

ix statt $(0, x)$ bzw. $0 + ix$.

Folgerung 3 $\forall a \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{C}: z^2 + a = 0$.

5.3 Der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$

Definitionen:

(a) Zu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

(b) Die Abbildung

$$|\cdot| : \mathbb{C} \ni x + iy \mapsto (x^2 + y^2)^{1/2} \in \mathbb{R}$$

heißt der Absolutbetrag (Betragsfunktion) in $\mathbb{C}$.

Rechenregeln

$$(R1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\overline{z}} = z;$$

$$(R2) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{-i}{2}(z - \overline{z});$$

$$(R3) \quad |z| = |\overline{z}| = (z \cdot \overline{z})^{1/2};$$

$$(R4) \quad \operatorname{Re}(z) \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

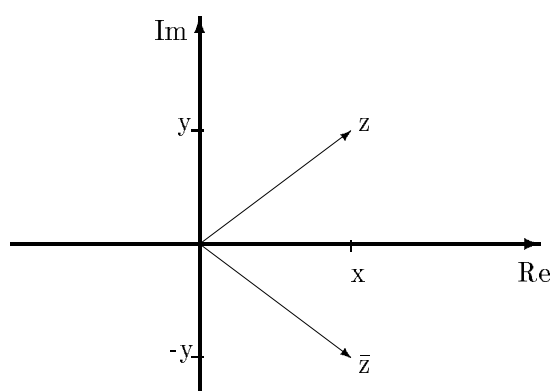
Folgerung 4 Für $|\cdot|$ gilt

$$(a) \quad |z| = 0 \iff z = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(b) \quad |zw| = |z| |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \quad (\text{Homogenität})$$

$$(c) \quad |z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Darstellung in komplexer Zahlenebene:



6 Zahlenfolgen

6.1 Folgen

Definition: Sei M nichtleere Menge. Eine *Folge in M* ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$.

Wir schreiben

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n := f(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Elemente a_n , $n \in \mathbb{N}$, heißen *Glieder* der Folge.

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $M := \mathbb{R}$ bzw. $M := \mathbb{C}$ heißt *reelle* bzw. *komplexe Zahlenfolge*.

Bis auf weiteres sei jede Folge eine reelle Zahlenfolge.

Beispiele:

1. $a_n := n^2$, $n \in \mathbb{N} : 1, 4, 9, 16, \dots$

2. $a_n := a$, $n \in \mathbb{N} : a, a, a, \dots$

konstante Folge

3. $a_n := (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N} : -1, 2, -3, 4, \dots$

4. $a_n := 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N} : 0, 2, 0, 2, \dots$

5. $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

6. $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{1 + a_n}$, $n \in \mathbb{N} : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$

7. $a_1 := a_2 := 1$, $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N} : 1, 1, 2, 3, 5, \dots$

Fibonacci-Zahlen

8. $a_n := \frac{1}{(n-1)(n-2)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2 : \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots$

Diese Folge beginnt erst ab einem $n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$

Definition: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*

$$:\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b .$$

6.2 Der Konvergenzbegriff

Definitionen: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon .$$

a heißt dann *Grenzwert* (oder *Limes*) von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir schreiben dann

$$a = \lim_n a_n \quad \text{oder} \quad a = \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \longrightarrow a (n \in \mathbb{N}) .$$

(b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Nullfolge*

$$:\Longleftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0 .$$

Folgerung 1 Jede Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

Bemerkung: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so kann man wegen Folgerung 1 sagen:

Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen nur endlich viele Glieder der Folge außerhalb von $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Oder: Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen fast alle a_n in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Folgerung 2 Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Definition: Ist eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, so sagen wir: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist *divergent*.

Beispiele:

1. $a_n := n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ist divergent, da nicht beschränkt.

2. $a_n := a$, $n \in \mathbb{N}$, ist konvergent gegen a .
3. $a_n := 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist divergent, da $|a_n - a_{n+1}| = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
4. $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist Nullfolge.
5. $a_n := a^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $|a| < 1$ ist Nullfolge.

6.3 Rechenregeln

Satz 3 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen, $a = \lim_n a_n$, $b = \lim_n b_n$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es gilt:

$$(a) \quad (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent, } ab = \lim_n (a_n b_n).$$

$$(b) \quad (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent, } a + b = \lim_n (a_n + b_n).$$

$$(c) \quad (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent, } \lambda a = \lim_n (\lambda a_n).$$

Bemerkung: Auch die Differenz konvergenter Folgen konvergiert.

Satz 4 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen, $a = \lim_n a_n$, $b = \lim_n b_n$. Sei $b \neq 0$.

Dann gilt:

$$(a) \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0 : b_n \neq 0;$$

$$(b) \quad (a_n b_n^{-1})_{n \geq N_0} \text{ ist konvergent und}$$

$$ab^{-1} = \lim_{n \geq N_0} a_n b_n^{-1}.$$

Beispiele:

1. Potenzsummen $\sum_{k=1}^n k^l$, $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ fest, sind divergent.

$$2. \ a_n := \frac{3n^2 + 1}{2n^2 - n + 1} \longrightarrow \frac{3}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$3. \ a_n := \binom{n}{k} n^{-k} \longrightarrow \frac{1}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}), \ k \in \mathbb{N}.$$

$$4. \ a_n := \prod_{i=n}^{2n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \longrightarrow 2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

$$5. \ a_n := n^k a^n, \quad n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{Z}, \ a \in (-1, 1) : \lim_n a_n = 0.$$

Satz 5 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen. Es gilt:

(a) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es gelte $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_n a_n \leq \lim_n b_n$.

(c) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $a := \lim_n a_n = \lim_n b_n$. Gilt für eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, daß $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq N_0$, dann konvergiert auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $a = \lim_n c_n$ („Sandwich-Theorem“).

Beispiel:

6. Fibonacci-Zahlen

$$F_1 := F_2 = 1, \quad F_{n+1} := F_n + F_{n+1}.$$

Man beweist induktiv, daß

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - (-\tau)^{-n}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad \tau := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Daraus folgt

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\tau} \frac{1 + (-\tau)^{-2n}(-1)^n}{1 - (-\tau)^{-2n}(-1)^n} \longrightarrow \frac{1}{\tau} = \tau - 1 \approx 0.618.$$

6.4 Konvergenzkriterien

Definitionen: Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- (a) *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- (b) *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- (c) *streng monoton wachsend*, falls $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- (d) *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiele:

1. $a_n := \binom{n}{k} n^{-k}$, $n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton wachsend für jedes $k \in \mathbb{N}$.
2. $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton wachsend.
3. (endliche geometrische Reihe). Für $q \neq 1$ sei $a_n := \sum_{k=0}^n q^k$. Man zeigt induktiv:

$$a_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Satz 6 Jede beschränkte, monoton wachsende (fallende) Folge ist konvergent.

Beispiel: $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend und beschränkt,

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 .$$

Damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und für den Limes gilt

$$2 \leq \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 .$$

Definition: $e := \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ heißt *Eulersche Zahl*.

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Folgerung 7 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und $(a_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Dann ist auch $(a_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_k a_{\mu_k} = \lim_n a_n .$$

Satz 8 (Satz von Bolzano–Weierstrass) Jede beschränkte Folge enthält eine konvergente Teilfolge.

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy–Folge*, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 9 Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann und nur dann konvergent, wenn sie *Cauchy–Folge* ist.

Bemerkungen:

1. Jede Cauchy–Folge ist beschränkt.
2. Das Vollständigkeitsaxiom (V) kann man ersetzen durch das Axiom: Jede Cauchy–Folge konvergiert.
3. Die Aussage von Satz 9 heißt auch das *Cauchysche* Konvergenzkriterium.

Beispiel: Betrachte die induktiv definierte Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{1 + a_n}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy–Folge.

6.5 Wurzelberechnung

Satz 10 Seien $b > 0$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Dann existiert genau ein $x > 0$ mit $x^q = b$ und für die induktiv definierte Folge

$$a_1 > 0 \quad \text{mit} \quad a_1^q \geq b, \quad a_{n+1} := \left(1 - \frac{1}{q}\right) a_n + \frac{1}{q} \frac{b}{a_n^{q-1}}$$

gilt: $x = \lim_n a_n$.

Schreibweise: $x = \sqrt[q]{b}$ oder $x = b^{1/q}$.

Bemerkung: Für $q = 2$ lautet die Vorschrift:

$$a_1^2 \geq b, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \frac{b}{a_n}.$$

6.6 Häufungswerte

Definition: $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungswert der Folge* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$:\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.

Bemerkung:

1. $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, genau wenn für jedes $\varepsilon > 0$ in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ unendlich viele Glieder a_n liegen.
2. Man beachte den Unterschied von 1. zu konvergenten Folgen (dort: „fast alle a_n in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ “).

Satz 11 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge und $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) a ist Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Es gibt eine konvergente Teilfolge $(a_{\mu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a = \lim_k a_{\mu_k}$.

Folgerung 12 Jede beschränkte Folge besitzt einen Häufungswert.

Folgerung 13 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge und $a := \lim_n a_n$. Dann ist a der einzige Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel:

1. $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, hat Häufungswerte 1 und -1.

2. $a_n := \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ ungerade} , \\ n & , \quad n \text{ gerade} . \end{cases}$

1 ist einziger Häufungswert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, aber die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Folgerung 14 Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, dann ist die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtleer und beschränkt.

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $H := \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ Häufungswert von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_n a_n &:= \limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{a \in H} a && \text{Limes superior} \\ \underline{\lim}_n a_n &:= \liminf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{a \in H} a && \text{Limes inferior} \end{aligned}$$

Bemerkung: Ein Häufungswert liegt genau dann vor, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder a_n in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

Folgerung 15 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folge. Dann sind $\overline{\lim}_n a_n$ und $\underline{\lim}_n a_n$ Häufungswerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Folgerung 16 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folge und H die Menge ihrer Häufungswerte. Dann sind für $a \in \mathbb{R}$ äquivalent:

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a .

(b) $H = \{a\}$.

(c) $a = \overline{\lim}_n a_n = \underline{\lim}_n a_n$.

6.7 Anmerkungen zu komplexen Zahlenfolgen

Konvergenz-Aussagen können analog auf komplexe Zahlenfolgen übertragen werden, wenn der Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt wird. Wegen

$$|z| = (\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2)^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

konvergiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$, genau wenn $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re}(z)$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Im}(z)$ konvergieren. Aussagen, die sich auf die Anordnung in $\mathbb{R}$ beziehen, sind in $\mathbb{C}$ nicht formulierbar.

7 Reihen

7.1 Konvergenz von Reihen

Wir nennen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine *Reihe* und

$$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad s_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

die Folge der zugehörigen *Partialsummen*.

Definition: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent* genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen konvergiert; $s = \lim_n s_n$ heißt *Summe* (oder *Wert*) der Reihe. Wir schreiben

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht konvergiert, dann heißt die Reihe *divergent*.

Beispiele:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, da die Folge der Partialsummen monoton wachsend und beschränkt ist.

2. *Geometrische Reihe*: Sei $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

$$s_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad \lim_n s_n = \frac{1}{1 - a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k.$$

Für $|a| \geq 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ divergent.

3. Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

Bemerkung:

1. Zu einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann man durch $b_1 := a_1$, $b_n := a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$, eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ so konstruieren, so daß $a_n = \sum_{k=1}^n b_k$.
2. Für den Grenzwert einer Reihe spielen endliche viele Glieder keine Rolle.
3. Analog zu Reihen können unendliche Produkte als Folgen von Partialsummen endlicher Produkte definiert werden.

Rechenregeln Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

$$(R1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k ;$$

$$(R2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

7.2 Konvergenzkriterien

Satz 1 (*Cauchysches Konvergenzkriterium*) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert};$$

$$(b) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N, n \geq m : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon .$$

Folgerung 2 Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Bemerkung: Die Umkehrung von Folgerung 2 gilt nicht!

Satz 3 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$, und es gilt

$$s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} ,$$

wobei

$$s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k , \quad s := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k .$$

Beispiel:

1. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konvergent.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Folgerung 4 Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

Satz 5 (Majoranten-Kriterium)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $|a_n| \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Beispiele:

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ ist (absolut) konvergent.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent.

Satz 6 (*Quotientenkriterium*)

Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gelte:

$$(a) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \neq 0 ;$$

$$(b) \exists q \in [0, 1) \forall n \geq N : |a_{n+1}| |a_n|^{-1} \leq q .$$

Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beispiele:

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ ist konvergent $\left(q = \frac{8}{9} \text{ für } n \geq 3 \right)$;

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent (s. Beispiel 1 in 7.1), das Quotientenkriterium ist hierfür jedoch nicht anwendbar.

Satz 7 (*Wurzelkriterium*) Gilt

$$\exists q \in [0, 1) \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n| \leq q^n ,$$

dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Man hat folgende Fehlerabschätzungen für den Fehler

$$r_N := s - s_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k$$

der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Leibniz-Kriterium: $b_n = (-1)^n a_n$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolge,

$$|r_N| \leq |b_{N+1}| \leq a_{N+1} ;$$

Quotienten-Kriterium: $|b_{n+1}| |b_n|^{-1} \leq q \quad \forall n \geq 1, q \in [0, 1),$

$$|r_N| \leq |b_{N+1}| \cdot \frac{1}{1-q};$$

Wurzel-Kriterium: $|b_n| \leq q^n, n \geq 1, q \in [0, 1),$

$$|r_N| \leq q^{N+1} \frac{1}{1-q}.$$

Bemerkung: Diese (a-priori) Abschätzungen können benutzt werden, um die Anzahl der zu berechnenden Summanden zu bestimmen, mit der eine gewünschte Genauigkeit (sicher) erreicht wird.

Beispiele:

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ ist konvergent (nach Leibniz-Kriterium).

Die Genauigkeitsforderung $|r_N| \leq \varepsilon$ mit $\varepsilon = 10^{-5}$ ist erfüllt, wenn

$$|r_N| \leq \frac{1}{\sqrt{N+1}} \leq \varepsilon, \quad \text{d. h. } N > 10^{10}.$$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ ist konvergent (nach dem Quotientenkriterium, $q = \frac{8}{9}$); Fehlerabschätzung:

$$|r_N| \leq \frac{(N+1)^2}{2^{N+1}} \cdot 9.$$

7.3 Die Exponentialfunktion

Satz 8 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k$ absolut konvergent.

Definition: Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \ni a \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, & \text{falls } a \neq 0. \end{cases}$$

Folgerung 9

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1) .$$

Folgerung 10

$$\left| \exp(a) - \sum_{k=0}^N \frac{a^k}{k!} \right| \leq \frac{2|a|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für } |a| \leq \frac{N+1}{2} .$$

7.4 Umordnung von Reihen, das Cauchy-Produkt

Beispiel: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent (nach dem Leibniz-Kriterium), aber die folgende „Umordnung“

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} + \cdots$$

konvergiert nicht. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \geq 2^{n-1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 2 .$$

Für die umgeordnete Reihe lassen sich die Summanden wie folgt zusammenfassen und abschätzen:

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2n + 2} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2n + 2} \geq \frac{1}{5} , \quad n \geq 9 ,$$

da $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \geq \frac{1}{2n + 2} (\Leftrightarrow n + 1 \geq 10)$ für $n \geq 9$ gilt.

Definition: Sei $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ eine *Umordnung* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Definitionen: Eine konvergente Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn sie bei einer beliebigen Umordnung konvergent bleibt. Andernfalls heißen konvergente Reihen *bedingt konvergent*.

Satz 11 (*Umordnungssatz*) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann ist auch die Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Bemerkung: Der letzte Satz gilt ohne die absolute Konvergenz nicht (Gegenbeispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$) .

Definition: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit

$$c_n := \sum_{m=1}^n a_{n-m+1} b_m , \quad n \in \mathbb{N} ,$$

heißt das *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$.

Satz 12 Das *Cauchy-Produkt* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ der absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) .$$

Bemerkungen:

1. Für die Konvergenz eines Cauchy-Produkts reicht es aus, daß eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert.
2. Konvergieren $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) .$$

Als Anwendung von Satz 12 erhält man

Folgerung 13 (*Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b) .$$

Folgerung 14 *Es gilt*

$$(a) \quad \exp(a) > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} ;$$

$$(b) \quad \exp(-a) = \exp(a)^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

$$(c) \quad \exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

7.5 Die g -adische Entwicklung

Lemma 15 *Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Dann konvergiert eine Reihe der Form*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0, \dots, g-1\} .$$

Definition: Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Die Elemente $\{0, \dots, g-1\}$ heißen g -adische Ziffern zur Basis g , und

$$g^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} , \quad a_k \in \{0, \dots, g-1\} ,$$

heißt g -adische Entwicklung von $x \in \mathbb{R}$, falls

$$x = g^m \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} \quad \text{mit} \quad a_1 \neq 0 , \quad m \in \mathbb{Z}$$

und

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : a_n \neq g-1 .$$

Bemerkung: Ein Dezimalbruch $0, z_1 z_2 z_3 \dots$ stellt die Zahl

$$\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \frac{z_3}{10^3} + \dots$$

dar, $z_i \in \{0, \dots, 9\}$, und ist im obigen Sinne eine 10-adische Entwicklung (mit $m = 0$, $z_1 \neq 0$)

Satz 16 Sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Jedes $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, besitzt genau eine g -adische Entwicklung.

Bezeichnungen: Zahlen $\pm x \in \mathbb{R}$ der Form

$$x = g^m \sum_{k=1}^N a_k g^{-k}, \quad |m| \leq M, \quad a_k \in \{0, \dots, g-1\}, \quad a_1 \neq 0$$

heißen *abbrechende systematische Brüche zur Basis g* oder *Gleitkommazahlen zur Basis g* mit *Mantissenstellenzahl* („Genauigkeit“) N und Exponentenbereich $\{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq M\}$.

Wir schreiben auch

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_N \times g^m \quad \text{oder} \quad x = \pm |a_1 \cdots a_N| m$$

$$(|m| \leq M; a_i \in \{0, \dots, g-1\}; a_1 \neq 0)$$

Beispiele:

Basis $g = 10$: Dezimalzahlen
 $g = 2$: Dualzahlen
 $g = 8$: Oktalzahlen
 $g = 16$: Hexadezimalzahlen

8 Stetigkeit

8.1 Reelle Funktionen, Grenzwerte

Sei $D, W \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow W$ Abbildung (oder Funktion)

D = Definitionsbereich, W = Wertebereich.

Bezeichnungen:

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\},$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Beispiele:

1. Konstante Funktion $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto a \in \mathbb{R}$;
2. Identische Funktion $\text{id} : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$;
3. Absolutbetrag $\text{abs} : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$;
4. Gaußsche Klammer $\text{ent} : \mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{R}$;
wobei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$,
5. Signum-Funktion $\text{sign} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$
6. Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$.

Algebraische Verknüpfungen von Funktionen $(f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}, r \in \mathbb{R})$:

$$f + g : D \ni x \mapsto f(x) + g(x) \in \mathbb{R} ;$$

$$r \cdot f : D \ni x \mapsto rf(x) \in \mathbb{R} ;$$

$$f \cdot g : D \ni x \mapsto f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{R} ;$$

$$\frac{f}{g} : D' \ni x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}, \quad \text{wobei}$$

$$D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$$

Komposition oder *Hintereinanderausführung* $(f : D \longrightarrow \mathbb{R}, g : D' \longrightarrow \mathbb{R}; f(D) \subset D')$

$$g \circ f : D \ni x \mapsto g(f(x)) \in \mathbb{R} .$$

Beispiele:

7. (vgl. Bspl. 3) $\text{abs} = g \circ f$ mit

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}, \quad g : [0, \infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$$

(wobei $\sqrt{x} = 0$ für $x = 0$).

8. *Polynom vom Grad n :*

$$p : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}$$

wobei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Definition: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. $c \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von f in a* genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a = \lim_n x_n$$

gilt:

$$c = \lim_n f(x_n) .$$

Wir schreiben: $c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Satz 1 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

$$(a) \quad c = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(b) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon .$$

Beispiele:

$$9. \text{ (vgl. Bspl. 3) } \quad \lim_{x \rightarrow 0} \text{abs}(x) = 0 ;$$

$$10. \text{ (vgl. Bspl. 6) } \quad \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1 ;$$

$$11. \quad f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0; \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

8.2 Stetige Funktionen

Definitionen: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f heißt *stetig in* $a \in D$
 $:\Longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
2. f heißt *stetig (in D)*
 $:\Longleftrightarrow f$ stetig in jedem $a \in D$.

Satz 2 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Es sind äquivalent:

- (a) f ist stetig in $a \in D$.
- (b) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_n x_n = a$, dann gilt

$$\lim_n f(x_n) \text{ existiert, } \lim_n f(x_n) = f(a).$$

- (c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Beispiele:

1. Die konstante und identische Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$.
2. Die Betragsfunktion abs ist stetig in $\mathbb{R}$.
3. Die Exponentialfunktion $\exp$ ist stetig.

Satz 3 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und $f(a) > 0$. Dann gilt:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D : f(x) > 0.$$

Bemerkung: Funktionen, die an diskreten Stellen erklärt sind, z. B. $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, sind immer stetig.

8.3 Rechenregeln

Satz 4 Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, und seien f, g stetig in $a \in D$. Dann gilt

(a) $f + g$, $f \cdot g$, $r \cdot f$ sind stetig in a .

(b) Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a .

Satz 5 Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset D'$. Ist f stetig in $a \in D$ und ist g stetig in $b := f(a)$, so ist $g \circ f$ stetig in a .

Definitionen: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion.

1. f heißt *streng monoton wachsend* bzw. *monoton wachsend*

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in D : x < y \implies f(x) < f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leq f(y).$$

2. f heißt *streng monoton fallend* bzw. *monoton fallend*

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall x, y \in D : x < y \implies f(x) > f(y) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(y).$$

Satz 6 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, und es gelte $[A, B] = f([a, b])$ mit $A < B$. Dann existiert $f^{-1} : [A, B] \longrightarrow \mathbb{R}$, und es gilt

f^{-1} ist stetig und streng monoton wachsend.

9 Einige Sätze über stetige Funktionen

Sei $[a, b]$ ein Intervall mit $a < b$.

9.1 Der Zwischenwertsatz

Satz 1 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte:

$$f(a)f(b) < 0.$$

Dann gibt es ein $z \in (a, b)$ mit $f(z) = 0$.

Bemerkungen:

1. Die Zahl z in Satz 1 heißt *Nullstelle* von f . Über die Eindeutigkeit einer Nullstelle wird in Satz 1 nichts ausgesagt.
2. Das Konstruktionsprinzip für die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Beweis von Satz 1 — $a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq z \leq \dots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$ — wird als *Bisektionsverfahren* oder *Intervallschachtelungsverfahren* bezeichnet. Als *Abbruchkriterium* kann man verwenden

$$\max_{x=a_n, b_n} |x - z| \leq b_n - a_n \leq 2^{-n+1}(b - a), \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{a-priori und a-posteriori Kriterium}).$$

Beispiele:

1. Das Polynom $p(x) := x^{17} + 2x + 1$ besitzt eine Nullstelle in $(-1, 0)$.
2. Die Gleichung $\exp(-x) = x$ besitzt eine Lösung z in $[0, 1]$, d. h. eine Nullstelle von $\exp(-x) - x$.

Satz 2 (*Zwischenwertsatz*). Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $g(a)$ und $g(b)$. Dann gibt es ein $z \in [a, b]$ mit $g(z) = c$.

Folgerung 3 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann gilt $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Beispiel:

$$3. \quad g(x) := \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] , \\ 1 - x & , \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Diese Funktion ist nur stetig in $a = \frac{1}{2}$, nimmt aber jeden Wert zwischen 0 und 1 an. Damit gilt die Umkehrung der Aussage des Zwischenwertsatzes nicht, d. h. eine Funktion, bei der jeder Wert zwischen $g(a)$ und $g(b)$ als Bild unter g auftritt, ist nicht notwendig stetig.

9.2 Existenz von Extrema

Gilt $x := \sup_{a \in A} a \in A$, dann schreiben wir

$$x = \max_{a \in A} a = \max A \quad (x : \text{Maximum von } A)$$

Entsprechend:

$$y = \min_{a \in A} a = \min A \quad (y : \text{Minimum von } A)$$

falls $y := \inf_{a \in A} a \in A$.

Definition: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn $f(D)$ beschränkt ist.

Satz 4 Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt, und es existieren $\bar{z}, \underline{z} \in [a, b]$ mit

$$f(\bar{z}) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(\underline{z}) = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

d. h.

$$f(\bar{z}) = \max f([a, b]), \quad f(\underline{z}) = \min f([a, b])$$

Beispiele:

1. $f : (0, 1] \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ ist stetig, nimmt jedoch sein Supremum nicht an.

$$2. f : [0, 1] \ni x \mapsto \begin{cases} x & , \quad x \in [0, 1) \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ist nicht stetig bei $x = 1$ und nimmt sein Supremum nicht an.

9.3 Gleichmäßig stetige Funktionen

Definition: Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* (in D), wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in D : |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon .$$

Bemerkung: Eine gleichmäßig stetige Funktion ist offenbar stetig, die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, zeigt. Für abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ als Definitionsbereich gilt auch die Umkehrung (s. Satz 5).

Satz 5 Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f gleichmäßig stetig.

9.4 Bemerkungen zur Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp$ ist bereits durch ihre Werte in $\mathbb{Q}$ festgelegt, was die folgende Schreibweise nahelegt:

$$e^x := \exp(x), \quad x \in \mathbb{R} .$$

Rechenregel

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad x, y \in \mathbb{R} .$$

Definitionen: $((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge})$

$$(a) \lim_n a_n = \infty : \iff \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n > K .$$

$$(b) \lim_n a_n = -\infty : \iff \forall K < 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n < K .$$

Definitionen: $(f : D \longrightarrow \mathbb{R}, D \text{ nicht nach oben beschränkt})$

$$(c) c = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) : \iff \forall x_n \in D, n \in \mathbb{N}, \lim x_n = \infty \text{ gilt } c = \lim_n f(x_n)$$

$$(d) \text{ Entsprechend: } c = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) .$$

Satz 6 Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x x^{-q} = \infty \quad \forall q \in \mathbb{N}$, d. h. die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz.

(c) $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in (-1, 1)$.

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$.

(e) $e^x = \lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$.

(f) $e \notin \mathbb{Q}$.

Definitionen: Hyperbelfunktionen

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{Cosinus hyperbolicus})$$

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{Sinus hyperbolicus})$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{Tangens hyperbolicus})$$

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{Cotangens hyperbolicus})$$

Satz 7 Es gelten die folgenden Beziehungen:

(a) $\cosh x + \sinh x = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$

(b) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1, \quad x \in \mathbb{R};$

(d) $\cosh(s+t) = \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t, \quad s, t \in \mathbb{R},$

(e) $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$

Bemerkung: Der Name „Hyperbelfunktionen“ stammt daher, daß sich der rechte Ast der gleichseitigen *Hyperbel* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ mit $\cosh$ und $\sinh$ „parametrisieren“ läßt, d. h. $(\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2, t \in (-\infty, \infty)$, beschreibt den Hyperbelast (s. Bild, S. 159, Abschnitt 7.18, in Walter 1 (1992)).

9.5 Die Logarithmusfunktion

Lemma 8 *Die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.*

Definition: Die Umkehrfunktion (Existenz nach Lemma 8)

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

der Exponentialfunktion heißt *natürlicher Logarithmus*.

Folgerung 9

(a) $\ln$ ist stetig und streng monoton wachsend.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$.

(c) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$, $x, y \in (0, \infty)$.

Beispiel: Zerfall einer radioaktiven Substanz

$$u(t) = u(0)e^{-\alpha t};$$

$$\text{Halbwertszeit: } T = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Schreibweise: $a^x := e^{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Folgerung 10

(a) $a^{x+y} = a^x a^y$, $x, y \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

(b) $(a^x)^y = a^{xy}$, $x, y \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

(c) $a^x b^x = (ab)^x$, $x \in \mathbb{R}$; $a, b > 0$.

Bezeichnung:

$\log_a$: Umkehrfunktion von $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, \infty)$.

Bemerkung: $\ln = \log_e$.

Bezeichnung: $\log := \log_{10}$

Funktionalgleichung für den Logarithmus:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y , \quad x, y \in (0, \infty) ; a > 0 .$$

Bemerkung: Die entsprechende Aussage zu Satz 6 (e) lautet

$$\ln x = \lim_n n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) , \quad x > 0 .$$

Daraus erhält man eine Rechenvorschrift für $\ln x$:

$$\ln x = \lim_k 2^k \left(\sqrt[2^k]{x} - 1 \right) ,$$

wobei

$$\sqrt[2^k]{x} = \sqrt{\sqrt[2^{k-1}]{x}} .$$

10 Differenzierbarkeit

10.1 Motivation und Definition

Die *Sehne* durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ des Graphen einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ wird beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = s ,$$

wobei $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $s := \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \textit{Steigung}$. Existiert

$$\lim_{\substack{D \ni x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: c ,$$

so nennt man diesen Grenzwert die *Ableitung* von f in x_0 . Die Gerade

$$y = f(x_0) + c(x - x_0)$$

heißt *Tangente* an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$.

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von D falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in D : x \neq a, |x - a| < \varepsilon .$$

Folgerung 1 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) a ist Häufungspunkt von D .
- (b) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$i. \ a = \lim_n x_n ;$$

$$ii. \ x_n \in D, \ x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Beispiele:

1. $D := [c, d)$, $c < d$. Häufungspunkte von $D : [c, d]$.
2. $D := \{2\} \cup [0, 1)$. Häufungspunkte von $D : [0, 1]$.

Definition: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ Häufungspunkt von D .

f differenzierbar in $a : \Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N},$
 $\lim_n x_n = a$, gilt: $\lim_n \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = c$.

(Bez.: $c = f'(a) = \frac{df}{dx}(a)$ Ableitung (oder Differentialquotient) von f in a .)

Definition: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* genau dann, wenn gilt:

- (a) Jedes $a \in D$ ist Häufungspunkt von D .
- (b) f ist in jedem $a \in D$ differenzierbar.

Beispiele:

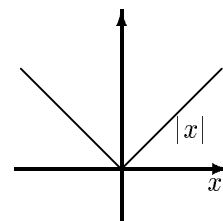
3. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto w \in \mathbb{R}$ ($w \in \mathbb{R}$ Konstante) ist differenzierbar und $f'(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

4. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ ist in $a = 0$

nicht differenzierbar, denn

$$\lim_n \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = 1 \quad \text{und}$$

$$\lim_n \frac{f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = -1.$$



5. $D := \{2\} \cup (0, 1)$; $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist differenzierbar in jedem $a \in (0, 1)$, aber nicht in $a = 2$.

Satz 2 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ Häufungspunkt von D . Dann sind für $c \in \mathbb{R}$ äquivalent:

(a) f ist differenzierbar in a , und es gilt $f'(a) = c$.

(b) Es gibt eine Funktion $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$i. \quad f(x) = f(a) + c(x - a) + \varphi(x) \quad \forall x \in D;$$

ii. φ ist differenzierbar in a , und es gilt: $\varphi'(a) = 0$.

Bemerkung: Eine in $a \in D$ differenzierbare Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist lokal approximierbar durch eine Funktion der Form

$$t(x) := c_1 x + c_2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Folgerung 3 Ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so ist f stetig in a .

Bemerkung: Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt, daß die Umkehrung von Folgerung 3 nicht gilt.

Satz 4 Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$ Häufungspunkt von D . Dann sind für $c \in \mathbb{R}$ äquivalent.

(a) f ist differenzierbar in a , und es gilt: $f'(a) = c$.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{a\} :$

$$|x - a| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - c \right| < \varepsilon .$$

10.2 Rechenregeln

Satz 5 Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bei $a \in D$ differenzierbar. Dann gilt:

(a) $f + g$ ist differenzierbar in a , und es gilt:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) .$$

(b) $f \cdot g$ ist differenzierbar in a , und es gilt:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a) \cdot g'(a) .$$

(c) Ist $g(a) \neq 0$, so ist a Häufungspunkt von $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, und es gilt:

$\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in a und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$$

Beispiele:

1. Für die identische Abbildung gilt $\text{id}'(a) = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ hat man deshalb

$$p'(a) = \sum_{k=0}^n k c_k a^{k-1} , \quad a \in \mathbb{R} .$$

2. $m_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{Z})$,

$$m'_n(a) = n a^{n-1} , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Satz 6 (Kettenregel) Seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D' \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(D) \subset D'$, und f differenzierbar in $a \in D$, g differenzierbar in $b := f(a) \in D'$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a , und es gilt:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) .$$

Satz 7 Sei $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, $W := f([c, d])$, und sei f differenzierbar in $a \in [c, d]$. Es gelte $f'(a) \neq 0$. Dann existiert $f^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}$, f^{-1} ist differenzierbar in $b := f(a)$, und es gilt:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} .$$

Beispiele:

3. $\chi : (0, \infty) \ni y \mapsto \sqrt[n]{y} \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, ist Umkehrfunktion von $V : (0, \infty) \ni x \mapsto x^n \in (0, \infty)$. Nach Satz 7: $\chi'(a) = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1}$.

4. $f_q : (0, \infty) \ni x \mapsto x^q \in (0, \infty)$, $q \in \mathbb{Q}$.

$$f'_q(a) = q a^{q-1}, \quad a \in (0, \infty).$$

Bemerkung: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $D = [\alpha, \beta]$ oder $D = [\alpha, \beta)$ oder $D = (\alpha, \beta)$. Dann ist f differenzierbar in $a \in D$ und $c = f'(a)$ genau dann, wenn

$$c = \lim_{\substack{x \rightarrow a, x \neq a \\ x \in D}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(Begründung: Jedes $a \in D$ ist Häufungspunkt für die genannten Intervalle).

10.3 Zur Exponentialfunktion

Satz 8 *Es gilt:*

(a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt

$$\exp'(a) = \exp(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(b) $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt

$$\ln'(a) = \frac{1}{a} \quad \forall a \in (0, \infty).$$

Folgerung 9

(a) Sei $b > 0$. Die Funktion $f_b : \mathbb{R} \ni x \mapsto b^x \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $f'_b(a) = b^a \ln(b) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(b) Sei $a > 1$; $\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$\log'_a(z) = \frac{1}{z \ln a} \quad \forall z \in (0, \infty).$$

10.4 Zum Newton-Verfahren

Aufgabe: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Gesucht ist $z \in [a, b]$ mit $f(z) = 0$.

Iterationsvorschrift:

$$x_0 \in [a, b] \quad (= \text{Startnäherung})$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Beispiele:

1. (vgl. Abschnitt 6.5) Wurzelbestimmung

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - b \in \mathbb{R} \quad (b > 0)$$

$$\implies x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - b}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{b}{x} \right)$$

$$\text{Newton-Verfahren: } x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{b}{x_n} \right) \quad (\text{vgl. Satz 6.10}).$$

$$\text{Konvergenz: quadratisch } |x_{n+1} - z| \leq c|x_n - z|^2.$$

2. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, $z = 0$ Nullstelle; beachte $f'(z) = 0$.

$$\text{Newton-Verfahren: } x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Konvergenz: (nur) linear } |x_{n+1} - z| \leq \frac{1}{2}|x_n - z|$$

11 Einige Sätze über differenzierbare Funktionen

11.1 Charakterisierung von Extrema

Definitionen: $(f : D \longrightarrow \mathbb{R}, z \in D)$

- (a) z heißt *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*)

$$:\iff \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \cap (z - \varepsilon, z + \varepsilon) : f(x) \leq f(z)$$

$$(\text{bzw. } \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in D \cap (z - \varepsilon, z + \varepsilon) : f(x) \geq f(z)).$$

(b) z heißt *lokales Extremum*

$:\Leftrightarrow z$ lokales Maximum oder lokales Minimum.

(c) z heißt *globales Maximum* (bzw. *Minimum*)

$:\Leftrightarrow \forall x \in D : f(x) \leq f(z)$ (bzw. $\forall x \in D : f(x) \geq f(z)$) .

Satz 1 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \in (a, b)$. Ist z lokales Extremum und ist f differenzierbar in z , so gilt $f'(z) = 0$.

Bemerkung:

1. Nach Satz 9.4 und Folgerung 10.3 nimmt eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ihr (globales) Maximum und (globales) Minimum an. Liegt ein solches Extremum z am Rand ($z = a$ oder $z = b$), so gilt nicht notwendigerweise $f'(z) = 0$.
2. Notwendig für ein lokales Maximum in z ist

$$f'(z)(x - z) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] .$$

3. $f'(z) = 0$ (s. Satz 1) ist notwendig, aber nicht hinreichend für ein lokales Extremum (Gegenbeispiel: $f : [-1, 1] \ni x \mapsto x^3$).

11.2 Der Satz von Rolle, Mittelwertsatz

Satz 2 (*Satz von Rolle*)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$; $a < b$. Gilt dann $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $z \in (a, b)$ mit $f'(z) = 0$.

Folgerung 3 (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$, $a < b$. Dann gibt es ein $z \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z) .$$

Folgerung 4 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$, $a < b$.
Dann gibt es ein $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(a + \vartheta(b - a))(b - a) .$$

Folgerung 5 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$; $a < b$.
Weiter gebe es $m, M \in \mathbb{R}$ mit

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in (a, b) .$$

Dann gilt für beliebige $x, y \in [a, b]$, $x \leq y$:

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x) .$$

Folgerung 6 (Erweiterter Mittelwertsatz)

Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$; $a < b$. Gilt $g'(x) \neq 0$
 $\forall x \in (a, b)$, dann gibt es ein $z \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} .$$

Folgerung 7 Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in jedem $x \in (a, b)$, und es gelte
 $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Dann gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] : f(x) = c .$$

Beispiele:

1. Populationsmodell: $P(t) = P_0 e^{rt}$ ist einzige Lösung von

$$P(0) = P_0 , \quad P'(t) = r P(t) , \quad t \geq 0 \quad (r > 0, P_0 > 0) .$$

2. *Verbessertes Populationsmodell:* ($a > 0, b > 0$)

$$P(0) = P_0, \quad P'(t) = P(t)(a - b P(t)), \quad t \geq 0.$$

$$\text{Lösung: } P(t) = \frac{a}{b + e^{-(at+c)}}, \quad c = \ln \frac{P_0}{a - b P_0}$$

$$\text{Gleichgewichtszustand: } \frac{a}{b}.$$

11.3 Taylorsche Formel

Definitionen: (*höhere Ableitungen*). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) $k = 1$: $D_1 := \{a \in D \mid f \text{ differenzierbar in } a\}$,

$$f^{(1)}(a) := f'(a), \quad a \in D_1;$$

$k + 1$: $D_{k+1} := \{a \in D_k \mid f^{(k)} \text{ differenzierbar in } a\}$,

$$f^{(k+1)}(a) := (f^{(k)})'(a), \quad a \in D_{k+1};$$

(b) $f^{(k)} : D_k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Ableitung k -ter Ordnung* mit Definitionsbereich D_k . Wir schreiben auch:

$$f^{(k)}(a) = \frac{d^k f}{dx^k}(a) = \frac{df^{(k-1)}}{dx}(a), \quad a \in D_k;$$

(c) f heißt *k -mal differenzierbar* genau dann, wenn $D_k = D$.

(d) f heißt *k -mal stetig differenzierbar*, genau wenn gilt:

$$D_k = D, \quad f^{(k)} : D_k \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig.}$$

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x|x| \in \mathbb{R}$

ist stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar.

2. Die Exponentialfunktion ist k -mal stetig differenzierbar für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Satz 8 (*Taylorsche Formel*)

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $n + 1$ -mal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

Bezeichnung: $P_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$

heißt *Taylor-Polynom* (vom Grad n);

$$R_{n,f,x_0}(x) := f(x) - P_{n,f,x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

heißt *Restglied* bzw. *Lagrangesche Darstellung des Restglieds*; $x_0 \in [a, b]$ heißt *Entwicklungspunkt*.

Bemerkung:

(a) Andere Schreibweise der Taylor-Formel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < |\vartheta| < 1. \end{aligned}$$

(b) Restgliedabschätzung:

$$\begin{aligned} |R_{n,f,x_0}(x)| &\leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \\ \text{falls } |f^{(n+1)}(\xi)| &\leq K_{n+1} \quad \forall \xi \in (a, b). \end{aligned}$$

Beispiel: Taylor-Polynom für die Exponentialfunktion

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definitionen: ($f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$)

1. f heißt *unendlich oft differenzierbar*, falls f k -mal differenzierbar ist für jedes $k \in \mathbb{N}$.

2. Sei f unendlich oft differenzierbar und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann heißt

$$T_{f,x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \quad x \in [a, b],$$

die *Taylor-Reihe* von f im Entwicklungspunkt x_0 .

3. f wird durch T_{f,x_0} dargestellt, wenn $f(x) = T_{f,x_0}(x)$, $x \in [a, b]$.

Beispiele:

1. $T_{\exp,x_0}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , \quad x \neq 0, \\ 0 & , \quad x = 0, \end{cases}$

$T_{f,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dieses Beispiel zeigt, daß eine konvergente Taylor-Reihe nicht notwendigerweise f darstellt.

3. $f : (-1, \infty) \ni x \mapsto \ln(1+x) \in \mathbb{R}$,

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \quad x > -1.$$

Diese Reihe ist konvergent für $x \in (-1, 1]$ und divergent sonst; $T_{f,0}$ stellt f für $x \in (-1, 1]$ dar.

11.4 Anmerkung zu lokalen Extrema

Satz 9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar, sei $z \in (a, b)$, $a < b$, und es gelte

$$f^{(j)}(z) = 0 \quad \forall j : 1 \leq j \leq n-1, \quad f^{(n)}(z) \neq 0; \quad n \geq 2.$$

Dann gelten die Aussagen:

(a) Ist n ungerade, so ist z kein lokales Extremum.

(b) Ist n gerade, so ist

$$z \begin{array}{l} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{array} \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} f^{(n)}(z) < 0 \\ f^{(n)}(z) > 0 . \end{array}$$

11.5 Die Regel von de l'Hospital

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}$ heißt *Berührungspunkt* von D genau dann, wenn

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_n x_n = a .$$

Definition: Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a Berührungspunkt von D , $c \in \mathbb{R}$.

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim x_n = a : \\ \lim_n f(x_n) = c .$$

(Die Fälle $c \in \{-\infty, \infty\}$, $a \in \{-\infty, \infty\}$ sind zugelassen.)

Beispiele:

$$1. \quad f : [0, 1) \ni x \mapsto \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty ;$$

$$2. \quad f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni x \mapsto \frac{1-x^2}{x^3-x^2+x-1} \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 .$$

Satz 10 (*Regel von de l'Hospital*)

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, $a < b$, ($b = \infty$ sei zugelassen). Es gelte

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 .$$

Dann gilt:

$$(a) \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) .$$

$$(b) \quad \text{Aus } \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad \text{folgt} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c .$$

Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 2 .$$

11.6 Die trigonometrischen Funktionen

Definitionen:

$$\begin{aligned} \sin(x) &:= \sin x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \text{Sinus-Funktion} \\ \cos(x) &:= \cos x := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} && \text{Cosinus-Funktion} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die angegebenen Reihen konvergieren absolut nach dem Quotientenkriterium.

Folgerung 11

$$(a) \quad \sin(0) = 0, \quad \cos(0) = 1 ;$$

$$(b) \quad \sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

(Sinus ist ungerade, Cosinus gerade Funktion);

$$(c) \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x, \quad x > 0 ;$$

$$(d) \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x > 0 .$$

Satz 12 Die Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind stetig, differenzierbar, und es gilt:

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x) .$$

Folgerung 13

$$(e) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} ;$$

$$(f) \quad |\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(g) \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \quad x, y \in \mathbb{R};$$

$$(h) \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad x, y \in \mathbb{R};$$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Lemma 14 Sei $A := \{x \in [0, \infty) \mid \cos(x) = 0\}$. Es gilt:

$$A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad \gamma := \inf A \in \left[\sqrt{2}, \frac{7}{4}\right), \quad \gamma \in A.$$

Definition: $\pi := 2\gamma (= 3.14159 \dots)$

Eigenschaften

$$(a) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$(b) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(c) \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x), \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(d) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

$$(e) \quad \cos(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$(f) \quad \sin(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Definition:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Tangens-Funktion;

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Cotangens-Funktion.

Satz 15 *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) $\cos$ ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend und $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

(b) $\sin$ ist auf $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton wachsend und $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$.

(c) $\tan$ ist in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ streng monoton wachsend und $\tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$.

(d) $\cot$ ist in $(0, \pi)$ streng monoton fallend und $\cot((0, \pi)) = \mathbb{R}$.

Definitionen: Umkehrfunktionen von $\cos, \sin, \tan$ bzw. $\cot$:

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi).$$

Folgerung 16

$$(a) \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$(b) \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$(c) \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(d) \operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: $\sin, \cos, \tan, \cot$ sind *periodische Funktionen* (mit *Periode* 2π). Für die Umkehrfunktionen wurde jeweils nur ein ausgezeichneter Ast benutzt.

12 Das Riemann-Integral

Im folgenden sei $I = [a, b]$ ein Intervall, $a < b$.

12.1 Treppenfunktionen

Beispiel: Der Flächeninhalt des Bereichs $B := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ läßt sich annähern durch eine Summe von Rechtecken

$$F_N := \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f_k, \quad f_k := f(x_k), \quad x_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, \dots, N,$$

wobei $f : [0, 1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Man erhält

$$F_N = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6N^3} \quad \text{und} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} F_N = \frac{1}{3}.$$

Definitionen:

- (a) Eine *Zerlegung* Z von I ist eine Anzahl von Punkten $x_0, \dots, x_N$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.
- (b) $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion auf I* , wenn eine Zerlegung $Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ und Zahlen $c_1, \dots, c_N$ existieren mit $\varphi(x) = c_i$ falls $x \in (x_{i-1}, x_i)$.
- (c) $\mathcal{T}(I) := \mathcal{T}[a, b] := \{\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ Treppenfunktion auf } I\}$.

Definition: *Gemeinsame Verfeinerung* zweier Zerlegungen

$$Z : a = x_0 < \dots < x_N = b, \quad Z' : a = x'_0 < \dots < x'_M = b :$$

Ordne Punkte $\{x_i \mid i = 0, \dots, N\} \cup \{x'_i \mid i = 0, \dots, M\}$ der Größe nach, nummeriere sie neu – evtl. doppelt auftretende Punkte erhalten gleichen Index, Resultat: $\tilde{Z} : a = \tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_{\tilde{N}} = b$.

Eigenschaften von $\mathcal{T}[a, b]$:

- (a) $0 \in \mathcal{T}[a, b]$ ($0 =$ Nullfunktion, $0(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$);
- (b) $\varphi \in \mathcal{T}[a, b], c \in \mathbb{R} \implies c\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$;
- (c) $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \implies \varphi + \psi \in \mathcal{T}[a, b]$.

Definition: $C[a, b] := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Satz 1 *Es gilt die Aussage:*

$$\forall f \in C[a, b] \exists \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b] \quad \forall x \in [a, b] : \\ \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \wedge \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) .$$

12.2 Das Integral von Treppenfunktionen

Definition: Für eine Treppenfunktion φ zur Zerlegung $Z : a = x_0 < \dots < x_N = b$ mit Werten

$$c_k := \varphi \left(\frac{1}{2}(x_k + x_{k-1}) \right) , \quad k = 1, \dots, N ,$$

sei

$$S_Z^\varphi := \sum_{k=1}^N c_k (x_k - x_{k-1}) .$$

Lemma 2 *Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ Treppenfunktion zu den Zerlegungen Z und Z' . Dann gilt $S_Z^\varphi = S_{Z'}^\varphi$.*

Definition: $S^\varphi := S_Z^\varphi = \sum_{k=1}^N c_k (x_k - x_{k-1})$ heißt *Integral von φ* für eine Treppenfunktion φ und eine beliebige Zerlegung Z . Wir schreiben

$$\int_a^b \varphi(x) dx := S^\varphi .$$

Definition: Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f \leq g : \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D .$$

Folgerung 3 Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a) \quad \int_a^b (c\varphi)(x) dx = c \int_a^b \varphi(x) dx ;$$

$$(b) \quad \int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx ;$$

$$(c) \quad \text{Aus } \varphi \leq \psi \text{ folgt: } \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx .$$

12.3 Ober- und Unterintegrale

Bezeichnung: $B[a, b] := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt} \}$

Es gilt

$$C[a, b] \subset B[a, b] \quad \text{und} \quad (\text{o. E.}) \quad \mathcal{T}[a, b] \subset B[a, b] .$$

Lemma 4 Seien $f \in B[a, b]$, $\alpha := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, $\beta := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$,

$$\varphi_u : [a, b] \ni x \mapsto \alpha \in \mathbb{R} ,$$

$$\varphi_o : [a, b] \ni x \mapsto \beta \in \mathbb{R} .$$

Dann gilt:

$$(a) \quad \varphi_u \in F_u := \{\varphi \in \mathcal{T}[a, b] \mid \varphi \leq f\} ,$$

$$\varphi_o \in F_o := \{\psi \in \mathcal{T}[a, b] \mid f \leq \psi\} .$$

$$(b) \quad \alpha(b-a) \leq \int_a^b \psi(x) dx \quad \forall \psi \in F_o , \quad \int_a^b \varphi(x) dx \leq \beta(b-a) \quad \forall \varphi \in F_u ,$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx \quad \forall \varphi \in F_u, \psi \in F_o .$$

Definitionen: $(f \in B[a, b])$

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x) dx \mid \psi \in \mathcal{T}[a, b], f \leq \psi \right\}$$

heißt *oberes Integral* (oder *Oberintegral*) von f ;

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a, b], \varphi \leq f \right\}$$

heißt *unteres Integral* (oder *Unterintegral*) von f .

Folgerung 5 $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}[a, b] .$

Beispiele:

$$1. \quad f : [0, 1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R} , \\ \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} .$$

$$2. \quad f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] , \\ -1 & , \quad x \in [0, 1] , x \notin \mathbb{Q} , \end{cases}$$

$$f \in B[0, 1] , \quad \int_0^1 f(x) dx = 1 , \quad \int_0^1 f(x) dx = -1 .$$

Folgerung 6 Seien $f, g \in B[a, b]$. Es gelten folgende Rechenregeln:

$$(a) \quad \int_a^b (f + g)(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ;$$

$$(b) \quad \int_a^b (f + g)(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ;$$

$$(c) \quad \int_a^b (cf)(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad \forall c \in [0, \infty) ;$$

$$(d) \quad \int_a^b (cf)(x) dx = c \int_a^b f(x) dx \quad \forall c \in [0, \infty) ;$$

$$(e) \quad \int_a^b (-f)(x) dx = - \int_a^b f(x) dx , \quad \int_a^b (-f)(x) dx = - \int_a^b f(x) dx .$$

12.4 Riemann-Integrierbarkeit

Definition: $f \in B[a, b]$ heißt *Riemann-integrierbar* genau dann, wenn gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

Schreibweise/Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx \quad \text{Riemann-Integral von } f$$

„Riemann-“ wird im folgenden weggelassen.

Bezeichnungen: Sei $f \in B[a, b]$ integrierbar.

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{heißt} \quad \text{Integral von } f \text{ (über } [a, b]) ;$$

a heißt *untere Grenze*,

b heißt *obere Grenze*,

f heißt *Integrand*,

x heißt *Integrationsvariable*.

Folgerung 7 Jede Treppenfunktion ist integrierbar.

Beispiele:

$$1. \quad f : [0, 1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R} , \quad \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} .$$

2. Das obige Beispiel 2 aus Abschnitt 12.3 ist nicht (Riemann-)integrierbar.

Satz 8 Sei $f \in B[a, b]$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist integrierbar.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b] : \varphi \leq f, f \leq \psi ,$

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \leq \varepsilon .$$

Folgerung 9 Seien $f, g \in B[a, b]$ integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$f + g, cf$ sind integrierbar und

$$\begin{aligned}\int_a^b (f + g)(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b (cf)(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

$R[a, b] := \{f \in B[a, b] \mid f \text{ integrierbar}\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und das Integral $\int_a^b \dots$ definiert eine lineare Abbildung auf $R[a, b]$.

Definitionen: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f_+ : D \ni x &\mapsto \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } f(x) > 0, \\ 0 & , \text{ sonst;} \end{cases} \\ f_- : D \ni x &\mapsto \begin{cases} -f(x) & , \text{ falls } f(x) < 0, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Bemerkung: Offenbar gilt

$$f = f_+ - f_- , \quad |f| := \text{abs} \circ f = f_+ + f_- .$$

Satz 10 Seien $f, g \in B[a, b]$ integrierbar. Dann gilt:

(a) f_+, f_- sind integrierbar.

(b) $|f|$ ist integrierbar und

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f|(x) dx .$$

(c) Ist $f \leq g$, so folgt: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Bemerkung: Für Riemann-Integrierbarkeit folgt aus

(a) f ist integrierbar,

daß

(b) $|f|$ ist integrierbar;

die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. In der Lebesgueschen Theorie wird der Integralbegriff so eingeführt, daß (a) und (b) äquivalent sind.

12.5 Eine Auswahl integrierbarer Funktionen

Satz 11 $C[a, b] \subset R[a, b]$.

Satz 12 Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton, so ist f integrierbar.

Satz 13 Gilt $f, g \in R[a, b]$, so gilt auch $f \cdot g \in R[a, b]$.

12.6 Weitere Aussagen über Integrale

Satz 14 Sei $f \in R[a, b]$, $c \in (a, b)$. Dann sind äquivalent:

(a) $f \in R[a, b]$.

(b) $f|_{[a, c]} \in R[a, c] \wedge f|_{[c, b]} \in R[c, b]$.

Ist (a) erfüllt, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Folgerung 15 Ist $f \in R[a, b]$, $a \leq a_1 < b_1 \leq b$, so gilt:

$$f \in R[a_1, b_1].$$

Folgerung 16 Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Punkte in $[a, b]$, so gilt:

$$f \in R[a, b] .$$

Definitionen: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \leq b$.

(a) Für $a = b$: $\int_a^b f(x) dx = 0$.

(b) Ist $f \in R[a, b]$: $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Folgerung 17 Seien $f \in R[a, b]$, $a_1, b_1, c_1 \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{a_1} f(x) dx = 0 .$$

Folgerung 18 Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Punkte x_i , $1 \leq i \leq \ell$, und $f(x) = g(x) \forall x \in [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx .$$

Bemerkung: Es gilt die weitergehende Aussage in Heuser 1, Satz 79.6, S. 454.

13 Integration und Differentiation

13.1 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 1 (Mittelwertsatz)

Sei $f \in C[a, b]$, $g \in R[a, b]$, $g \geq 0$. Dann gilt $f \cdot g \in R[a, b]$, und es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b (f \cdot g)(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx .$$

Folgerung 2 Ist $f \in C[a, b]$, so gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) .$$

Definitionen:

1. Ist $Z : a = x_0 < \dots < x_N = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so heißt

$$\Delta^Z := \max_{1 \leq k \leq N} (x_k - x_{k-1})$$

die *Feinheit* (oder das *Feinheitsmaß*) von Z .

2. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $Z : a = x_0 < \dots < x_N = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, N$. Die Zahl

$$S_Z := \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

heißt die *Riemannsche Summe* von f (zur Zerlegung Z mit *Stützstellen* $\xi_1, \dots, \xi_N$).

Satz 3 Seien $f \in C[a, b]$, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ und $(S_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge von Riemannschen Summen. Gilt

$$\lim_n \Delta^{Z_n} = 0 ,$$

so folgt

$$\lim_n S_{Z_n} = \int_a^b f(x) dx .$$

Beispiel: Berechnung von $\int_1^a \frac{1}{x} dx$ für $a > 1$.

Wähle $x_k^{(n)} := a^{\frac{k}{n}}$, $k = 0, \dots, n$, $Z_n : x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}$, und $\xi_k^{(n)} := x_{k-1}^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$.

Dann

$$S_{Z_n} = n \left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right) , \quad \lim_n \Delta^{Z_n} = 0 , \quad \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_n S_{Z_n} = \ln a .$$

Numerische Integration (zur numerischen Approximation von Integralen) durch geschickte Wahl der Stützstellen in den Riemannschen Summen: Sei $f \in R[a, b]$, $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ (*Schrittweite*), $x_k := a + kh$, $k = 0, \dots, N$,

$Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ *äquidistante Zerlegung*.

Rechteckregel: $\xi_k := x_k$, $k = 1, \dots, N$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^N f(x_k).$$

Mittelpunktregel (oder *Tangententrapezformel*): $\xi_k := \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$, $k = 1, \dots, N$,

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right).$$

13.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f genau dann, wenn gilt:

F ist differenzierbar, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Folgerung 4 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, F Stammfunktion von f . Dann sind für $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent:

(a) G ist Stammfunktion von f .

(b) $\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a, b] : G(x) = F(x) + \gamma$.

Definition: Sei $f \in R[a, b]$, $c \in [a, b]$. Die Funktion

$$[a, b] \ni x \mapsto \int_c^x f(t) dt \in \mathbb{R}$$

heißt ein *unbestimmtes Integral* von f .

Lemma 5 Sei $f \in C[a, b]$. Dann ist jedes unbestimmte Integral eine Stammfunktion.

Satz 6 (Hauptsatz) Sei $f \in C[a, b]$, F Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_{a_1}^{b_1} f(t) dt = F(b_1) - F(a_1) \quad \forall a_1, b_1 \in [a, b], a_1 \leq b_1.$$

Bemerkung: Die Fläche unter dem Graph einer stetigen Funktion läßt sich bei Kenntnis einer Stammfunktion mit Satz 6 sofort berechnen.

Bezeichnung:

$$\int f(t) dt$$

stellt ein Symbol für die Gesamtheit der Stammfunktionen dar.

Schreibweise:

$$F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$$

Beispiele:

1. $f : [0, 1] \ni t \longrightarrow t^2 \in \mathbb{R}$, Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [0, 1]$.

2. $F(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$, ist Stammfunktion von $e^{\alpha x}$. Also

$$\int_0^a e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha a} - 1).$$

3. $F(x) = \ln x$, $x > 0$, ist Stammfunktion von $\frac{1}{x}$. Also

$$\int_1^a \frac{1}{t} dt = \ln a - \ln 1 = \ln a.$$

13.3 Substitutionsregel

Satz 7 (Substitutionsregel)

Seien $f \in C[a, b]$, $g \in C[\alpha, \beta]$, und es gelte:

i. g ist stetig differenzierbar,

ii. $g([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$.

Dann gilt:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(y))g'(y) dy.$$

Beispiele:

1. Berechne $\int_{\alpha}^{\beta} (c + dy)^n dy$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Setze $g(y) := c + dy$, $y \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^n$, $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\int_{\alpha}^{\beta} (c + dy)^n dy = \frac{1}{d(n+1)} (c + dy)^{n+1} \Big|_{y=\alpha}^{y=\beta}.$$

2. Berechne $\int_c^d \sqrt{1-x^2} dx$ für $-1 \leq c < d \leq 1$.

Substitution: $t = \sin(y)$, $y \in [a, b]$, $a := \arcsin(c)$, $b := \arcsin(d)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_c^d \sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \left(d\sqrt{1-d^2} - c\sqrt{1-c^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\arcsin(d) - \arcsin(c)). \end{aligned}$$

Speziell (wegen $\frac{\pi}{2} = \arcsin(1) = -\arcsin(-1)$):

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

13.4 Partielle Integration

Satz 8 Seien $f, g \in [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx .$$

Beispiel: $\mathcal{I}_{a,b}(p) := \int_a^b t^p e^{-t} dt$ für $0 < a < b, p > 0$;

$$\mathcal{I}(p) := \lim_{b \rightarrow a} \left(\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{I}_{a,b}(p) \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}(n) = n! \quad (\text{Wir schreiben: } \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!)$$

13.5 Das Taylorsche Restglied in Integralform

Satz 9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ -mal stetig differenzierbar, und sei $x_0 \in [a, b]$. Dann gilt für $x \in [a, b]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt .$$

Bezeichnung:

$$R_n(x) := \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

ist Restglied der Taylorentwicklung in Integralform.

13.6 Integrationsrezepte

Wiederholung:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \\ \int \cos x dx &= \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x \\ \int e^{\alpha x} dx &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x \\ \int \frac{1}{1+t^2} dx &= \arctan(t) \end{aligned}$$

Zu *rationalen Funktionen*, d. h. Funktionen der Form $\frac{p}{q}$, wobei p, q Polynome, sind Stammfunktionen stets angebar. Für $\frac{p}{q}$ erreicht man durch Division mit Rest (Euklidischer Algorithmus), daß für die zu betrachtenden Polynome der Grad von p kleiner als der von q ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra läßt sich das Polynom q schreiben als Produkt von Polynomen ersten und zweiten Grades,

$$q(x) = \prod_{j=1}^m (A_j x + B_j)^{s_j} \prod_{k=1}^{\ell} (A_k x^2 + 2B_k x + C_k)^{r_k} .$$

Macht man nun für $\frac{p}{q}$ den Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{s_j} \frac{\alpha_{\ell}}{(A_j x + B_j)^{\ell}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_k} \left(\frac{\beta_i}{(A_k x^2 + 2B_k x + C_k)^i} + \frac{\gamma_i x}{(A_k x^2 + 2B_k x + C_k)^i} \right) , \end{aligned}$$

dann lassen sich die Koeffizienten $\alpha_{\ell}, \beta_i, \gamma_i$ durch Koeffizientenvergleich bestimmen. (Dieses Verfahren der Zerlegung von $\frac{p}{q}$ in einfache Funktionen heißt *Partialbruchzerlegung*.)

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} = x - 3 + \frac{4}{x + 1} . \\ 2. \quad & \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} = \frac{\alpha}{x - 1} + \frac{\beta}{x^2 + 2} + \frac{\gamma x}{x^2 + 2} , \end{aligned}$$

da für das Nennerpolynom gilt $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2)$; Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert: $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = \frac{2}{3}$.

Der obige Ansatz zeigt, daß es für rationale Funktionen genügt, die Stammfunktionen der folgenden Funktionen zu kennen:

Typ 1: $\frac{1}{(Ax + B)^k}, \quad A \neq 0, k \geq 1;$

Typ 2: $\frac{1}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k}, \quad A \neq 0, k \geq 1; \quad D := AC - B^2 > 0;$

Typ 3: $\frac{x}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k}, \quad A \neq 0, k \geq 1; \quad D := AC - B^2 > 0;$

zu Typ 1: Substitution $t = Ax + B$ (i. e. $x = A^{-1}(t - B)$),

$$\int \frac{dx}{(Ax + B)^k} = \frac{1}{A} \int \frac{dt}{t^k};$$

zu Typ 2: Substitution $x = A^{-1}(\sqrt{D}t - B)$,

$$\int \frac{dx}{(Ax + 2Bx + C)^k} = \frac{A^{k-1}}{D^{k-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k};$$

die Stammfunktion von $(t^2 + 1)^{-k}$ läßt sich rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned} k = 1 & : \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan(t) \\ k + 1 & : \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^{k+1}} = \frac{1}{2k} \frac{t}{(t^2 + 1)^k} + \frac{2k-1}{2k} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^k} \end{aligned}$$

zu Typ 3:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k} &= \frac{1}{2A} \int \frac{2Ax + 2B}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k} dx \\ &\quad - \frac{B}{A} \int \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k} \end{aligned}$$

2. Integral: Typ 2.

1. Integral: $g(x) := Ax^2 + 2Bx + C$

$$\int \frac{2Ax + 2B}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)^k} dx = \begin{cases} \ln g & , \quad k = 1 \\ \frac{1}{k+1} g^{k+1} & , \quad k > 1 \end{cases}.$$

Beispiel:

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx &= \ln(x^2 + x + 1), \\ \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

14 Reihen von Funktionen

14.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definitionen: Sei $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen.

(a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf D punktweise gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

(b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

Beispiele:

$$1. \quad f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad D = [0, 1], \quad f(x) = \lim_n f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1, \\ 0 & , \quad 0 \leq x < 1; \end{cases}$$

$(f_n)_n$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig gegen f auf D . Für jedes Intervall $[0, d]$, $d < 1$, konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

2. Sei

$$\phi(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und $f_n(x) = \phi(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Es gilt $\lim_n f_n(x) = 0$ punktweise aber nicht gleichmäßig.

Satz 1 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)

Eine Folge von Funktionen $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert d. u. n. d. gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon .$$

Satz 2 Die Folge $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiere gleichmäßig auf D gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und alle f_n , $n \in \mathbb{N}$, seien stetig in $x^0 \in D$. Dann ist f stetig in x^0 .

Folgerung 3 (Vertauschung von Grenzprozessen)

Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig auf D . Wenn die Limites $\lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ($\xi = \pm\infty$ zugelassen) existieren, dann existieren auch die folgenden Limites, und es ist

$$\lim_n \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\lim_n f_n(x) \right) .$$

14.2 Gleichmäßige Konvergenz von Reihen

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ heißt (Funktionen-)Reihe, $f_k : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Beispiele:

1. Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 .$$

2. Sei $f_k(x) = x^k - x^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $f_0 = 1$,

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x) = x^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N} ,$$

$$\Rightarrow \lim_n s_n(x) = \lim_n \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \\ 0 & , \quad 0 \leq x < 1 . \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt *gleichmäßig konvergent* auf D , wenn die *Partialsummen* $s_n := \sum_{k=0}^n f_k$ auf D gleichmäßig konvergieren. Der (gleichmäßige) Limes F erfüllt dann:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in D : |F(x) - s_n(x)| < \varepsilon .$$

Wir schreiben

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) ;$$

für den Limes bzw. die *Summe*; weiter heißen $r_n := F - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$, $n \in \mathbb{N}$, die *Reste*.

Satz 4 (*Cauchy-Kriterium für Reihen*)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf D d. u. n. d. wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n, m \geq N \quad \forall x \in D : |(s_n - s_m)(x)| < \varepsilon .$$

Bemerkung: $(s_n - s_m)(x) = \sum_{k=m+1}^n f_k(x)$ falls $n > m$.

Satz 5 (*Weierstraß'sches Majorantenkriterium*)

Es gelte $|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in D, k \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ (absolut und) gleichmäßig konvergent auf D .

Bezeichnung: $\sum_k a_k$ heißt konvergente Majorante für $\sum_k f_k$.

Satz 6 Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ sei gleichmäßig konvergent in D . Sind die Funktionen $f_k : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x^0 \in D$ stetig für (fast) alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist auch die Summe F stetig bei x^0 .

Folgerung 7 (*Vertauschungssatz*)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ sei gleichmäßig konvergent auf D und $\lim_{x \rightarrow \xi} f_k(x)$ existiere für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ($\xi = \pm\infty$ zugelassen). Dann existieren auch die folgenden Limes, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f_k(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \xi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) .$$

14.3 Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit von Funktionenreihen

Für eine konvergente Reihe $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stellt sich die Frage, ob und wann diese gliedweise integriert bzw. differenziert werden darf, also ob

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx & \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx , \\ F' & \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) . \end{aligned}$$

Beispiel:

1. Sei $s_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ so, daß $s_n(x) = nx e^{-\frac{n}{2}x^2}$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = 0 := F(x) \text{ (punktweise) ,}$$

und $\int_0^R s_n(x) dx = -e^{-\frac{n}{2}x^2} \Big|_0^R = 1 - e^{-\frac{n}{2}R^2} \geq \frac{1}{2} ,$

falls $R : 2 \leq e^{R/2}$ und $n \geq 2$. Also ist dann

$$\int_0^R s_n(x) dx \geq \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^R \lim_k s_k(x) dx .$$

Bemerkung: Die Konvergenz einer Reihe reicht also nicht aus für die gliedweise Integration.

Satz 8 Sei $F = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine auf $D := (a, b) \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Reihe integrierbarer Funktionen, dann ist auch F integrierbar und

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx .$$

Beispiel:

2. Sei $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ so, daß $s_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$. Dann gilt $\lim_n s_n(x) = 0 =: F(x)$ gleichmäßig (da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit Partialsumme $\hat{s}_n = \frac{1}{n}$ eine konvergente Majorante).
Wegen $s'_n(x) = \cos(n^2 x) \longrightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ z. B. für $x = 1$, ist

$$\left(\lim_n s_n\right)'(x) = 0 \neq \lim_n s'_n(x).$$

Bemerkung: Für die gliedweise Differentiation reicht es nicht aus, daß die Reihe selbst gleichmäßig konvergent ist.

Satz 9 *Entsteht aus einer in $D \subset \mathbb{R}$ konvergenten Reihe $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ durch gliedweise Differentiation eine gleichmäßig konvergente Reihe $F^* = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k$ mit stetigen Funktionen f'_k , dann ist $F^* = F'$.*

14.4 Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{oder} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt *Potenzreihe*; die Zahlen a_n nennt man ihre Koeffizienten, x_0 den *Entwicklungspunkt*.

Fragen: Konvergenz der Potenzreihe?

Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe?

Satz 10 (*Cauchy-Hadamard*). *Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ besitzt einen Konvergenzradius r in $0 \leq r \leq \infty$ mit der Eigenschaft, daß die Reihe für $|x| < r$ absolut konvergent und für $|x| > r$ divergent ist. Der Konvergenzradius hängt nur von $|a_n|$ ab und berechnet sich nach der Formel*

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(hierbei ist $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ zu setzen).

Bemerkungen:

1. Jeder Konvergenzradius kommt vor.

Beispiele: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{r_0}\right)^n$ konvergiert für $|x| < |r_0|$;
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$.

2. Bei Potenzreihen $\sum_n a_n(x - x_0)^n$ um einen Entwicklungspunkt x_0 gilt die Konvergenz für $x : |x - x_0| < r$ mit dem Konvergenzradius r aus Satz 10.

3. Über das Verhalten bei $x : |x| = r$ kann man im allgemeinen nichts sagen.

Satz 11 Sind die Koeffizienten a_n einer Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ für fast alle n von Null verschieden, dann läßt sich der Konvergenzradius auch berechnen durch

$$r = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

vorausgesetzt, dieser Limes existiert.

Satz 12 Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall $|x| \leq s$ mit $s < r$ (= Konvergenzradius).

Korollar 13 Eine durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ dargestellte Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

ist für $|x| < r$ stetig; insbesondere ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a_0$.

Satz 14 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Für $|x - x_0| < r$ darf die Reihe gliedweise integriert und differenziert werden,

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad |x| < r.$$

Die Potenzreihe stellt für $|x| < r$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion dar; für die Ableitungen gilt

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Satz 15 (*Identitätssatz für Potenzreihen*). Wenn die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

für $|x - x_0| < r$, $r > 0$, konvergieren und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ gilt, so ist

$$a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkungen:

1. Wenn eine Funktion überhaupt durch eine Potenzreihe darstellbar ist, so muß dies die Taylorreihe sein (s. auch Satz 16).
2. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ist f gerade, d. h. $f(x) = f(-x)$, dann muß $a_1 = a_3 = \dots = a_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, \dots$, sein; ist f ungerade, d. h. $f(x) = -f(-x)$, dann muß $a_{2n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sein.
3. Summe und Produkt von Potenzreihen: Seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

mit positiven Konvergenzradien r_a bzw. r_b . Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < \min(r_a, r_b), \\ f(x) \cdot g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right) x^n, \quad |x| < \min(r_a, r_b) \text{ („Cauchy-Produkt“)}. \end{aligned}$$

Satz 16 (*Entwicklung in die Taylorreihe*). Es sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, und es existiere ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für beliebiges $x_0 \in [a, b]$: Die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

konvergiert für alle $x \in [a, b]$, und es ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in [a, b].$$

Beispiele:

$$1. \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1;$$

$$2. \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3. \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1;$$

$$4. \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$5. \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$6. \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1;$$

$$7. \quad (\text{vgl. Beispiel 2 in Abschnitt 11.3})$$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar; die Taylorreihe im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist identisch Null, stellt also f nicht dar.

Definition: Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *analytisch*, wenn f beliebig oft differenzierbar ist und für jedes $x_0 \in D$ gilt: Die Taylorreihe von f um x_0 konvergiert in einer Umgebung von x_0 und stellt f dort dar.

15 Metrische und topologische Räume

15.1 Metrische Räume

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$$

heißt eine *Metrik (Abstandsfunktion)* auf X , wenn gilt:

- i. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- ii. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (Symmetrie)
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung)

Das Tupel (X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Beispiele:

1. Sei $X := \mathbb{R}$ oder X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Der Absolutbetrag (auf $\mathbb{R}$) definiert eine Metrik

$$d(x, y) := |x - y|, \quad x, y \in X.$$

2. Sei $X = \mathbb{R}^m$ oder X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$,

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \sum_{j=1}^m |x_j - y_j| & p = 1 \\ \left(\sum_{j=1}^m |x_j - y_j|^p \right)^{1/p} & 1 < p < \infty \\ \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j| & p = \infty \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in X$; (X, d_p) ist für jedes $p \in [1, \infty]$ ein metrischer Raum.

3. Sei X beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

ist eine Metrik auf X definiert. Sie heißt *diskrete Metrik*.

Satz 1 Sei (X, d) ein metrischer Raum,

(a) Ist $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zweimal stetig differenzierbar mit

$$f(0) = 0, \quad f'(s) > 0, \quad f''(s) \leq 0 \quad \forall s \in (0, \infty),$$

so wird durch

$$\tilde{d}(x, y) := f(d(x, y)), \quad x, y \in X,$$

eine Metrik $\tilde{d}$ auf X definiert.

(b) Durch

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X,$$

wird eine Metrik auf X erklärt.

15.2 Topologie

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$. Eine *Topologie* $\mathcal{T}$ auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit den Eigenschaften

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$;

(b) $X_1, X_2 \in \mathcal{T} \implies X_1 \cap X_2 \in \mathcal{T}$;

(c) $X_i \in \mathcal{T}, i \in I$ (I beliebige Indexmenge)

$$\implies \bigcup_{i \in I} X_i \in \mathcal{T}$$

Bezeichnung: Die Mengen aus $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*; das Tupel $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*. Wir sagen, X sei mit der Topologie $\mathcal{T}$ versehen.

Definition: Sei (X, d) metrischer Raum.

$$K(x, \varepsilon) := K_d(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

$$\overline{K}(x, \varepsilon) := \overline{K}_d(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\},$$

heißen die *offenen* bzw. *abgeschlossenen Kugeln um x mit Radius ε* . Die Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X

$$A \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : K_d(x, \varepsilon) \subset A$$

heißt die durch d erzeugte Topologie.

Lemma 2 Sei (X, d) metrischer Raum und sei $\mathcal{T}_d$ die durch d auf X erzeugte Topologie.

Es gilt:

$$(a) \quad A \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : \overline{K}_d(x, \varepsilon) \subset A ;$$

$$(b) \quad K_d(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_d \quad \forall (x, \varepsilon) \in X \times (0, \infty) .$$

Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* (bzgl. der Topologie $\mathcal{T}$) genau dann, wenn $X \setminus A$ offen ist, d. h. wenn gilt: $X \setminus A \in \mathcal{T}$.

Folgerung 3 Sei (X, d) metrischer Raum. Dann sind die Kugeln

$$K_d(x, \varepsilon), \overline{K}_d(x, \varepsilon) \quad \text{mit } (x, \varepsilon) \in X \times (0, \infty)$$

offen bzw. abgeschlossen.

Bemerkung: In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind $\emptyset, X$ stets offen und abgeschlossen.

Definition: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$, und seien $d, \tilde{d}$ Metriken auf X . Diese Metriken $d, \tilde{d}$ heißen *äquivalent*, wenn gilt: $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\tilde{d}}$.

Folgerung 4

(a) Sei (X, d) metrischer Raum und sei $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$f(0) = 0, \quad f'(s) > 0, \quad f''(s) \leq 0 \quad \forall s \in (0, \infty).$$

Dann ist die Metrik $\tilde{d}$, definiert durch

$$\tilde{d}(x, y) := f(d(x, y)), \quad x, y \in X,$$

äquivalent zu d , d. h. $d, \tilde{d}$ sind äquivalent.

(b) Die Metriken d_p , $1 \leq p \leq \infty$, auf $\mathbb{R}^m$ sind paarweise äquivalent.

Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von x* , wenn es eine offene Menge $A \subset X$ ($A \in \mathcal{T}$!) gibt mit:

$$x \in A \subset U.$$

Bezeichnung: Menge der Umgebungen $\mathcal{U}(x)$

Satz 5 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$. Es sind äquivalent:

(a) A ist offen, d. h. $A \in \mathcal{T}$.

(b) $\forall x \in A : A \in \mathcal{U}(x)$.

Definition: Der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *separiert* oder *Hausdorffsch*, wenn gilt:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \exists U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(y) : U \cap V = \emptyset.$$

Folgerung 6 Jeder metrische Raum (X, d) ist Hausdorffsch.

Lemma 7 Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{T}_Y := \{B \subset Y \mid \exists A \in \mathcal{T} : B = Y \cap A\}$$

eine Topologie auf Y .

Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $Y \subset X$. Dann heißt die Topologie $\mathcal{T}_Y$ (siehe Lemma 7) die durch $\mathcal{T}$ auf Y *induzierte Topologie*.

Definition: Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf der Menge X , so heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$ (oder $\mathcal{T}_2$ *gröber* als $\mathcal{T}_1$), wenn gilt: $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Bemerkung:

- Die feinste Topologie $\mathcal{T}_f$ besteht aus allen Teilmengen von X , d. h. $\mathcal{T}_f = P(X)$ (= Potenzmenge).
- Die größte Topologie $\mathcal{T}_g$ besteht nur aus $\emptyset$ und X .

15.3 Stetige Abbildungen

Definition: Seien $(X, \mathcal{T}_x)$ und $(Y, \mathcal{T}_y)$ topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *stetig in* $x \in X$, wenn gilt:

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(x)) \exists U \in \mathcal{U}(x) : f(U) \subset V ;$$

(b) f heißt *stetig*, wenn f stetig in jedem $x \in X$ ist.

Satz 8 Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$. Es sind äquivalent:

(a) f ist stetig.

(b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X \quad \forall B \in \mathcal{T}_Y$.

Bemerkungen:

1. Offensichtlich ist eine Topologie $\mathcal{T}_1$ auf X genau dann feiner als eine Topologie $\mathcal{T}_2$ auf X , wenn $\text{id} : X \rightarrow X$ stetig ist, wobei der Urbildbereich mit $\mathcal{T}_1$ und der Bildbereich mit $\mathcal{T}_2$ versehen ist.
2. Die induzierte Topologie $\mathcal{T}_A$ auf A , $A \subset X$ und $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, ist die gröbste Topologie, für die die Einbettung

$$\iota : A \ni x \mapsto x \in X$$

stetig ist.

Definition: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X *konvergiert gegen* x , wenn gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : x_n \in U .$$

Wir schreiben: $x_n \longrightarrow x$, $x_n \longrightarrow x$ in $\mathcal{T}$, oder $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

Definition: Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$.

f heißt *folgenstetig in* x , wenn gilt:

$$x_n \longrightarrow x \text{ in } \mathcal{T}_X \implies f(x_n) \longrightarrow f(x) \text{ in } \mathcal{T}_Y .$$

Folgerung 9 Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig in $x \in X$, so ist f folgenstetig in x .

Folgerung 10 Sei (X, d) metrischer Raum, sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologischer Raum, und sei $f : X \rightarrow Y$ folgenstetig in $x \in X$. Dann ist f stetig in x .

Folgerung 11 Seien (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ metrische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$. Es sind äquivalent:

(a) f ist stetig.

(b) $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X : d(x, y) < \delta \implies \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon .$

(c) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : d(x_n, x) \longrightarrow 0 \implies \tilde{d}(f(x_n), f(x)) \longrightarrow 0 .$

Satz 12 Sei (X, d) metrischer Raum, $y \in X$, $A \subset X$. Dann sind die Funktionen

$$f_y : X \ni x \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R} ,$$

$$f_A : X \ni x \mapsto \inf\{d(x, z) \mid z \in A\} \in \mathbb{R} ,$$

stetig.

Definition: Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$. Die Abbildung

$$X \ni x \mapsto \inf\{d(x, z) \mid z \in A\}$$

heißt *Distanzfunktion* zu A ; und wir schreiben dafür $\text{dist}(\cdot, A)$, d. h.

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, z) \mid z \in A\} , \quad x \in X .$$

15.4 Abgeschlossene Mengen

Definition: Sei (X, T) topologischer Raum, $A \subset X$.

$$\text{cl}(A) := \bigcap \{B \mid A \subset B, B \text{ abgeschlossen}\}$$

Abgeschlossene Hülle von A ;

$$\text{int}(A) := \bigcup \{B \mid B \subset A, B \text{ offen}\}$$

Offener Kern von A .

Folgerung 13 Sei (X, T) topologischer Raum, $A \subset X$. Dann gilt:

(a) $\text{cl}(A)$ ist abgeschlossen;

(b) $\text{int}(A)$ ist offen.

Satz 14 Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.

(a) A ist abgeschlossen genau dann, wenn gilt: $\forall x \in X \forall x_n \in A, n \in \mathbb{N} : x_n \rightarrow x \implies x \in A$.

(b) $\text{cl}(A) = \{x \in X \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit: } x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}, x_n \rightarrow x\}$.

Folgerung 15 In einem metrischen Raum (X, d) ist $\overline{K}_d(x, \varepsilon)$ stets abgeschlossen.

15.5 Kompakte Mengen

Definition: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *kompakt*, wenn gilt:

i. $(X, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch.

ii. $X = \bigcup_{i \in I} X_i, X_i \in \mathcal{T} \forall i \in I \implies \implies \exists m \in \mathbb{N} \exists i_1, \dots, i_m \in I : X = \bigcup_{j=1}^m X_{i_j}.$

(Jede offene Überdeckung enthält eine endliche Überdeckung.)

Definitionen: Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subset X$.

1. A heißt *kompakt*, wenn $(A, \mathcal{T}_A)$ kompakt ist, wobei $\mathcal{T}_A$ die durch $\mathcal{T}$ auf A induzierte Topologie ist.

2. A heißt *relativ kompakt*, wenn $\text{cl}(A)$ kompakt ist.

Satz 16 Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Hausdorffsche topologische Räume. Ist $(X, \mathcal{T}_X)$ kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so ist $f(X)$ kompakt.

Satz 17 Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

Definition:

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X eine in X konvergente Teilfolge enthält.
2. Eine Teilmenge $A \subset X$ des metrischen Raumes (X, d) heißt *total beschränkt*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \exists x_1, \dots, x_m \in X : A \subset \bigcup_{j=1}^m K_d(x_j, \varepsilon) .$$

Satz 18 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Es gilt:

- (a) X ist kompakt genau dann, wenn X folgenkompakt ist.
- (b) Ist X kompakt, so ist X total beschränkt.

Folgerung 19 Ist (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$, A kompakt, dann ist A abgeschlossen.

16 Vollständige metrische Räume, Banachräume

16.1 Vollständige metrische Räume

Definitionen: Sei (X, d) metrischer Raum

1. Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt *Cauchy-Folge* in X , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

2. Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergent ist.

Beispiele:

1. Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$, $d = \text{Absolutbetrag}$, ist vollständig.
2. Der Raum $\mathbb{R}^m$ ist bezüglich der Metriken d_p , $1 \leq p \leq \infty$, vollständig.

Satz 1 Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.

- (a) Ist (X, d) kompakt, so ist (X, d) vollständig.
- (b) (X, d) ist kompakt genau dann, wenn (X, d) vollständig und X total beschränkt ist.
- (c) Ist (X, d) vollständig, so ist A relativ kompakt genau dann, wenn A total beschränkt ist.

Definition: Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$. f heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon .$$

Bezeichnung: $\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}$

Satz 2 Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, sei $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Ist (X, d_X) kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

16.2 Der Raum der beschränkten und stetigen Abbildungen

Definition: Sei X eine Menge, (Y, d_Y) ein metrischer Raum.

- (a) $A \subset Y$ heißt *beschränkt*, wenn der Durchmesser

$$\delta_A := \sup\{d_Y(y, z) \mid y, z \in A\}$$

endlich ist.

(b) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *beschränkt*, wenn $f(X)$ beschränkt ist.

Bezeichnung: $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume bzw. (Y, d_Y) metrischer Raum.

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ stetig}\}, \mathcal{B}(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ beschränkt}\}.$$

Lemma 3 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Dann wird

$$\mathcal{C}_b(X, Y) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f \text{ beschränkt}\}$$

zusammen mit der Metrik d_∞ , definiert durch

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

zu einem vollständigen metrischen Raum.

Folgerung 4 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und sei (Y, d_Y) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{C}_b(X, Y)$, und $\mathcal{C}(X, Y)$ wird zusammen mit der Metrik d_∞ zu einem vollständigen metrischen Raum.

Definition: Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ heißt *gleichgradig stetig*, falls gilt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in X \quad \forall f \in \mathcal{F} : d_X(x, x') < \delta \\ \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz von Arzela–Ascoli

Sei (X, d_X) kompakter metrischer Raum, sei (Y, d_Y) vollständiger metrischer Raum und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{F}$ ist relativ kompakte Teilmenge in $(\mathcal{C}(X, Y), d_\infty)$.

(b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig und die Mengen

$$\mathcal{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}, \quad x \in X,$$

sind relativ kompakte Teilmengen in (Y, d_Y) .

16.3 Normierte Räume; Banachräume

Definition: Ein Vektorraum X (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt *normiert*, wenn es eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit

- (a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{K}, x \in X$ (Homogenität)
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in X$ (Dreiecksungleichung).

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm* und $(X, \|\cdot\|)$ ein *normierter Raum*.

Folgerung 5 Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X , so wird durch

$$d_{\|\cdot\|} : X \times X \ni (x, y) \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}$$

eine Metrik erzeugt.

Beispiele:

1. In $X = \mathbb{R}^n$ werden die Metriken $d_p, 1 \leq p \leq \infty$, durch folgende Normen erzeugt:

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty) \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & p = \infty \end{cases}; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakter topologischer Raum. Offenbar ist $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und durch

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}),$$

wird eine Norm definiert.

Definition: Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, wenn der metrische Raum $(X, d_{\|\cdot\|})$ vollständig ist.

Beispiele:

3. Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakter topologischer Raum, sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum. Dann ist $\mathcal{C}(X, Y)$ ein Vektorraum und durch

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y, \quad f \in \mathcal{C}(X, Y),$$

wird eine Norm auf $\mathcal{C}(X, Y)$ erklärt; $\mathcal{C}(X, Y)$ ist sogar ein Banachraum.

4. Sei $X := C[-1, 1]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen von $[-1, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Offenbar ist

$$\|\cdot\|_1 : X \ni f \mapsto \int_{-1}^1 |f(t)| dt \in \mathbb{R}$$

eine Norm auf X . Bzgl. $\|\cdot\|_1$ ist X nicht vollständig.

16.4 Gleichmäßige Konvergenz

Definitionen: Sei X eine Menge, $X \neq \emptyset$, sei (Y, d_Y) metrischer Raum, sei $f_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$.

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : X \rightarrow Y$, wenn gilt:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

(b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow Y$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

Satz 6 Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume, sei $x^0 \in X$, sei $f_n : X \rightarrow Y$ stetig in x^0 , $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert dann $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow Y$, so ist f stetig in x^0 .

Satz 7 (Satz von DINI)

Sei (X, d_X) kompakter metrischer Raum und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Es gelte: $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallende Nullfolge für alle $x \in X$.

Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0 (= Nullfunktion).

17 Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

17.1 Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Raum

Bekanntlich ist

$$X := \mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$$

ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.

Ziel: Verifikation der Metrikeigenschaften von d_p für $p \in (1, \infty)$.

Lemma 1

(a) Für $x \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ gilt: $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$.

(b) Für $a, b \in (0, \infty)$ und $\alpha, \beta \in (0, 1)$ mit $\alpha + \beta = 1$ gilt: $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$.

(c) Für $a, b \in (0, \infty)$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt: $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

Lemma 2 (HÖLDER'sche Ungleichung)

Seien $a_i, b_i \in (0, \infty)$, $1 \leq i \leq n$, und seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

Satz 3 (MINKOWSKI'sche Ungleichung)

Seien $a_i, b_i \in (0, \infty)$, $1 \leq i \leq n$, und sei $p \in (1, \infty)$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}.$$

Folgerung 4

(a) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ ist für jedes $p \in [1, \infty]$ ein Banachraum.

(b) Die Kugeln

$$\overline{K}_p(x, r) := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\|_p \leq r \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, r \in [0, \infty),$$

sind für jedes $p \in [1, \infty]$ kompakt.

(c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, p \in [1, \infty].$

Definition: Sei X ein Vektorraum (über $\mathbb{K}$) und seien $\|\cdot\|, |\cdot|$ zwei Normen auf X . $\|\cdot\|, |\cdot|$ heißen *äquivalent*, wenn es $\alpha, \beta > 0$ gibt mit:

$$\alpha \|x\| \leq |x| \leq \beta \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Satz 5 Alle Normen auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

Folgerung 6 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Es gilt:

(a) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

(b) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

i. A ist kompakt;

ii. A ist abgeschlossen und beschränkt.

Beispiel: Wir definieren für $p \in [1, \infty]$:

$$\ell_p := \begin{cases} \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}, & p < \infty \\ \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}, & p = \infty \end{cases}.$$

Sei $p \in [1, \infty]$. Wir setzen:

$$q := \begin{cases} 1 & \text{falls } p = \infty \\ \frac{p}{p-1} & \text{falls } p \in (1, \infty) \\ \infty & \text{falls } p = 1 \end{cases}.$$

Es gilt:

i. $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^q \right)^{1/q}$

ii. Durch

$$\|\cdot\|_p : \ell_p \ni x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R}$$

wird eine Norm definiert.

iii. $\dim \ell_p = \infty$.

iv. Die abgeschlossene Einheitskugel

$$\overline{K}(0, 1) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p \mid \|x\|_p \leq 1 \right\}$$

ist nicht kompakt.

17.2 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum

Definition: Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$$

heißt das *euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$* .

Folgerung 7

$$(a) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

$$(b) \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0.$$

$$(c) \quad \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$(e) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$(f) \quad |\langle x, y \rangle| = \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} \text{ genau dann, wenn } x, y \text{ linear abhängig sind.}$$

Definition: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

(a) Die Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

heißt der *Winkel zwischen x und y* .

(b) x, y heißen *orthogonal* (oder *senkrecht*) zueinander, wenn gilt $\langle x, y \rangle = 0$.

Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Satz von Pythagoras

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \langle x, y \rangle = 0.$$

17.3 Kurven in $\mathbb{R}^n$

Definitionen: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Eine stetige Abbildung $\varphi = [a, b] \rightarrow X$ heißt *Weg (in X mit Parameterintervall $[a, b]$)*; die Bildmenge

$$\Gamma_\varphi := \left\{ \varphi(t) \mid t \in [a, b] \right\}$$

heißt dann die durch φ erzeugte *Kurve* mit *Anfangspunkt* $\varphi(a)$ und *Endpunkt* $\varphi(b)$.

- (b) Ein Weg φ in X heißt *JORDAN-Weg*, wenn φ injektiv ist.
- (c) Ein Weg $\varphi = [a, b] \rightarrow X$ heißt *geschlossen*, wenn $\varphi(a) = \varphi(b)$ gilt.
- (d) Ein Weg $\varphi = [a, b] \rightarrow X$ heißt *geschlossener JORDAN-Weg*, wenn φ geschlossen ist und $\varphi|_{(a, b)}$ injektiv ist.

Bezeichnung: *Koordinatenabbildungen* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad , \quad t \in [a, b] , \\ \varphi_i(t) &:= \langle \varphi(t), e^i \rangle \quad , \quad t \in [a, b] , \quad 1 \leq i \leq n . \end{aligned}$$

wobei $e^i = i$ -ter Einheitsvektor.

Beispiele:

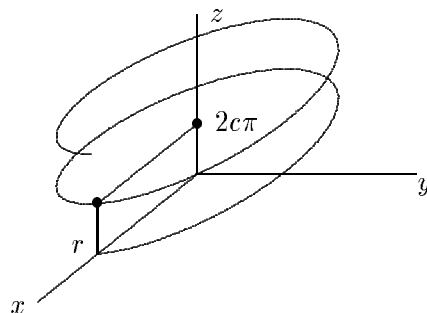
- $$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] \ni t &\mapsto (1 + t, 2 - t) \in \mathbb{R}^2 , \\ \psi : [-2, 2] \ni s &\mapsto \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}s, \frac{3}{2} + \frac{1}{4}s \right) \in \mathbb{R}^2 . \end{aligned}$$

2. $\varphi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$,
 $\psi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos 2t, \sin 2t) \in \mathbb{R}^2$;

ψ ist kein Jordan-Weg.

3. $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ct) \in \mathbb{R}^3$ mit $r > 0, c > 0$

heißt *Schraubenlinie* mit *Ganghöhe* $2\pi c$

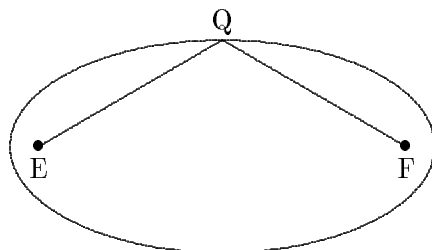


4. $\varphi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$, mit $a > b > 0$,

ist ein geschlossener Jordan-Weg.

Ellipse

$$\left\{ x, y \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$



Brennpunkte: $E = (-e, 0)$, $F = (e, 0)$

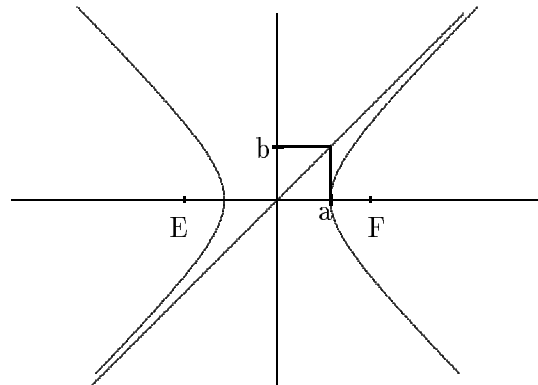
$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{„lineare Exzentrizität“})$$

5. $\varphi_r : \mathbb{R} \ni t \mapsto (a \cosh t, b \sinh t) \in \mathbb{R}^2$, $a, b > 0$,

ist kein Weg, aber jede Einschränkung auf ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall ist ein Jordan-Weg. Die zugehörige Kurve ist der rechte Ast der

Hyperbel

$$\left\{ x, y \left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right. \right\}$$



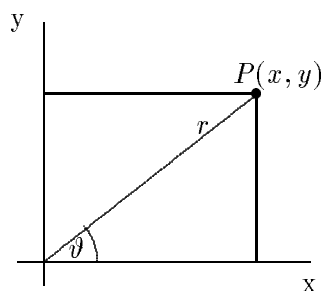
Brennpunkte: $E = (-e, 0)$, $F = (e, 0)$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{„lineare Exzentrizität“})$$

Definition: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: $(x, y) = (r, \vartheta)$, wobei

$r := \sqrt{x^2 + y^2}$: Abstand vom Nullpunkt

$\vartheta \in [0, 2\pi)$ mit: $\frac{x}{r} = \cos \vartheta$, $\frac{y}{r} = \sin \vartheta$;



Beispiele:

$$1. \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad p > 0, \quad \varepsilon \geq 0.$$

$\varepsilon = 0$: Kreis mit Radius p

$\varepsilon \in (0, 1)$: Ellipse:

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad e := \sqrt{a^2 - b^2}$$

$\varepsilon = 1$: Parabel:

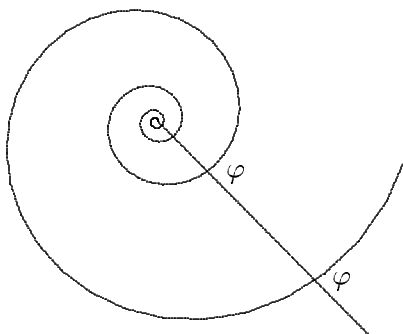
$$y^2 + 2p(x - \frac{1}{2}p) = 0$$

$\varepsilon > 1$: Hyperbel

$$\frac{(x-e)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad e := \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. *Archimedische Spirale*: $r = a\vartheta$, $\vartheta \in [0, \infty)$, $a > 0$.

3. *Logarithmische Spirale*: $r = a^\vartheta$, $\vartheta \in [0, \infty)$, $a > 0$.



Bezeichnung: Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg. Mit $\mathcal{Z}[a, b]$ sei die *Menge der Zerlegungen* von $[a, b]$ bezeichnet,

$$\mathcal{Z}[a, b] = \left\{ Z \left| \begin{array}{l} Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \text{ der Form} \\ Z : a = t_0 < \dots < t_m = b \end{array} \right. \right\}$$

Definition: *Länge des Polygonzugs*

$$\ell(Z, \varphi) := \sum_{k=1}^m \|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\|_2$$



Definition: Ein Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar*, wenn es eine Konstante λ gibt, so daß gilt:

$$\ell(Z; \varphi) \leq \lambda \quad \forall Z \in \mathcal{Z}[a, b] .$$

In diesem Falle wird die reelle Zahl

$$L(\varphi) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}[a, b]} \ell(Z; \varphi)$$

die *Länge von φ* genannt.

Definition: Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn es $\nu \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}[a, b]$ gilt:

$$\text{var}(Z; f) := \sum_{i=1}^p |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \nu ,$$

wobei $Z : a = t_0 < \cdots < t_p = b$.

$V_a^b(f) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}[a, b]} \text{var}(Z; f)$ heißt dann die *Totalvariation von f* und wir schreiben

$$f \in BV[a, b] .$$

Satz 8 Der Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn jede Koordinatenfunktion φ_i von beschränkter Variation ist.

Beispiel:

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = 0 \\ x \cos \frac{\pi}{x} & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Es gilt

$$\text{var}(Z; f) \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

und

$$f \notin BV[0, 1] .$$

Definition: Sind $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Wege mit $\varphi(b) = \psi(b)$, so wird durch

$$[a, c] \ni t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & , \text{ falls } t \leq b \\ \psi(t) & , \text{ falls } t > b \end{cases}$$

ein Weg erklärt, den man die *Summe der Wege* φ, ψ nennt und mit $\varphi \oplus \psi$ bezeichnet.

Bezeichnung: $\Gamma_\varphi \oplus \Gamma_\psi$ für die zugehörige Kurve.

Lemma 9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$. Dann sind äquivalent:

$$(a) \quad f \in BV[a, b] ;$$

$$(b) \quad f|_{[a, c]} \in BV[a, c] , \quad f|_{[c, b]} \in BV[c, b] .$$

Zusatz: Sind (a), (b) erfüllt, so gilt:

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f .$$

Satz 10 Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg, sei $c \in (a, b)$. Dann sind äquivalent:

$$(a) \quad \varphi \text{ ist rektifizierbar.}$$

(b) $\varphi|_{[a,c]}, \varphi|_{[c,b]}$ sind rektifizierbar.

Zusatz: Sind (a), (b) erfüllt, so gilt:

$$L(\varphi) = L(\varphi|_{[a,c]}) + L(\varphi|_{[c,b]}) .$$

Definition: Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Die Funktion

$$s_\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad t = a \\ L(\varphi|_{[a,t]}) & , \quad t > a \end{cases}$$

heißt *Weglängenfunktion*.

Satz 11 Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Es gilt:

(a) Die Weglängenfunktion s_φ ist stetig und monoton wachsend.

(b) Ist φ ein Jordan-Weg, so ist s_φ sogar streng monoton wachsend.

Satz 12 Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Jordan-Weg und sei Γ_φ die zugehörige Jordan-Kurve. Dann gibt es einen rektifizierbaren Jordan-Weg $\psi : [0, L(\varphi)] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

$$\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi, \quad L(\psi|_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, L(\varphi)] .$$

Lemma 13 (Lemma von TIKHONOV)

Seien X, Y metrische Räume, sei X kompakt, und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig.

Satz 14 Seien $\varphi^1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi^2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Wege und es gebe $f : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ mit

$$f \text{ stetig, streng monoton, } f([a_2, b_2]) = [a_1, b_1], \quad \varphi^2 = \varphi^1 \circ f .$$

Dann sind äquivalent:

(a) φ^1 ist rektifizierbar;

(b) φ^2 ist rektifizierbar.

Zusatz: Sind (a), (b) erfüllt, so gilt: $L(\varphi^1) = L(\varphi^2)$.

Folgerung 15 Seien φ, ψ Jordan-Wege mit $\Gamma_\varphi = \Gamma_\psi$. Dann gilt: $L(\varphi) = L(\psi)$.

Definition: Sei Γ eine Jordan-Kurve, d. h. es gibt einen Jordan-Weg φ mit $\Gamma = \Gamma_\varphi$. Dann heißt $L(\Gamma) := L(\varphi)$ die *Kurvenlänge* von Γ .

17.4 Differenzierbare Wege

Definition: Ein Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ heißt (stetig) differenzierbar, wenn jede Koordinatenfunktion φ_i (stetig) differenzierbar ist;

$$\dot{\varphi}(t) := (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)), \quad t \in [a, b].$$

Satz 16 Sei der Vektor $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist φ rektifizierbar und es gilt:

(a) Die Weglängenfunktion s_φ ist stetig differenzierbar, $s'_\varphi(t) = \|\dot{\varphi}(t)\|_2$, $t \in [a, b]$.

(b) $L(\varphi) = \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\|_2 dt$.

Folgerung 17 Ist der Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Summe stetig differenzierbarer Wege, d. h.

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_\ell,$$

φ_i stetig differenzierbarer Weg, $1 \leq i \leq \ell$,

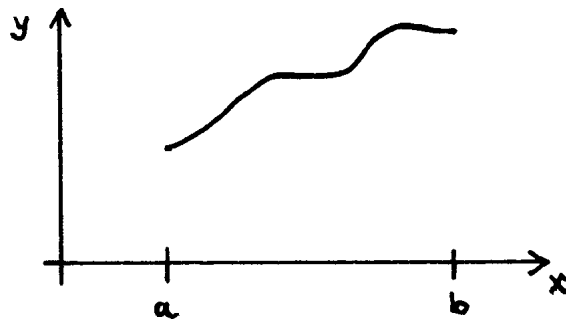
so gilt:

$$\varphi \text{ ist rektifizierbar, } L(\varphi) = \sum_{i=1}^{\ell} L(\varphi_i)$$

Beispiele:

1. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt in natürlicher Weise einen Weg in $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi_f : [a, b] \ni t \mapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 .$$



Dieser Weg ist rektifizierbar genau dann, wenn gilt: $f \in BV[a, b]$.

Ist f stetig differenzierbar, so gilt:

$$L(\varphi_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

2. Die Ellipse mit den Halbachsen $a, b, 0 < b < a$, besitzt die Darstellung durch den geschlossenen Jordan-Weg

$$\varphi : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2 .$$

Umfang U der Ellipse ($k := a^{-1}\sqrt{a^2 - b^2}$):

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt .$$

Das Integral

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

heißt *vollständiges elliptisches Integral*.

3. Ein Stück einer Archimedischen Spirale wird durch den Jordan-Weg

$$\varphi : [0, 2\pi] \ni \vartheta \mapsto (\vartheta \cos \vartheta, \vartheta \sin \vartheta) \in \mathbb{R}^2$$

dargestellt. Länge:

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} (1 + \vartheta^2)^{1/2} d\vartheta$$

Bezeichnung: Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\dot{\varphi}(t) := (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)) ,$$

$$\ddot{\varphi}(t) := (\varphi''_1(t), \dots, \varphi''_n(t)) .$$

Bemerkung: Für die Weglängenfunktion s_φ gilt:

$$s'_\varphi(t) = \|\dot{\varphi}(t)\|_2 , \quad t \in [a, b] ,$$

$$s'_\varphi(t)s''_\varphi(t) = \langle \dot{\varphi}(t), \ddot{\varphi}(t) \rangle , \quad t \in [a, b] .$$

Weiterhin gilt:

$$s_\varphi(s) = s , \quad s \in [0, L(\varphi)] .$$

$$\|\dot{\varphi}(s)\|_2 = 1 , \quad s \in [0, L(\varphi)] .$$

$$\langle \dot{\varphi}(s), \ddot{\varphi}(s) \rangle = 0 , \quad s \in [0, L(\varphi)] .$$

Definition: $\|\ddot{\varphi}(s)\|_2$ heißt *Krümmung im Punkt $\varphi(s)$* , $\frac{1}{\|\ddot{\varphi}(s)\|_2}$ heißt *Krümmungsradius in $\varphi(s)$* , falls $\ddot{\varphi}(s) \neq 0$.

18 Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

(Lit.: Insbes. Heuser, Teil 2 (1993); auch Kerner II (1980), Walter 2 (1992))

18.1 Hinführung

Wiederholung: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ offen, $x^0 \in U$.

f ist differenzierbar in x^0 genau dann, wenn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \neq x^0}} \frac{f(x) - f(x^0)}{x - x^0} (= : f'(x^0))$$

existiert.

Interpretationen (Setze $m := f'(x^0)$)

(a) m ist Grenzwert von Differentialquotienten und daher die Steigung der resultierenden Tangente (an $f(x^0)$).

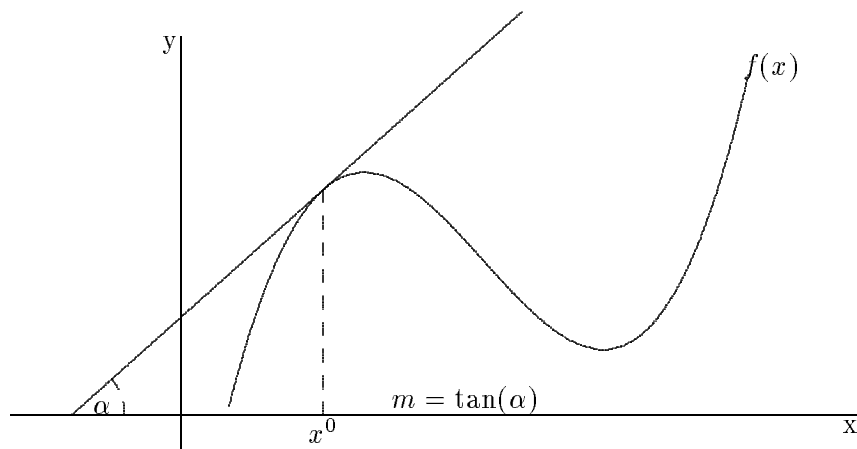
(b) m induziert eine (Hyper-)Ebene $H(x^0)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die den Graph von f berührt,

$$H(x^0) := \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x^0) + m(x - x^0) \right\}.$$

(c) m definiert eine (affine) Funktion g , die f in der Umgebung von x^0 geeignet approximiert (s. Satz 10.2):

$$g(x) := f(x^0) + m(x - x^0), \quad x \in U,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \neq x^0}} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - x^0|} = 0.$$

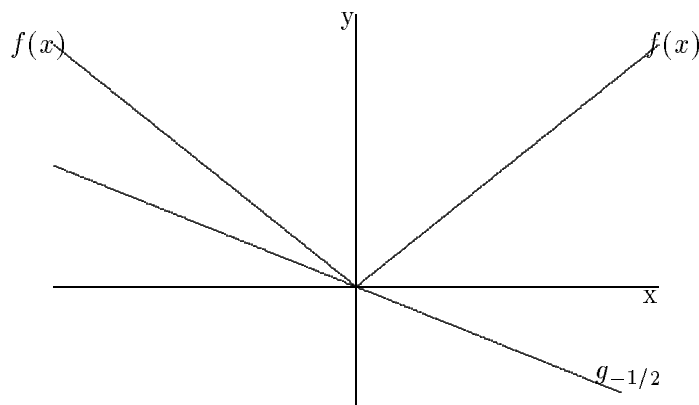


Bemerkung: Eine Kombination von (b) und (c) zeigt, daß die Hyperebene $H(x^0)$ den Graph von f in $(x^0, f(x^0))$ in „tangentialer“ Weise berührt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \neq x^0}} \frac{\|(x, f(x)) - (x, g(x))\|_2}{|x - x^0|} = 0$$

Beispiel:

$$1. \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto |x|, \quad x^0 = 0 ;$$



$$g_m : \mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x^0) + m(x - x^0) \in \mathbb{R}, \quad m \in [-1, 1].$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \neq x^0}} \frac{\|(x, f(x)) - (x, g_m(x))\|_2}{|x - x^0|} \text{ existiert} \iff m = 0.$$

Für $m = 0$ ist aber

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ x \neq x^0}} \frac{\|(x, f(x)) - (x, g_0(x))\|_2}{|x - x^0|} = 1.$$

Forderung Eine bei x^0 „differenzierbare“ Funktion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad U \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen}, \quad x^0 \in U$$

soll auch in x^0 stetig sein (vgl. Folgerung 10.3 im $\mathbb{R}^1$).

Bemerkung: Eine eindimensionale Betrachtung reicht für diese Forderung **nicht** aus!

Bezeichnung:

$$f_1 : U_1 \ni x_1 \longmapsto f(x_1, x_2^0) \in \mathbb{R},$$

$$f_2 : U_2 \ni x_2 \longmapsto f(x_1^0, x_2) \in \mathbb{R},$$

wobei $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ offen mit $U_1 \times U_2 \subset U \subset \mathbb{R}^2$ und $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$.

Beispiel:

$$2. \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \longmapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x_1 x_2 = 0, \\ 1 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

$f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x^0 = (0, 0)$, und f_1, f_2 sind differenzierbar in 0.

Aber f ist nicht stetig in x^0 .

18.2 Partielle Ableitungen

Definition: Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) f heißt im Punkt x^0 *partiell* nach $x_k, k \in \{1, \dots, n\}$, *differenzierbar*, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

existiert; man setzt dann für den Limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) \text{ oder } f_{x_k}(x^0) \text{ oder } D_k f(x^0).$$

(b) f heißt *partiell differenzierbar* in $x^0 \in U$, wenn f für jedes $k = 1, \dots, n$ in x^0 partiell nach x_k differenzierbar ist.

(c) f heißt *partiell differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

Bemerkung: f ist genau dann in $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$ partiell nach x_k differenzierbar, wenn die *partielle Funktion*

$$f_k : U_k \ni x_k \mapsto f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R},$$

$U_k \subset p_k(U) \subset \mathbb{R}$ ($p_k :=$ kanonische Projektion auf k -te Komponente) bei x_k^0 differenzierbar ist.

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad x_1 = x_2 = 0, \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0). \end{cases}$

Die partiellen Funktionen f_1 bzw. f_2 sind für jedes (feste) x_2 bzw. x_1 stetig. f ist in $(0, 0)$ unstetig. Die partiellen Ableitungen existieren überall:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, 0) &= 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

analoges gilt für $\partial f / \partial x_2$.

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Sind $\frac{\partial f}{\partial x_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ für jedes $k = 1, \dots, n$ partiell differenzierbar, dann heißt f *zweimal partiell differenzierbar*.

Bezeichnung:

1. Die *partiellen Ableitungen 2. Ordnung* schreibt man als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \text{ oder } \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \text{ oder } D_j D_k f; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \text{ falls } j = k.$$

2. Partielle Ableitungen dritter, vierter, ... Ordnung schreibt man als, z. B.,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_4 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^5 f}{\partial x_2^5}, \quad \dots$$

Bei den folgenden Sätzen in diesem Abschnitt beschränken wir uns meist auf den $\mathbb{R}^2$; die Übertragung auf den $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ist offensichtlich. Wir setzen im Fall $n = 2$ noch $x = x_1$, $y = x_2$.

Satz 1 Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze beschränkte partielle Ableitungen f_x, f_y in U , dann ist f stetig in U .

Beispiel: Für die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & , \quad x = y = 0 , \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) , \end{cases}$$

ist $\partial^2 f / \partial x \partial y \neq \partial^2 f / \partial y \partial x$ bei $(0, 0)$.

Satz 2 Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x^0, y^0) \in U$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ besitze partielle Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} in U . Weiter seien f_x, f_y stetig in U und f_{xy}, f_{yx} seien stetig im Punkt (x^0, y^0) . Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0) .$$

Satz 3 (Satz von H. A. SCHWARZ) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $(x^0, y^0) \in U$, f besitze partielle Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} in U , f_x und f_y seien stetig in U und f_{xy} sei im Punkt (x^0, y^0) stetig. Dann existiert f_{yx} in (x^0, y^0) , und es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^0, y^0) .$$

Bezeichnungen: U sei nichtleere, offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$.

$$C^k(U) := \left\{ f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{alle partiellen Ableitungen der Ordnung} \right. \\ \left. \leq k \text{ existieren in } U \text{ und sind dort stetig} \right\} ;$$

$$C^0(U) := C(U) = C(U, \mathbb{R}) ;$$

$$C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) .$$

$f \in C^k(U)$ heißt auch C^k -Funktion.

Folgerung 4 Sei U nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für jedes $f \in C^k(U)$ sind die partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ besitze partielle Ableitungen bei $x \in U$. Dann heißt der Vektor

$$(f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

der *Gradient* von f bei x . Wir schreiben dafür

$$\text{grad } f(x) \quad \text{oder} \quad \nabla f(x) \quad (\nabla = \text{Nabla-Operator})$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases} \\ \text{grad } f(x, y) &= \left(y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ \text{grad } f(0, 0) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Jede Komponente des Gradienten ist unstetig in $(0, 0)$.

18.3 Vollständige Differenzierbarkeit

Im folgenden sei der $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ immer mit der euklidischen Norm versehen, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

Definitionen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- (a) $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *vollständig* (oder *total*) *differenzierbar* im Punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$, wenn es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : K(0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n + r(h) \quad \forall h : \|h\| < \delta,$$

wobei δ hinreichend klein ist, $K(x^0, \delta) \subset U$ und

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 .$$

- (b) $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *vollständig differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt aus U vollständig differenzierbar ist.

Bemerkungen:

1. Die vollständige Differenzierbarkeit in einem Punkt x^0 bedeutet, daß man f in der Nähe von x^0 durch eine affine Funktion

$$f(x^0) + \alpha_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + \alpha_n(x_n - x_n^0)$$

approximieren kann.

2. Die vollständige Differenzierbarkeit stellt die Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^1$ dar, da für differenzierbares f gilt

$$f(x) = f(x^0) + (x - x^0)f'(x^0) + (x - x^0)\varphi(x - x^0)$$

$$\text{mit } \varphi(h) := \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h} - f'(x^0), \quad r(h) := h \cdot \varphi(h) \text{ und } \alpha_1 := f'(x^0).$$

Bezeichnung: Wir lassen im folgenden „vollständig“ oder „total“ bei der Differenzierbarkeit weg.

Satz 5 Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x^0 \in U$, dann ist f stetig und partiell differenzierbar bei x^0 ; der Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in der Definition der Differenzierbarkeit ist eindeutig bestimmt:

$$\alpha = \text{grad } f(x^0) .$$

Bezeichnung: Ist f differenzierbar bei x , dann bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ als (*totale oder vollständige*) *Ableitung* und schreiben dafür

$$f'(x) \quad \text{oder} \quad Df(x) \quad \text{oder} \quad df(x).$$

Nach Satz 5 ist für $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'(x) = \text{grad } f(x) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f'(x)e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Satz 6 Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in U$. Es gelte

(a) f ist partiell differenzierbar in $K(x^0, r)$ für ein $r > 0$ mit $K(x^0, r) \subset U$;

(b) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k} : K(x^0, r) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind in x^0 stetig für jedes $k = 1, \dots, n$.

Dann ist f differenzierbar in x^0 .

Folgerung 7 Eine C^1 -Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen, ist in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar und somit auch stetig.

Bemerkung: Das Beispiel in Abschnitt 18.2 zeigt, daß eine Funktion differenzierbar sein kann, ohne eine C^1 -Funktion zu sein.

Wir erweitern die Aussagen dieses Abschnitts noch auf Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, d. h. f habe Komponenten $f_1, \dots, f_m$,

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f_j : U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definition: Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U nichtleer und offen.

(a) f heißt in $x^0 \in U$ *partiell differenzierbar* nach x_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, wenn jede Komponente f_j , $1 \leq j \leq m$, in x^0 partiell nach x_k differenzierbar ist.

(b) f heißt in $x^0 \in U$ (*vollständig* oder *total*) *differenzierbar*, wenn es eine (m, n) -Matrix A gibt, so daß für alle $x^0 + h \in K(x^0, \delta)$, δ hinreichend klein, die Darstellung gilt

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = Ah + r(h)$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 .$$

Die Definitionen der partiellen Differenzierbarkeit (in ganz U), der stetigen partiellen Differenzierbarkeit sowie der vollständigen Differenzierbarkeit in ganz U übertragen sich analog.

Nach Satz 5 ist die Abbildung A in der Definition der Differenzierbarkeit eindeutig bestimmt und hat die Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} .$$

Bezeichnung: Die Matrix $(\partial f_j / \partial x_i)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobimatrix* der Funktion f ; wir schreiben dafür

$$f' := Df := \frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (\partial f_j / \partial x_i)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1 \\ \vdots \\ \text{grad } f_m \end{pmatrix} .$$

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei *konstant*, d. h. $f(x) = c \in \mathbb{R}^m \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $f'(x) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei *linear*, also $f(x) = Mx$, $x \in \mathbb{R}^n$, mit einer (m, n) -Matrix M . Dann gilt $f'(x) = M \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Für die identische Abbildung $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$, hat man $f'(x) = E = \text{Einheitsmatrix}$.

3. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei *affin*, d. h. $f(x) = Mx + b$ mit einer (m, n) -Matrix M und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $f'(x) = M \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$4. \quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ,$$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 e^{x_1 x_2} ,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 e^{2x_2 x_3} ,$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3^2 e^{x_1 x_2} & x_1 x_3^2 e^{x_1 x_2} & 2x_3 e^{x_1 x_2} \\ x_2 e^{2x_2 x_3} & (x_1 + 2x_1 x_2 x_3) e^{2x_2 x_3} & 2x_1 x_2^2 e^{2x_2 x_3} \end{pmatrix} .$$

Definition:

$$\begin{aligned} C^k(U) &:= C^k(U, \mathbb{R}^m) &:= \left\{ f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f_j \in C^k(U) \quad \forall 1 \leq j \leq m \right\} \\ C^\infty(U) &:= C^\infty(U, \mathbb{R}^m) &:= \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

18.4 Differentiationsregeln

Satz 8 Seien $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U offen, in $x^0 \in U$ differenzierbar. Dann ist auch $f + g$ und αf , $\alpha \in \mathbb{R}$, in x^0 differenzierbar, und es ist,

$$(f + g)'(x^0) = f'(x^0) + g'(x^0) , \quad (\alpha f)'(x^0) = \alpha f'(x^0) .$$

Satz 9 (Kettenregel) Seien $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : G \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^r$, U, G offen und $G \supset f(U)$. Ist f in $x^0 \in U$ und g in $f(x^0)$ differenzierbar, dann ist $h := g \circ f$ in x^0 differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(x^0) = g'(f(x^0)) f'(x^0) , \quad \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x^0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(x^0)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0) , \quad 1 \leq j \leq r , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Bemerkungen:

1. Die Formel der Kettenregel hat die gleiche Form wie im $\mathbb{R}^1$ (vgl. Satz 10.6), bedeutet hier aber ausführlich geschrieben die Multiplikation der zwei entsprechenden Funktionalmatrizen.

2. Spezialfall

$$f(u_1, \dots, u_n) \quad \text{und} \quad u_i : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n :$$

Hierbei sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen, f differenzierbar,

$$\varphi(t) := f(u_1(t), \dots, u_n(t)) \quad \text{existiere auf } D,$$

und u_i , $1 \leq i \leq n$, seien auf D differenzierbar. Dann ist auch φ auf D differenzierbar, und dort gilt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{du_n}{dt}.$$

Satz 10 Die Funktionen $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen, seien in $x^0 \in U$ differenzierbar. Dann ist auch fg in x^0 differenzierbar mit

$$(fg)'(x^0) = f(x^0)g'(x^0) + g(x^0)f'(x^0).$$

Ist $g(x^0) \neq 0$, so ist f/g in x^0 differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x^0) = \frac{g(x^0)f'(x^0) - f(x^0)g'(x^0)}{(g(x^0))^2}.$$

Satz 11 Die Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, seien in $t^0 \in D$ differenzierbar. Dann ist auch $f \cdot g : D \ni t \longmapsto \langle f(t), g(t) \rangle \in \mathbb{R}$ in t^0 differenzierbar mit der Ableitung

$$(f \cdot g)'(t^0) = \langle f(t^0), g'(t^0) \rangle + \langle g(t^0), f'(t^0) \rangle,$$

wobei

$$f'(t^0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dt}(t^0) \\ \vdots \\ \frac{df_m}{dt}(t^0) \end{pmatrix}, \quad g'(t^0) = \begin{pmatrix} \frac{dg_1}{dt}(t^0) \\ \vdots \\ \frac{dg_m}{dt}(t^0) \end{pmatrix}.$$

18.5 Die Richtungsableitung

Definition: Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen, und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. f hat *Richtungsableitung in $x^0 \in U$ in Richtung v* , wenn der folgende Limes existiert,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} t^{-1} \left(f(x^0 + tv) - f(x^0) \right) =: \left. \frac{d}{dt} f(x^0 + tv) \right|_{t=0} .$$

Wir nennen den Limes die *Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung v* und schreiben dafür auch

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \quad \text{oder} \quad D_v f(x^0) .$$

Bemerkungen:

1. Ist v der Einheitsvektor e^k , so erhält man als Richtungsableitung offenbar die partielle Ableitung nach x_k ,

$$\frac{\partial f}{\partial e_k}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \left. \frac{d}{dt} f(x^0 + te^k) \right|_{t=0} .$$

2. Man kann die Definition einer Richtungsableitung offenbar auf vektorwertige Funktionen $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ erweitern; die Richtungsableitung ist dann einfach der Vektor der Richtungsableitungen der einzelnen Komponenten f_j , $1 \leq j \leq m$.

Satz 12 Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen und f sei differenzierbar in $x^0 \in U$. Dann hat f eine Richtungsableitung in x^0 in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$, und es gilt

$$\left. \frac{d}{dt} f(x^0 + tv) \right|_{t=0} = f'(x^0)v = \langle \text{grad } f(x^0), v \rangle .$$

Bemerkung: Aus Satz 12 folgt sofort wieder Satz 5, d. h. die Existenz partieller Ableitungen für eine differenzierbare Funktion f . Die partiellen Ableitungen lassen sich auch schreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = f'(x^0)e^k, \quad k = 1, \dots, n .$$

Aus der Darstellung der Richtungsableitung mit Hilfe des Gradienten und der Hölderschen Ungleichung für das euklidische Skalarprodukt hat man das folgende, für die Anwendungen wichtige Ergebnis.

Satz 13 *Die Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (U offen) sei in $x^0 \in U$ differenzierbar. Ist $\text{grad } f(x^0) = 0$, so verschwinden alle Richtungsableitungen in x^0 . Ist $\text{grad } f(x^0) \neq 0$, so gibt es unter allen Richtungsableitungen $\partial f / \partial v(x^0)$ eine betragsgrößte, nämlich die in Richtung des Gradienten; ihr Wert ist $\|\text{grad } f(x^0)\|$.*

18.6 Mittelwertsätze und Hauptsatz

Aus dem eindimensionalen Mittelwertsatz der Differentialrechnung (s. Folgerung 11.3) erhält man sofort einen entsprechenden Satz für reellwertige Funktionen mit vektoriellen Argumenten.

Satz 14 *(MWS für reellwertige Funktionen) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ in U differenzierbar, und $x^0, x^0 + h$ seien zwei Punkte, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecke in U liegen. Dann gibt es ein $\vartheta : 0 < \vartheta < 1$, so daß gilt*

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) - f(x^0) &= f'(x^0 + \vartheta h)h, \quad d. h. \\ f(x^0 + h) - f(x^0) &= \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x^0 + \vartheta h)h_i = \langle \text{grad } f(x^0 + \vartheta h), h \rangle. \end{aligned}$$

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann bezeichnen wir U als *Gebiet*.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß jedes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft besitzt, daß je zwei Punkte aus U durch einen in U liegenden Polygonzug verbunden werden können (vgl. Heuser 2, 161.).

Folgerung 15 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, f sei in U partiell differenzierbar und die partiellen Ableitungen f_{x_i} , $1 \leq i \leq n$, seien überall in U identisch Null. Dann ist f in U konstant.*

Der MWS gilt für vektorwertige Funktionen nicht in Form einer Gleichheit — wie in Folgerung 11.3 oder in Satz 14 — sondern in Form einer Ungleichung. Dafür benötigen wir den Begriff des Riemann-Integrals für Funktionen $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definition: Eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, heißt *Riemann-integrierbar* auf $[a, b]$, wenn jedes f_j beschränkt und Riemann-integrierbar ist (vgl. Abschnitt 12.4);

$$\int_a^b f(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_m(t) dt \end{pmatrix}$$

heißt das *Riemann-Integral* von f über $[a, b]$.

Bemerkungen:

1. Als Folgerung aus dem 1-dimensionalen weiß man, daß stetige Funktionen Riemann-integrierbar sind.
2. Wir setzen

$$\int_a^a f(t) dt := 0, \quad \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$$

Wir lassen im folgenden „Riemann“ immer weg, da keine anderen Integralbegriffe in dieser Vorlesung vorkommen.

Satz 16 Mit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist auch $\|f\| : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ integrierbar, und es gilt

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$$

Satz 17 (Hauptsatz) Sei $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Ist $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, dann ist

$$f : (a, b) \ni t \longmapsto \int_a^t g(s) ds \in \mathbb{R}^m$$

differenzierbar, und es gilt $f'(t) = g(t)$, $t \in (a, b)$.

(b) Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und differenzierbar in jedem $t \in (a, b)$ und gibt es $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$h \text{ stetig, } h(t) = f'(t), t \in (a, b),$$

so gilt

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds.$$

Folgerung 18 Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U offen, f stetig differenzierbar, $x, x' \in U$, und $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = x'$ und $\gamma([0, 1]) = \Gamma_\gamma \subset U$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \langle \text{grad } f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für zwei Punkte $x, x' \in U \subset \mathbb{R}^n$, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecke S in U liegen, ist $\gamma(t) := tx' + (1-t)x$, $t \in [0, 1]$, ein differenzierbarer Weg (i. e. eine Gerade), dessen Kurve gerade S ergibt, $\Gamma_\gamma = S$.

Definition: Eine Teilmenge C eines normierten Raumes X heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei ihrer Punkte $x', x \in C$ auch deren Verbindungsstrecke $\overline{x'x} := S := \{z \in X \mid \exists t \in [0, 1] : z = tx' + (1-t)x\}$ enthält.

Beispiele: Leere Menge; ganz X ; Rechtecke, Kreise, Ellipsen im $\mathbb{R}^2$; Kugeln (offen oder abgeschlossen) in normierten Räumen.

Definition: Sei $A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ eine (m, n) -Matrix, d. h. eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Eine Matrizenorm $\|\cdot\|$ heißt mit den Normen $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ *verträglich*, wenn $\|Ax\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\| \|x\|_{\mathbb{R}^n} \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Beispiele:

1. $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, $A = (a_{j\nu})_{\substack{j=1,\dots,m \\ \nu=1,\dots,n}}$

$$\|A\| = \|A\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{\nu=1}^n |a_{j\nu}| \quad (\text{„maximale Zeilensumme“})$$

2. $\|\cdot\|_1$ in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$,

$$\|A\| = \|A\|_1 := \max_{1 \leq \nu \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{j\nu}| \quad (\text{„maximale Spaltensumme“})$$

3. $\|\cdot\|_2$ in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$,

$$\|A\| = \|A\|_2 := \left(\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^n |a_{j\nu}|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{„Quadratsummennorm“})$$

Satz 19 (*Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen*) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und $x, x^0 + h$ seien zwei Punkte, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecke S in U liegen. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) - f(x^0) &= \left(\int_0^1 f'(x^0 + th) dt \right) h, \quad d. h. \\ f_j(x^0 + h) - f_j(x^0) &= \sum_{\nu=1}^n h_\nu \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}(x^0 + th) dt, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Ist $\|\cdot\|$ irgendeine mit den Normen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ verträgliche Matrizenorm, dann gilt die Abschätzung

$$\|f(x^0 + h) - f(x^0)\| \leq \|h\| \max_{x \in S} \|f'(x)\|.$$

Ein gewisser Ersatz für den fehlenden MWS kann als Folgerung von Satz 14 wie folgt formuliert werden.

Folgerung 20 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ differenzierbar in U . Sind $x^0, x^0 + h$ Punkte, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecke S in U liegen, so gibt es Punkte $\xi_1, \dots, \xi_m$ auf S , für die gilt $f(x^0 + h) - f(x^0) = f'[\xi_1, \dots, \xi_m]h$ mit

$$f'[\xi_1, \dots, \xi_m] := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi_m) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi_m) \end{pmatrix}$$

18.7 Der Taylorsche Satz und die Taylorformel

Satz 21 (*Satz von Taylor*) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(U)$, $k \geq 0$, und mit $x^0, x^0 + h$ liege auch deren Verbindungsstrecke S in U . Dann gibt es ein ϑ in $0 \leq \vartheta \leq 1$, so daß gilt („Taylor-Formel“)

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu!} ((\nabla h)^\nu f)(x^0) + R_k(x^0; h)$$

mit dem Restglied (in „Lagrange-Darstellung“)

$$R_k(x^0; h) = \frac{1}{(k+1)!} ((\nabla h)^{k+1} f)(x^0 + \vartheta h)$$

und den Differentialoperatoren

$$(\nabla h)^0 = \text{id}, \quad \nabla h := (\nabla h)^1 := h_1 D_1 + \dots + h_n D_n, \quad (\nabla h)^{\nu+1} := (\nabla h)(\nabla h)^\nu, \\ \nu = 0, \dots, k.$$

Das Restglied *index* Restglied läßt sich auch in Integralform darstellen,

$$R_k(x^0; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} ((\nabla h)^{k+1} f)(x^0 + th) dt.$$

Bezeichnungen: Ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ heißt *Multiindex* mit *Länge* $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!, \quad x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Induktiv sieht man, daß

$$(x_1 + \cdots + x_n)^\nu = \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\nu!} (\nabla h)^\nu = \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha D^\alpha ,$$

wobei

$$\begin{aligned} D^\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \\ \frac{\partial^\ell}{\partial x_i^\ell} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\ell\text{-mal}) . \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 21 läßt sich die *Taylor-Formel* auch in folgender Weise schreiben,

$$f(x^0 + h) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha (D^\alpha f)(x^0) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha (D^\alpha f)(x^0 + \vartheta h) .$$

Man nennt

$$P_{k,f,x^0}(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} (x - x^0)^\alpha (D^\alpha f)(x^0)$$

das k -te *Taylor-Polynom* von f bzgl. der Stelle x^0 .

Beispiel: $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, konvex, f $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar:

$k = 1$:

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) &= f(x_1^0, x_2^0) + \left(\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f \right) (x_1^0, x_2^0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 f \right) (x_1^0 + \vartheta h_1, x_2^0 + \vartheta h_2) , \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{1}{2} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 f = \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} .$$

Sind die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in U beschränkt, so gilt die *Restgliedabschätzung*

$$\|R_1(x^0; h)\|_\infty \leq \frac{1}{2} M \|h\|_\infty^2$$

mit (hier: $n = 2$)

$$M := \sum_{\nu, \ell=1}^n \sup_{x \in U} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\ell}(x) \right|.$$

Definition: *Hessematrix* ($f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen)

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Nach dem Satz von Schwarz ist die Hessematrix symmetrisch, $f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \dots, n$. Es gilt

$$(\nabla h)^2 f = \sum_{i,j=1}^n h_i h_j f_{x_i x_j} = \langle H_f h, h \rangle.$$

Die Taylor-Formel für $k = 1$ lautet

$$\begin{aligned} f(x^0 + h) &= f(x^0) + \langle \text{grad } f(x^0), h \rangle + R_1(x^0; h); \\ \text{Restglied } R_1(x^0; h) &= \frac{1}{2} \langle H_f(x^0 + \vartheta h) h, h \rangle && \text{ („Lagrange-Darstellung“)} \\ &= \int_0^1 (1-t) \langle H_f(x^0 + th) h, h \rangle dt && \text{ („Integraldarstellung“)} \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom 2. Ordnung läßt sich schreiben als

$$P_{2,f,x^0}(x) = f(x^0) + \langle \text{grad } f(x^0), x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x^0)(x - x^0), x - x^0 \rangle.$$

Bemerkung:

1. Ist $f = (f_1, \dots, f_m)$ eine vektorwertige Funktion, dann gelten der Taylorsche Satz und die Taylor-Formel unverändert, wobei alles vektorwertig zu verstehen ist.

2. Man kann die Eigenschaft der vollständigen Differenzierbarkeit auch allgemeiner in Banachräumen formulieren. Die Ableitungen heißen dann *Fréchet-Ableitungen* und sind beschränkte lineare Abbildungen zwischen den Banachräumen. Die Funktionalmatrix ist eine mögliche Darstellung der Fréchet-Ableitung (bzgl. der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$). Die höheren (Fréchet-)Ableitungen sind dann Multilinearformen. Die Definitionen und die Formulierung der Sätze, z. B. des Taylorschen Satzes, können meist unverändert übernommen werden.

19 Der Satz über implizite Funktionen

Der Satz über implizite Funktionen — oder der Satz über inverse Funktionen — kann als „Hauptsatz“ der nichtlinearen Analysis bezeichnet werden. Dabei lernen wir auch einen zentralen Satz über die Existenz von Fixpunkten kennen.

19.1 Der Kontraktionssatz

Satz 1 Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum, sei $F : M \longrightarrow M$ und es gelte:

$$\exists q \in [0, 1) \quad \forall x, y \in M : d(F(x), F(y)) \leq qd(x, y) .$$

Dann gibt es genau ein $\bar{x} \in M$ mit

$$F(\bar{x}) = \bar{x} \quad (\bar{x} \text{ ist Fixpunkt von } F) .$$

Folgerung 2 (*Banachscher Fixpunktsatz*)

Sei X Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen, $F : M \longrightarrow M$. Es gelte:

$$\exists q \in [0, 1) \quad \forall x, x' \in M : \|F(x) - F(x')\|_X \leq q\|x - x'\|_X .$$

Dann gibt es genau ein $\bar{x} \in M$ mit

$$F(\bar{x}) = \bar{x} \quad (\bar{x} \text{ ist Fixpunkt von } F \text{ in } M) .$$

Definitionen:

1. Eine Abbildung $F : D \subset X \longrightarrow Y$, X, Y normierte Räume, heißt *Lipschitzstetig*, wenn mit einer Konstanten $L \geq 0$ ($L = \text{Lipschitzkonstante}$) gilt

$$\|F(x) - F(x')\|_Y \leq L \|x - x'\|_X \quad \forall x, x' \in D .$$

2. Eine Lipschitzstetige Abbildung F heißt *Kontraktion* (oder *kontrahierende Abbildung*), wenn die Lipschitzkonstante $L < 1$ ist.

Beispiele:

1. Sei $a < b$, $F : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ stetig und sei F differenzierbar in (a, b) . Es gelte mit $q \in [0, 1)$:

$$|F'(\xi)| \leq q \quad \forall \xi \in (a, b) .$$

Dann besitzt F genau einen Fixpunkt in $[a, b]$.

2. $X = \mathbb{R}$, $\|\cdot\| := |\cdot|$, $M := [0, \infty)$,
 $F : M \ni t \longmapsto t + \frac{1}{1+t} \in M$.

Es gilt

$$|F(t) - F(s)| < |t - s|, \quad t, s \in M ,$$

aber nicht

$$|F(t) - F(s)| \leq q |t - s|, \quad t, s \in M, \quad \text{mit } q < 1 .$$

F besitzt keinen Fixpunkt!

$$3. \quad X := \mathbb{R}, \quad \|\cdot\| := |\cdot|, \quad M := (0, \infty), \\ F : M \ni t \mapsto qt \in M \quad \text{mit } q \in [0, 1).$$

Offenbar gilt

$$|F(t) - F(s)| \leq q|t - s|, \quad t, s \in M,$$

aber F besitzt keinen Fixpunkt.

Beachte: M ist nicht abgeschlossen!

Als Anwendung von Satz 1 bzw. Folg. 2 in einer unendlich-dimensionalen Situation betrachten wir das Existenzproblem von *Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*:

$$\text{Gegeben: } \quad y^0 \in \mathbb{R}^n \text{ (Anfangswert)}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \\ f : [a, b] \times D \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ (rechte Seite)}.$$

$$\text{Gesucht: } \quad \text{Lösung } \varphi \text{ der Anfangswertaufgabe}$$

$$(\text{AWP}) \quad y' = f(t, y), \quad y(a) = y^0, \quad \text{d. h.}$$

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow D \text{ mit}$$

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in [a, b], \quad \varphi(a) = y^0.$$

Der Hauptsatz (Satz 18.17) besagt, daß die Suche nach einer Lösung der Anfangswertaufgabe (AWP) verknüpft werden kann mit der Suche nach einer Lösung der Integralgleichung

$$(\text{IG}) \quad \varphi(t) = y^0 + \int_a^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Satz 3 Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig, und es gebe $L \geq 0$ mit

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in [a, b].$$

Dann gibt es genau einen stetig differenzierbaren Weg $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) , \quad t \in [a, b] , \quad \varphi(a) = y^0 .$$

Folgerung 4 Sei $f : [a, b] \times \overline{K}(y^0, r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und es gebe $L \geq 0$ mit

$$\|f(t, x) - f(t, x')\| \leq L\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in \overline{K}(y^0, r) \quad \forall t \in [a, b] .$$

Dann gibt es genau einen stetig differenzierbaren Weg $\varphi : [a, a + \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) , \quad t \in [a, a + \alpha] , \quad \varphi(a) = y^0 ;$$

hierbei sind:

$$\begin{aligned} \alpha &:= \max(b - a, rm^{-1}) , \\ m &:= \max \left\{ \|f(s, x)\| \mid s \in [a, b] , x \in \overline{K}(y^0, r) \right\} . \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Populationsmodell (VOLTERRA-LOTKA)

$$(AWP) \quad y' = y(a - by) , \quad y(0) = y^0 ; \quad a, b > 0 .$$

Mit $f(t, y) := y(a - by)$ gilt für $y \in \overline{K}(y^0, r)$:

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, x')| &\leq L|x - x'| , \\ L &:= \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) \right| \mid t \in \mathbb{R}, \xi \in \overline{K}(y^0, r) \right\} . \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Lösung zumindest für ein „kleines Stück“ in die Zukunft (lokale Lösung).

2. Betrachte

$$(AWP) \quad y' = 1 + y^2 , \quad y(0) = 0 .$$

Die Lösung von AWP ist der Tangens ($\tan'(y) = 1 + y^2$).

Bemerkung: Satz 3 oder Folg. 4 wird als ein Satz vom Typ „PICARD–LINDELÖFF“ bezeichnet.

19.2 Der Satz über die inverse Abbildung

In diesem Abschnitt sei immer $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Um den Satz von der inversen Abbildung beweisen zu können, benötigen wir noch ein Ergebnis über invertierbare Matrizen.

Bezeichnung: $\mathcal{M}(m, n) :=$ Raum aller (m, n) –Matrizen.

Jede Matrix $A \in \mathcal{M}(m, n)$ definiert eine beschränkte, lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$, $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Im Raum $\mathcal{M}(n, n)$ aller quadratischen Matrizen ist das Produkt AB zweier Matrizen wieder eine (n, n) –Matrix. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}(n, n)$ ist invertierbar, d. u. n. d. wenn $\det A \neq 0$.

Definition: Eine *Matrizennorm* auf $\mathcal{M}(n, n)$ liegt vor, wenn neben den Normeigenschaften noch

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (\text{„Submultiplikativität“})$$

erfüllt ist.

Hinsichtlich der Eigenschaft der Verträglichkeit von Matrizennormen sei auf Abschnitt 18.6 verwiesen.

Lemma 5 *Ist $A \in \mathcal{M}(n, n)$ invertierbar, dann gibt es Zahlen $\alpha \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft ($\|\cdot\| = \text{Matrizennorm}$):*

$$\forall B : \|B - A\| < \varepsilon \implies \exists B^{-1} \quad \text{und} \quad \|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \alpha \|A - B\| .$$

Bemerkungen:

1. Lemma 5 besagt, daß die Bildung der Inversen einer invertierbaren Matrix eine stetige Abbildung in $\mathcal{M}(n, n)$ ist.
2. Man beachte, daß in endlichdimensionalen Räumen lineare Abbildungen immer stetig (als Abb. zwischen den endlichdimensionalen Räumen) sind. Damit definiert auch die Inverse einer Matrix, wenn sie existiert, immer eine stetige lineare Abbildung.

Definition: f heißt C^r -Diffeomorphismus, $r \geq 1$, falls gilt:

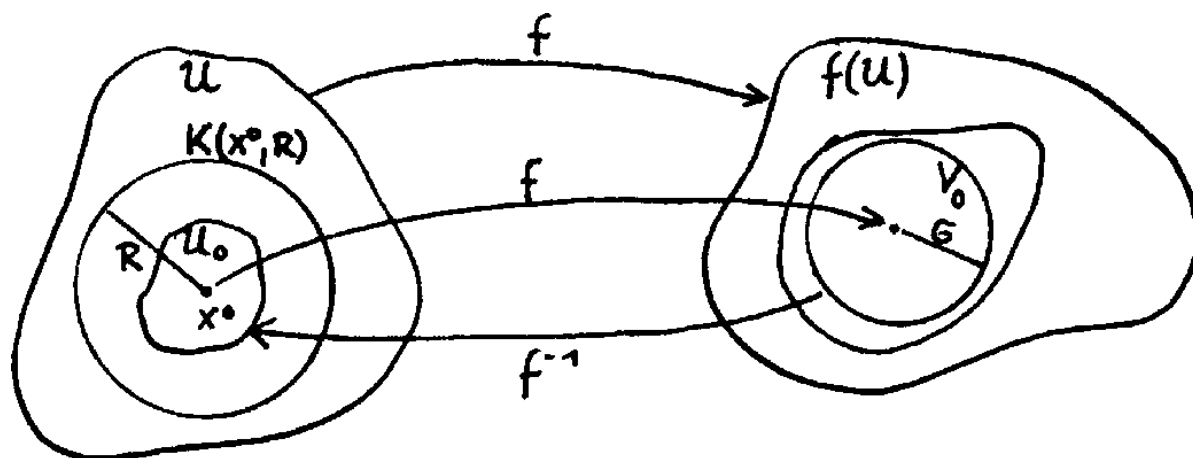
$$\begin{aligned} f &\in C^r(U, \mathbb{R}^m), \quad f \text{ injektiv,} \\ V &:= f(U) \text{ offen,} \quad f^{-1} \in C^r(V, \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Satz 6 Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $x^0 \in U$, und die Ableitung $f'(x^0)$ sei invertierbar. Dann gibt es ein $U_0 \subset U$, U_0 offen, $x^0 \in U_0$, so daß $f|_{U_0}$ C^1 -Diffeomorphismus ist; für $y \in V_0 := f(U_0)$ gilt

$$(f^{-1})'(y) = \left[f' \left(f^{-1}(y) \right) \right]^{-1}.$$

Bemerkung:

1. Die Invertierbarkeit der Funktionalmatrix $f'(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) \right)$ ist äquivalent zur Beziehung $\det(f'(x^0)) \neq 0$.
2. Ist $f \in C^r(U, \mathbb{R}^m)$, so kann man durch Anwendung der Kettenregel sogar zeigen, daß $h = f|_{U_0}$ C^r -Diffeomorphismus ist, d. h. daß auch alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von h^{-1} existieren und stetig sind (vgl. Walter (1992), Analysis 2, 4.5 und 4.6).
3. Das Ergebnis von Satz 6 über die inverse Abbildung läßt sich durch folgende Figur verdeutlichen:



Beispiele:

1. Ebene Polarkoordinaten

Abbildung: $(r, \varphi) \longrightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: (x, y)$

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \neq 0, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Zu jedem Bildpunkt $(x, y) \neq (0, 0)$ gibt es unendlich viele Urbilder $(r, \varphi + 2k\pi)$. In einer Umgebung von $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ gibt es eine Umkehrfunktion (aus C^∞),

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arg(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

(falls $x_0 = 0$: $\varphi = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}$). Die Polarkoordinatendarstellung bildet z. B. den offenen Halbstreifen $\{0 < r < \infty, -\pi < \varphi < \pi\}$ C^∞ -diffeomorph auf die längs der negativen reellen Achse aufgeschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \leq 0, y = 0\}$ ab.

2. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto (x^2 + y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2$.

Offenbar gilt:

$$f(\mathbb{R}^2) \subset Q := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + v \geq 0, u - v \geq 0\}.$$

Sei $a > 0$. Es gilt:

$$f(a \cos t, a \sin t) = (a^2, a^2 \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Damit zeigt man:

$$f(\mathbb{R}^2) = Q.$$

Offenbar ist f stetig differenzierbar; $f'(x, y)$ wird dargestellt durch die Matrix

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \det f'(x, y) = 4(x^2 - y^2).$$

Ist also $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x^0)^2 \neq (y^0)^2$, so ist f in einer Umgebung von (x^0, y^0) ein C^1 -Diffeomorphismus.

$$\begin{aligned} \text{Zur Ableitung von } f^{-1}: \quad (f^{-1})'(u, v) &= [f'(x, y)]^{-1}, \quad (u, v) = f(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =: B \end{aligned}$$

Spalten von B :

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f'(x, y)]^{-1} = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad x &= \sqrt{u} \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{v}{u} \right), \\ y &= \sqrt{u} \sin \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{v}{u} \right), \end{aligned} \quad (u, v) \in Q, \quad v \neq |u|.$$

19.3 Der Satz über implizite Funktionen

In diesem Abschnitt sei immer $F : U \times V \longrightarrow Z$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $Z \subset \mathbb{R}^m$.

Aufgabe: Die Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in U \times V$$

nach y „auflösen“, d. h. eine Abbildung $g : U \longrightarrow V$ zu finden mit

$$F(x, g(x)) = 0, \quad x \in U.$$

Ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

auf U nach $y_1, \dots, y_m$ auflösen, d. h. $g_j : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, zu finden mit

$$\begin{aligned} F_j(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) &= 0, \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\in U, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

„Auflösbarkeit“ bedeutet auch:

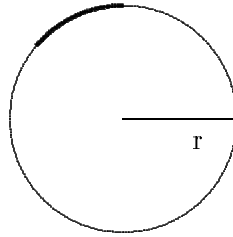
Finde $g : U \longrightarrow V$, so daß
 $N := \{(x, y) \in U \times V \mid F(x, y) = 0\}$
 Graph der Abbildung g ist.

Man sagt, g sei durch F implizit definiert.

Beispiel:

1. Betrachte $F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - r^2 \in \mathbb{R}$. Auflösen von $F(x, y) = 0$ bedeutet, die Kreislinie als Graph einer Funktion g darzustellen. Dies kann nicht gelingen! Es ist aber „stückweise“ möglich, z. B. durch

$$g_1(x) := \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{oder} \quad g_2(x) := -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r.$$



Bezeichnung: Ist

$$F_{x^0} : V \ni y \mapsto F(x^0, y) \in Z$$

bzw.

$$F_{y^0} : U \ni x \mapsto F(x, y^0) \in Z$$

differenzierbar in y^0 bzw. x^0 , so schreiben wir für die Ableitungen

$$\begin{aligned} d_y F(x^0, y^0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \\ \text{bzw.} \quad d_x F(x^0, y^0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, y^0) . \end{aligned}$$

Der folgende Satz beantwortet nicht nur die Frage der Auflösbarkeit, sondern trifft auch eine Aussage über die Differenzierbarkeit implizit definierter Funktionen.

Satz 7 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F : U \times V \longrightarrow Z \subset \mathbb{R}^m$, $(x^0, y^0) \in U \times V$, und es gelte

$$F(x^0, y^0) = 0, \quad F \in C^1(U \times V, Z), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0) \text{ invertierbar.}$$

Dann gibt es offene Mengen $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ und eine Abbildung $g : U_0 \longrightarrow V_0$ mit

$$(a) \quad x^0 \in U_0, \quad y^0 \in V_0, \quad g \in C^1(U_0, V_0),$$

$$(b) \quad g(x) \text{ ist einzige Lösung in } V_0 \text{ von } F(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0,$$

$$(c) \quad g'(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad x \in U_0.$$

Bemerkung: Setzt man in Satz 7 zusätzlich voraus, daß $F \in C^r(U \times V, Z)$, dann ist auch $g \in C^r(U_0, V_0)$.

Beispiel:

2. Betrachte $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto xe^x + ye^y + xy \in \mathbb{R}$ und die Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad \text{d. h.} \quad xe^x + ye^y + xy = 0.$$

Es gilt: $F(0, 0) = 0$, $F \in C^r(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \forall r \in \mathbb{N}$,

$$d_y F(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = e^0 = 1 \neq 0.$$

Also liegt in $(0, 0)$ lokale Auflösbarkeit durch eine Funktion g vor;

$$g'(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad x \in U_0,$$

d. h.

$$g'(x) = -\frac{(x+1)e^x + g(x)}{(g(x)+1)e^{g(x)} + x}, \quad x \in U_0. \quad (1)$$

$$\text{Ferner} \quad g(0) = 0. \quad (2)$$

(1) und (2) stellen eine Anfangswertaufgabe für die zu findende Funktion g dar.

19.4 Maxima und Minima

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Definition: $x^0 \in U$ heißt *lokales Extremum* (*lokales Maximum* bzw. *lokales Minimum*), falls es ein $r > 0$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x^0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x^0) \quad \forall x \in K(x^0, r) \cap U.$$

Gilt „=“ nur bei x^0 , so liegt ein *lokales Extremum im strengen Sinn* vor.

Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum liefert der folgende Satz.

Satz 8 (Fermatsches Kriterium) *Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ und x^0 ein lokales Extremum, dann ist $\text{grad } f(x^0) = 0$.*

Definition: x^0 heißt *stationärer Punkt* von f , wenn $\text{grad } f(x^0) = 0$.

Zur Formulierung von hinreichenden Bedingungen benötigen wir noch folgende Begriffe.

Definitionen: Eine (n, n) -Matrix $A = (a_{jk})$ heißt

symmetrisch, wenn $a_{jk} = a_{kj}$, $j, k = 1, \dots, n$.

Eine symmetrische Matrix heißt

positiv definit, wenn $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$;

positiv semidefinit, wenn $\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x$;

negativ definit, wenn $\langle Ax, x \rangle < 0 \quad \forall x \neq 0$;

negativ semidefinit, wenn $\langle Ax, x \rangle \leq 0 \quad \forall x$;

indefinit, sonst.

Bemerkung: Für symmetrische Matrizen gilt $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad x, y \in \mathbb{R}^n$.

Satz 9 (*Hinreichende Bedingung für ein Extremum*): Sei $f \in C^2(U)$, $x^0 \in U$ und $\text{grad } f(x^0) = 0$. Mit Hilfe der Hessematrix H_f der zweiten partiellen Ableitungen gelten dann die folgenden Aussagen:

(a) $H_f(x^0)$ *positiv definit* $\implies$ *lokales Minimum im strengen Sinn*;

(b) $H_f(x^0)$ *negativ definit* $\implies$ *lokales Maximum im strengen Sinn*;

(c) $H_f(x^0)$ *indefinit* $\implies$ *kein Extremum*.

Bemerkung: Im Fall $n = 2$ ist $H_f(x^0)$ definit (d. h. positiv oder negativ definit) bzw. indefinit, wenn die zugehörige *Diskriminante*

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

bei x^0 positiv bzw. negativ ist. Ist $D > 0$ und $f_{xx} > 0$ bzw. < 0 bei x^0 , so ist $H_f(x^0)$ positiv definit bzw. negativ definit, also liegt ein Minimum bzw. Maximum vor (vgl. Walter 2, 4.8 und 4.11).

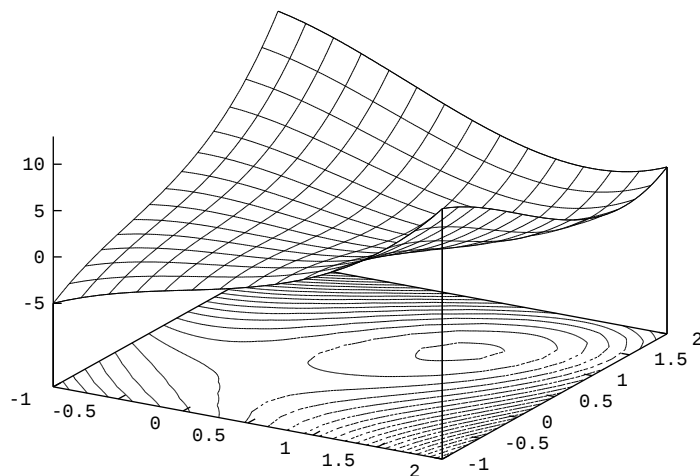
Beispiel: $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x;$$

stationäre Punkte: $(0, 0)$ und $(1, 1)$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Bei $(0, 0)$: $D = -9$; dort liegt also kein Extremum vor. Bei $(1, 1)$: $D = 6 \cdot 6 - 9 = 27$; dort liegt ein lokales Minimum im engen Sinn vor; der Wert von f ist $f(1, 1) = -1$. Wegen $f(x, x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ und $f(x, x) \rightarrow \infty (x \rightarrow -\infty)$ gibt es kein globales Extremum.



19.5 Lagrangesche Multiplikatorenregel

Sei $M \subset U$, $M \neq \emptyset$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Optimierungsaufgabe (*Extrema mit Nebenbedingung*):

Minimiere bzw. maximiere $f(x)$ unter der Nebenbedingung $x \in M$.

$\Longleftrightarrow$

Finde $x^0 \in M$ mit $f(x^0) \leq f(x) \ \forall x \in M$ bzw. $f(x^0) \geq f(x) \ \forall x \in M$.

$\Longleftrightarrow$

(Kurzschreibweise) $\min_{x \in M} f(x)$ bzw. $\max_{x \in M} f(x)$

Voraussetzung: Der Bereich M kann *parametrisiert* werden, d. h. es existiert $g = (g_1, \dots, g_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Beispiele:

1. $g(x, y, z) := x + y - z = 0$, $M = \{(x, y, z) \mid z = x + y\}$.
2. $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$, $M = \text{Kreis mit Radius } 1$,
 $\text{grad } g(x) = (2x, 2y)$.

Spezialfall: ($n = 2$, $g(x, y) = 0$ stellt ebene Kurve dar.) Gesucht ist ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Ist $g_y(x^0, y^0) \neq 0$, dann läßt sich $g = 0$ in einer Umgebung von (x^0, y^0) eindeutig auflösen in der Form $y = h(x)$. Gesucht ist also ein lokales Extremum von $k(x) := f(x, h(x))$. Es ist

$$k'(x) = f_x + f_y h' , \quad h'(x) = -\frac{g_x}{g_y} \quad (\text{Argument: } (x, h(x)))$$

(s. Satz 7). Ein stationärer Punkt in $M = \{g(x) = 0\}$ liegt vor, wenn

$$(*) \quad f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = 0 \quad \text{und} \quad g = 0 .$$

Führt man die (*Lagrange-*)*Funktion*

$$H(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

ein, so ist die Lösung von (*) äquivalent zur Suche eines stationären Punktes (x^0, y^0, λ^0) von H — falls $g_y \neq 0$ —, d. h.

$$\begin{aligned} H_x &= f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0, \\ (L) \quad H_y &= f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0, \\ H_\lambda &= g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

In (L) sucht man also einen stationären Punkt der Funktion H ohne Nebenbedingung; λ heißt *Lagrangescher Multiplikator*.

Ist $g_x(x^0, y^0) \neq 0$, so erhält man aus (*) den Lagrangeschen Multiplikator durch $\lambda = -f_x(x^0, y^0) / g_x(x^0, y^0)$ — bei $g_y(x^0, y^0) \neq 0$ durch $\lambda = -f_y(x^0, y^0) / g_y(x^0, y^0)$.

Unter den Lösungen (x^0, y^0, λ^0) von (L) sind also die lokalen Minima der obigen Optimierungsaufgabe enthalten.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 y^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$
 $H(x, y, \lambda) = x^2 y^2 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda;$

$$\begin{aligned} 0 &= H_x(x, y, \lambda) = 2xy^2 + 2\lambda x = 2x(y^2 + \lambda), \\ (L) \quad 0 &= H_y(x, y, \lambda) = 2x^2 y + 2\lambda y = 2y(x^2 + \lambda), \\ 1 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left. \begin{array}{l} 1. \quad x^0 = 0, \quad y^0 = \pm 1 \quad (, \lambda^0 = 0) \\ 2. \quad y^0 = 0, \quad x^0 = \pm 1 \quad (, \lambda^0 = 0) \end{array} \right\} \quad (4 \text{ Punkte}) \\ & \left. \begin{array}{l} 3. \quad y^2 + \lambda = 0 \\ \quad x^2 + \lambda = 0 \\ \quad x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = -2\lambda, \quad \lambda^0 = -\frac{1}{2}, \quad y^2 = \frac{1}{2} \\ y^0 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad x^0 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \quad (4 \text{ Punkte}) \end{aligned}$$

Unter den 8 Punkten müssen sämtliche stationären Punkte sein.

Allgemeiner Fall:

$$F : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R} , \quad G : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m , \quad x \in \mathbb{R}^n , y \in \mathbb{R}^m .$$

Optimierungsaufgabe: Gesucht lokale Extrema von

$$F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

unter den m Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} G_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ \vdots \\ G_m(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) &= 0 . \end{aligned}$$

Satz 10 (Lagrangesche Multiplikatorenregel) Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $(x^0, y^0) \in U$, $F \in C^1(U, \mathbb{R})$, $G \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, und es sei $\frac{\partial G}{\partial y}(x^0, y^0)$ eine invertierbare Matrix. Hat die Funktion $F(x, y)$ unter der Nebenbedingung $G(x, y) = 0$ an der Stelle (x^0, y^0) ein lokales Extremum, so gibt es ein $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$, so daß die Funktion

$$H(x, y, \lambda) = F(x, y) + \langle \lambda, G(x, y) \rangle$$

an der Stelle (x^0, y^0, λ_0) einen stationären Punkt besitzt.**Bemerkung:** Bei (x^0, y^0, λ_0) gelten also die Gleichungen

$$d_x H = 0 , \quad d_y H = 0 , \quad d_\lambda H = 0 ,$$

oder, ausführlich,

$$\begin{aligned} H_{x_i} &= F_{x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_{j,x_i} = 0 , \quad i = 1, \dots, n , \\ H_{y_k} &= F_{y_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_{j,y_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, m , \\ H_{\lambda_k} &= G_k = 0 , \quad k = 1, \dots, m , \end{aligned}$$

oder, äquivalent,

$$\text{grad } F(x, y) + G'(x, y)^* \lambda = 0, \quad G(x, y) = 0.$$

Definition: Die *adjungierte Matrix* (oder *transponierte Matrix*) einer reellwertigen (p, q) -Matrix $A = (a_{k,l})_{\substack{k=1,\dots,p \\ \ell=1,\dots,q}}$ ist definiert durch

$$A^* = (a_{k,\ell}^*) \quad , \quad a_{k,\ell}^* = a_{\ell,k} \quad , \quad k = 1, \dots, q, \quad \ell = 1, \dots, p.$$

Die adjungierte Matrix der Funktionalmatrix $G'(x, y)$ in Satz 10 läßt sich ausführlich wie folgt darstellen

$$G'(x, y)^* = \begin{array}{ccccc} \left(\begin{array}{ccc} G_{1,x_1} & \cdots & G_{m,x_1} \\ \vdots & & \\ G_{1,x_n} & \cdots & G_{m,x_n} \\ \hline G_{1,y_1} & \cdots & G_{m,y_1} \\ \vdots & & \\ G_{1,y_m} & \cdots & G_{m,y_m} \end{array} \right) & \begin{array}{c} \uparrow \\ n \\ \downarrow \\ \hline \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{array} & \\ \longleftarrow & m & \longrightarrow \end{array}$$

Bezeichnung: Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ in Satz 10 heißen *Lagrangesche Multiplikatoren*.

Die in Satz 10 noch ausgezeichneten $y_1, \dots, y_m$, nach denen aufgelöst wird, müssen jedoch nicht ausgezeichnet sein. Wir betrachten dazu wieder die frühere **Situation**:

$$f \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^m), \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

$$M = \{x \mid g(x) = 0\}$$

und suchen lokale Extrema von f .

Definition: $x^0 \in M$ heißt *regulär*, falls

$$\text{grad } g_1(x^0), \dots, \text{grad } g_m(x^0) \text{ linear unabhängig sind.}$$

Definition: m Vektoren $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^m$ heißen *linear unabhängig* (Abk.: l. u.), wenn aus

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j y_j = 0 \quad \text{folgt:} \quad \gamma_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m .$$

Bemerkung: Sind $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ l. u., dann muß $m \leq n$ sein.

Lemma 11 Die Anzahl der l. u. Spalten einer (n, m) -Matrix $A = (a_{jk})$ ist gleich der Anzahl der l. u. Zeilen von A .

Bemerkung: Betrachtet man die Adjungierte der Funktionalmatrix $g'(x)$, dann ist $g'(x)^*$ eine (n, m) -Matrix — d. h. sie hat die m Spalten $\text{grad } g_j(x)$, $j = 1, \dots, m$. Ein regulärer Punkt $x^0 \in M$ liegt vor, wenn die Spalten von $g'(x^0)^*$ l. u. sind. Nach Lemma 11 sind dann auch m Zeilen von $g'(x^0)^*$ l. u. und für m Indizes $i_1, \dots, i_m$ ist die quadratische Matrix

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})}$$

invertierbar.

Generelle Voraussetzung im folgenden:

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen,} \quad f \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^m) .$$

Satz 12 Sei $m < n$, $x^0 \in M = \{x \mid g(x) = 0\}$ regulär, und x^0 sei lokales Extremum von f . Dann gibt es ein $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\text{grad } f(x^0) + g'(x^0)^* \lambda_0 = 0 ,$$

d. h. (x^0, λ_0) ist stationärer Punkt von

$$H(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle .$$

Bezeichnung: Die Funktion

$$H(x, \lambda) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle, \quad x \in U, \lambda \in \mathbb{R}^m$$

in Satz 12 heißt die dem Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen zugeordnete *Lagrange-Funktion*. Die Gleichungen zur Bestimmung von stationären Punkten der Lagrange-Funktion stellen $n + m$ Bedingungen für die $n + m$ Unbekannte $x_1^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ dar. Damit gelingt es, Kandidaten x^0 für lokale Extrema von f zu finden. Der *Lagrange-Multiplikator* $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ beschreibt die Sensitivität des Optimalwertes in Abhängigkeit von Variationen in den Nebenbedingungen.

Beispiel: Gesucht

$$\min \left\{ -xy \mid (x, y) \in M \right\}, \quad M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \right\}.$$

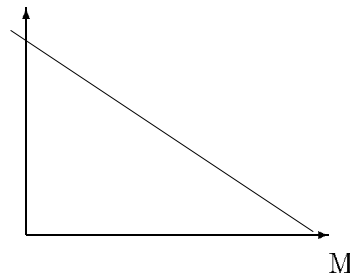
Die Gleichungen für x^0, y^0, λ_0 lauten ($f(x, y) := -xy, g(x, y) = x + y - 1$)

$$x^0 + y^0 - 1 = 0,$$

$$-y^0 + \lambda_0 = 0,$$

$$-x^0 + \lambda_0 = 0.$$

Lösung: $x^0 = y^0 = \frac{1}{2}, \lambda_0 = \frac{1}{2}.$



Regularität liegt vor!

Die vorliegende Optimierungsaufgabe kann man wegen

$$g(x, y) = 0 \iff y = 1 - x; \quad f(x, 1 - x) = x^2 - x$$

auf eine eindimensionale Optimierungsaufgabe zurückführen; dafür ist $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ globales Minimum.

Abschließend interessieren wir uns noch für notwendige und hinreichende Kriterien für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

Definition: *Tangentenebene* von M in x^0

$$T(x^0, M) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid g'(x^0)d = 0 \right\}.$$

Lemma 13 *Ist $x^0 \in M$ regulär, so gilt*

$$T(x^0, M) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists \tau > 0 \exists \alpha \in C^1((-\tau, \tau), \mathbb{R}^n) : \right. \\ \left. \alpha(0) = x^0, \alpha'(0) = d, \alpha(t) \in M \quad \forall t \right\}.$$

Satz 14 *Ist $x^0 \in M$ regulär und lokales Extremum von f , so gilt*

$$\langle \text{grad } f(x^0), d \rangle = 0 \quad \forall d \in T(x^0, M).$$

Generelle Voraussetzung im folgenden:

$$f \in C^2(U, \mathbb{R}), \quad g \in C^1(U, \mathbb{R}^m), \quad x^0 \in M \text{ regulär}.$$

Dann existiert die Hessematrix $H(x) := H_f(x)$ der zweiten (stetigen) partiellen Ableitungen von f (vgl. Abschnitt 18.7).

Satz 15 *Sei $x^0 \in M$ lokales Minimum bzw. Maximum von f über M , und U sei konvex. Dann gilt:*

$$(a) \quad \langle \text{grad } f(x^0), d \rangle = 0 \quad \forall d \in T(x^0, M);$$

$$(b) \quad \langle H(x^0)d, d \rangle \geq 0 \text{ (für Min.) bzw. } \leq 0 \text{ (für Max.)} \quad \forall d \in T(x^0, M).$$

Der folgende Satz liefert ein hinreichendes Kriterium.

Satz 16 *Seien U, M konvex, $x^0 \in M$, und es gelte:*

$$(a) \quad \langle \text{grad } f(x^0), d \rangle = 0 \quad \forall d \in T(x^0, M);$$

$$(b) \quad \langle H(x^0)d, d \rangle > 0 \text{ [bzw. } < 0] \quad \forall d \in T(x^0, M), d \neq 0.$$

Dann ist x^0 lokales Minimum [bzw. lokales Maximum] über M .

A Grundlagen der Aussagenlogik

A.1 Bezeichnungen

Aussagen sind Sätze, deren Inhalt entweder wahr oder falsch ist.

Wahrheitswerte

W : wahr (gelegentlich auch T für engl. true)

F : falsch (engl. false)

Aussagenvariablen p, q sind Buchstaben oder andere Zeichen, an deren Stelle Aussagen oder Wahrheitswerte gesetzt werden können.

Aussageformen sind Aussagen, die Aussagenvariablen enthalten. Die folgenden Sonderfälle logischer Aussageformen sollen besonders hervorgehoben werden.

Eine Aussageform, die bei jeder Belegung ihrer Variablen den Wahrheitswert

- W annimmt, heißt *Wahrform* (*Tautologie*, logisch wahre Aussageform, logisches Gesetz),
- F annimmt, heißt *Falschform* (*Kontradiktion*, logisch falsche Aussageform, logischer Widerspruch).

Eine Aussageform, die weder Wahrform noch Falschform ist, heißt *Neutralform* (*Neutralität*, logisch teigültige Aussageform).

A.2 Verknüpfungszeichen, Verknüpfungen

Verknüpfungen von Aussagen zu einer neuen Aussage bezeichnet man auch als *Junktionen*.

Die Verknüpfungszeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow$ nennt man *Junktoren*.

Bezeichnung	Schreibweise	Sprechweise
Negation	$\neg p$	nicht p
Konjunktion	$p \wedge q$	p und q
Disjunktion	$p \vee q$	p oder q (einschließendes (inklusive) oder)
Subjunktion	$\neg p \vee q$, auch: $(p \rightarrow q)$	p subjungiert q
Bijunktion	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, auch: $(p \leftrightarrow q)$	p bijungiert q
Antivalenz (Alternative)	$\neg(p \leftrightarrow q)$, auch: $(p \nleftrightarrow q)$	entweder p oder q (ausschließendes (exklusives) oder)

Wahrheitstafel zu den Verknüpfungen

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \nleftrightarrow q$
W	W	F	W	W	W	W	F
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	F	W
F	F	W	F	F	W	W	F

Beispiele:

- $p \vee \neg p$, $\neg(p \wedge q) \vee q$ sind Tautologien.
- $p \wedge \neg p$, $\neg(p \vee q) \wedge q$ sind Kontradiktionen.
- $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \rightarrow q$ sind Neutralformen.

Seien A und B Aussageformen. Man sagt:

- A *impliziert* B ($A \Rightarrow B$), wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist (andere Sprechweisen: wenn B, dann A, B folgt aus A, A ist hinreichende Bedingung für B, B ist notwendige Bedingung für A), und spricht von *logischer Implikation*,
- A ist *äquivalent* zu B ($A \Leftrightarrow B$), wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist (andere Sprechweise: A genau dann, wenn B), und spricht von *logischer Äquivalenz*.

Beispiel:

$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$, weil $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ eine Tautologie ist.

A.3 Gesetze der Aussagenlogik

Kommutativgesetze

1. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

2. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

Assoziativgesetze

1. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

2. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Distributivgesetze

1. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Idempotenzgesetze

1. $p \vee p \Leftrightarrow p$

2. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

Absorptionsgesetze (Verschmelzungsgesetze)

1. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

2. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

de Morgan-Gesetze

$$1. \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$2. \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Andere Verneinungsgesetze

$$1. \neg(\neg p) = p$$

$$2. \neg W = F$$

$$3. \neg F = W$$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$p \vee \neg p$ ist eine Tautologie.

Satz vom Widerspruch

$p \wedge \neg p$ ist eine Kontradiktion.

Kontrapositionsgesetz

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Transitivgesetz

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

Abtrennungsgesetze

$$1. p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q \text{ (direkter Schluß)}$$

$$2. (p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p \text{ (indirekter Schluß)}$$

B Übungen und Musterlösungen zu Analysis I

Übungen (1) zur Vorlesung „Analysis I“ mit Lösungen

1. Seien A, B, C Mengen. Zeige:

$$(a) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(b) \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Lösung:

(a) Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cap C)) \\ &\Rightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \\ &\Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C)) \\ &\Rightarrow (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C)) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Die umgekehrte Schlußrichtung ist ebenfalls richtig:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Rightarrow (x \in (A \cup B)) \wedge (x \in (A \cup C)) \\ &\Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C)) \\ &\Rightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \\ &\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cap C)) \\ &\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in (B \cap C))$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((y \in B) \wedge (y \in C)) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (x \in A) \wedge (y \in C) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (y \in C)) \\
&\Leftrightarrow ((x, y) \in (A \times B)) \wedge ((x, y) \in (A \times C)) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

2. Sei X eine Menge. Für $A \subset X$ ist das *Komplement* A' von A erklärt durch

$$A' := X \setminus A.$$

Seien $A, B \subset X$. Zeige:

$$(a) \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(b) \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup B)' &\Leftrightarrow x \in X \setminus (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin (A \cup B)) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in (A \cup B)) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge (\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\
&\Leftrightarrow ((x \in X) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in X) \wedge (x \notin B)) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \setminus A) \wedge (x \in X \setminus B) \\
&\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \\
&\Leftrightarrow x \in A' \cap B'.
\end{aligned}$$

(b) Entsprechend erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B)' &\Leftrightarrow x \in X \setminus (A \cap B) \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin (A \cap B)) \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg(x \in (A \cap B)) \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \\
 &\Leftrightarrow x \in X \wedge (x \notin A) \vee (x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow ((x \in X) \wedge (x \notin A)) \vee ((x \in X) \wedge (x \notin B)) \\
 &\Leftrightarrow (x \in X \setminus A) \vee (x \in X \setminus B) \\
 &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \\
 &\Leftrightarrow x \in A' \cup B'.
 \end{aligned}$$

3. Seien B, C Teilmengen von A . Zeige die Äquivalenz von:

- (a) $B \subset C$
- (b) $B \cap C = B$
- (c) $B \cup C = C$

Lösung:

$$(a) \Rightarrow (b): x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, \text{ d.h. } B \cap C \subset B$$

$$x \in B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in B \cap C, \text{ d.h. } B \subset B \cap C$$

$$(b) \Rightarrow (c): x \in B \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in C$$

$$(c) \Rightarrow (a): x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in C$$

4. Sei X Menge und seien $A, B \subset X$. Die *symmetrische Differenz* von A, B ist die Menge

$$\{x \in X \mid x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$$

und wir schreiben dafür $A \Delta B$. Zeige:

- (a) $A \Delta B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$
- (b) $\emptyset \Delta A = A$
- (c) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$ für alle $C \subset X$.
- (d) Zeige durch ein Beispiel, daß in iii) die Inklusion i. a. keine Gleichheit ist.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
 x \in A \Delta B &\iff x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \\
 &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) \\
 &\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\
 &\iff \left[\underbrace{(x \in A \wedge x \notin A)}_{\text{falsch}} \vee (x \notin A \wedge x \in B) \right] \\
 &\quad \vee \left[(x \in A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{\text{falsch}} \right] \\
 &\iff (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B) \\
 &\iff x \in (A' \cap B) \cup (A \cap B')
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 x \in \emptyset \Delta A &\iff x \in \emptyset \cup A \wedge x \notin \emptyset \cap A \\
 &\iff x \in A \wedge \underbrace{x \notin \emptyset}_{\text{wahr}} \iff x \in A
 \end{aligned}$$

(c) Wende die Methode des indirekten Beweises an. Dann ist zu zeigen, daß

$$\forall C \subset X, x \in X \text{ gilt: } x \notin (A \Delta C) \cup (B \Delta C) \Rightarrow x \notin A \Delta B$$

gilt.

Bemerkung: $x \notin A \Delta B$ heißt x liegt entweder in A und in B oder x liegt in keiner der beiden Mengen. Weiter gilt nach der Regel von de Morgan:

$$x \notin (A \Delta C) \cup (B \Delta C) \iff x \notin (A \Delta C) \wedge x \notin (B \Delta C)$$

Wir setzen nun $x \notin (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$ voraus und machen eine Fallunterscheidung:

1. $x \in C$: In diesem Fall muß wegen der obigen Bemerkung sowohl $x \in A$, als auch $x \in B$ gelten $\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A\Delta B$.

2. $x \notin C$: Hier folgt analog $x \notin A \wedge x \notin B$ und damit $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A\Delta B$.

(d)

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$C = \{3, 4\}$$

$$\Rightarrow 4 \in A\Delta C \Rightarrow 4 \in (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$$

$$\text{aber } 4 \notin A\Delta B$$

Übungen (2)

zur Vorlesung „Analysis I“

mit Lösungen

5. Seien X, Y Mengen, sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $P(X)$ bzw. $P(Y)$ die Potenzmenge von X bzw. Y . Zeige:

- (a) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ für jede Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ in $P(Y)$.
- (b) $f^{-1}(B') = f^{-1}(B)'$ für jede Teilmenge B von Y .
- (c) $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$ für alle Mengen $A \subset X$, $B \subset Y$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} B_i \iff \forall i \in I : f(x) \in B_i \\ &\iff \forall i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B') &\iff f(x) \in B' \iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in \left(f^{-1}(B)\right)' \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y \in f\left(f^{-1}(B) \cap A\right) &\iff \exists x \in X : x \in f^{-1}(B) \wedge x \in A \wedge y = f(x) \\ &\iff \exists x \in X : f(x) \in B \wedge f(x) \in f(A) \wedge y = f(x) \\ &\iff y \in B \cap f(A) \end{aligned}$$

6. Sei X eine Menge und $\mathcal{X} \subset P(X)$. $\mathcal{X}$ heißt σ -Algebra in X , wenn gilt:

- i) $X \in \mathcal{X}$
- ii) $(A \in \mathcal{X} \implies A' \in \mathcal{X})$.

iii) Sind $A_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{X}$.

Zeige:

(a) Ist $\mathcal{X}$ σ -Algebra in X und $B \subset X$, so ist

$$\mathcal{X}_B := \{Z \cap B \mid Z \in \mathcal{X}\}$$

σ -Algebra in B .

(b) Sei Y eine Menge und $f : Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Ist $\mathcal{X}$ σ -Algebra in X , so ist

$$f^{-1}(\mathcal{X}) := \{f^{-1}(Z) \mid Z \in \mathcal{X}\}$$

eine σ -Algebra in Y .

Lösung:

In beiden Teilaufgaben sind die drei Eigenschaften einer σ -Algebra nachzuweisen:

(a) i. $X \in \mathcal{X} \Rightarrow X \cap B = B \in \mathcal{X}_B$

ii. $A \in \mathcal{X}_B \Rightarrow \exists Z \in \mathcal{X} : A = Z \cap B$. Mit $Z \in \mathcal{X}$ ist auch $Z' \in \mathcal{X}$. Es ist nun zu zeigen, daß auch $A' \in \mathcal{X}_B$ ist. Dabei ist das Komplement bzgl. B zu bilden, also $A' = B \setminus A$. Betrachte $C = Z' \cap B$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \cup C &= (Z \cap B) \cup (Z' \cap B) = \underbrace{(Z \cup Z') \cap B}_{=X} = B \\ A \cap C &= (Z \cap B) \cap (Z' \cap B) = \underbrace{(Z \cap Z') \cap B}_{=\emptyset} = \emptyset \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort $A' = B \setminus A = C = Z' \cap B \in \mathcal{X}_B$.

iii. $A_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists Z_n \in \mathcal{X} : A_n = Z_n \cap B$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Z_n \cap B) = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \right) \cap B \in \mathcal{X}_B$$

da nach Voraussetzung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n \in \mathcal{X}$ ist.

(b) i. $X \in \mathcal{X} \Rightarrow Y = f^{-1}(X) \in f^{-1}(\mathcal{X})$

ii. Völlig analog zu Aufgabe 5. a) beweist man

$$(*) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

Ist $A \in f^{-1}(\mathcal{X})$, so gibt es ein $B \in \mathcal{X}$ mit $A = f^{-1}(B)$. Setze nun $C := f^{-1}(B')$. Dann gilt wegen (*) und Aufgabe 5. a)

$$A \cap C = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A \cup C = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(X) = Y$$

Also folgt $A' = Y \setminus A = C = f^{-1}(B') \in f^{-1}(\mathcal{X})$

iii. $A_n \in f^{-1}(\mathcal{X}), n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists Z_n \in \mathcal{X} : A_n = f^{-1}(Z_n), n \in \mathbb{N}$

Mit (*) folgt also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(Z_n) = f^{-1} \left(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n}_{\in \mathcal{X}} \right) \in f^{-1}(\mathcal{X})$$

7. Seien A, B, C Mengen, seien $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ Abbildungen. Zeige:

(a) Sind f, g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f, g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Lösung:

(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

$$g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

$$\Rightarrow f(x) = f(y), \text{ da } g \text{ injektiv}$$

$$\Rightarrow x = y, \text{ da } f \text{ injektiv}$$

(b) f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv. Es genügt zu zeigen $g \circ f$ surjektiv:

Sei $z \in C$, dann ex. genau ein $y \in B$ mit $g(y) = z$ und genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ und damit die Surjektivität.

Es existiert also $(g \circ f)^{-1}$ und es gilt

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C$$

$$\text{und } (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ f = id_A$$

$\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$, da die Inverse eindeutig bestimmt ist.

8. Beweise in $\mathbb{N}$ folgende Rechenregeln:

$$(a) \quad m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k .$$

$$(b) \quad m + n = m + k \implies n = k .$$

$$(c) \quad m < n \implies m + k < n + k, \quad km < kn .$$

$$(d) \quad k < m \implies k + 1 \leq m .$$

Lösung:

(a) (Distributivgesetz) Nach Definition der Multiplikation gilt

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$$

und

$$m \cdot 1 = m.$$

Bei festem m und n sei M die Menge der k , für die die Behauptung gilt. Wir zeigen, daß $M = \mathbb{N}$ gilt.

$$i. \quad m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m = m \cdot n + m \cdot 1$$

und damit folgt $1 \in M$.

ii. Wenn k zu M gehört, gilt

$$m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k,$$

also

$$\begin{aligned} m \cdot (n + (k + 1)) &= m \cdot ((n + k) + 1) = m \cdot (n + k) + m \\ &= (m \cdot n + m \cdot k) + m = m \cdot n + (m \cdot k + m) \\ &= m \cdot n + m(k + 1) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung für $k + 1$. Also gilt $(k + 1) \in M$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $M = \mathbb{N}$.

(b) Wir zeigen, daß

$$n \neq k \Rightarrow m + n \neq m + k \quad (\text{indirekter Schluß}).$$

Bei festem n, k mit $n \neq k$ sei M die Menge der m mit

$$m + n \neq m + k.$$

i. Es gilt

$$n \neq k \Rightarrow n + 1 \neq k + 1 \Rightarrow 1 + n \neq 1 + k.$$

Also ist $1 \in M$.

ii. Ist $m \in M$, dann gilt $m + n \neq m + k$, und es folgt

$$(m + n) + 1 \neq (m + k) + 1 \Rightarrow (m + 1) + n \neq (m + 1) + k.$$

Also ist mit m auch $m + 1 \in M$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung also für alle natürlichen Zahlen.

(c) Sei $m < n$. Dann existiert ein l mit $m + l = n$, und damit gilt:

$$\begin{aligned} n + k &= (m + l) + k = (l + m) + k = l + (m + k) \\ &= (m + k) + l \\ &\Rightarrow m + k < n + k. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir mit (8a)

$$k \cdot n = k \cdot (m + l) = k \cdot m + k \cdot l \Rightarrow k \cdot n > k \cdot m.$$

(d) $k < m \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N} : k + l = m$

Wegen $l \in \mathbb{N}$ gilt $l \geq 1$ und damit

$$m = k + l \geq k + 1.$$

Übungen (3)
zur Vorlesung „Analysis I“
mit Lösungen

9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

- (a) Keine der Zahlen $n! + k$, $2 \leq k \leq n$, ist eine Primzahl (Lücken in der Folge der Primzahlen!).
- (b) Keine der Zahlen $(n!)^2 + k$, $2 \leq k \leq n$, ist eine Primzahlpotenz (m Primzahlpotenz: $\iff \exists p, s \in \mathbb{N} : p \text{ Primzahl, } m = p^s$).

Lösung:

- (a) Es ist

$$n! + k = \prod_{j=2}^n j + k = k \cdot \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n j + 1 \right),$$

d.h., k teilt $n! + k$. Da aber $1 < 2 \leq k \leq n < n! + k$ gilt, ist $n! + k$ keine Primzahl.

- (b) Nehmen wir an, daß $(n!)^2 + k$ eine Primzahlpotenz ist. Dann existieren eine Primzahl p und eine natürliche Zahl s , so daß

$$p^s = (n!)^2 + k = \left(\prod_{j=2}^n j \right)^2 + k = k \cdot \left(\left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n j^2 \right) \cdot k + 1 \right)$$

d.h., k teilt p^s . Dann muß k aber auch eine Potenz von p sein, d.h., es gibt ein

$\ell : 1 \leq \ell \leq s$ mit $k = p^\ell$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n j^2 \right) \cdot k + 1 &= p^{s-\ell} > k \Rightarrow s - \ell > \ell \\ \Rightarrow k &= p^\ell \mid p^{s-\ell} = \left(\prod_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n j^2 \right) \cdot k + 1, \end{aligned}$$

was nicht möglich ist.

10. Auf der Erde leben zur Zeit etwa $6 \cdot 10^9$ Menschen. Die relative Häufigkeit, daß zwei verschiedene Personen ununterscheidbaren Fingerabdruck haben, wird mit $\frac{1}{64 \cdot 10^9}$ angegeben, d. h. unter $64 \cdot 10^9$ Paaren ist eines mit ununterscheidbarem Fingerabdruck.

- (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, auf der Erde Paare von Menschen zu bilden?
- (b) Wieviele Paare von Einwohnern der Bundesrepublik haben ununterscheidbaren Fingerabdruck? (Einwohnerzahl der alten BRD: Etwa $6 \cdot 10^7$).
- (c) Wie groß muß die Einwohnerzahl einer Stadt in der Bundesrepublik mindestens sein, damit darin ein Paar mit ununterscheidbarem Fingerabdruck lebt?

(Es werden nur gerundete Rechnungen erwartet).

Lösung:

- (a) Sei n die Anzahl der Menschen, die auf der Erde leben (hier: $n \approx 6 \cdot 10^9$). Dann ist die Anzahl a_1 der Möglichkeiten auf der Erde unterschiedliche (homo- und heterosexuelle) Paare von Menschen zu bilden gleich der Anzahl der 2-elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Um die Kardinalität dieser Menge mit den Hilfsmitteln aus der Vorlesung zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor. Sei

$$M = \{\{a, b\} \mid a, b \in \mathbb{N}_n, a \neq b\}.$$

Gesucht ist $m = \text{card}(M)$. Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{N}_n \mid f \text{ ist injektiv}\}.$$

Dann gilt wegen $\text{card}(\{1, 2\}) = 2$ und $\text{card}(\mathbb{N}_n) = n$ nach einem Satz aus der Vorlesung

$$\text{card}(\mathcal{F}) = n \cdot (n + 1 - 2) = n \cdot (n - 1).$$

Sei $f \in \mathcal{F}$ mit $f(1) = a$ und $f(2) = b$, $a, b \in \mathbb{N}_n$. Dann ist $a \neq b$ auf Grund der Injektivität von f , denn andernfalls würde gelten

$$a = b \Leftrightarrow f(1) = f(2) \Rightarrow 1 = 2,$$

was nicht möglich ist.

Jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ läßt sich also mit einem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$, $a \neq b$, identifizieren. In der Menge der möglichen injektiven Abbildungen sind auch die Permutationen (als Bilder) enthalten. Die Anzahl der möglichen Permutationen von 2-elementigen Mengen beträgt $2! = 2$. Wählt man nur jeweils eine Permutation als Repräsentanten aus, so ist die Anzahl der möglichen Paare aus einer Menge von n Elementen gerade gleich der Anzahl der möglichen injektiven Abbildungen von 2-elementigen Mengen dividiert durch $2!$, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

Anschaulich erhält man die Formel für die Anzahl der möglichen Paare, indem man das folgende Schema betrachtet.

	1	2	3	·	·	·	$n-1$	n
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	·	·	·	(1, $n-1$)	(1, n)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	·	·	·	(2, $n-1$)	(2, n)
1	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	·	·	·	(3, $n-1$)	(3, n)
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·	·	·	·
$n-1$	($n-1, 1$)	($n-1, 2$)	($n-1, 3$)	·	·	·	($n-1, n-1$)	($n-1, n$)
n	($n, 1$)	($n, 2$)	($n, 3$)	·	·	·	($n, n-1$)	(n, n)

Interpretieren wir die n^2 Einträge in diesem Schema als Paare von Menschen, so stellen wir fest, daß die n Einträge in der Diagonalen unzulässig sind. Darüber hinaus treten die Einträge, die unterhalb der Diagonalen stehen, gespiegelt oberhalb der Diagonalen noch einmal auf. Um die Anzahl der Paare zu erhalten, muß man also die Anzahl der zulässigen Einträge noch einmal durch 2 teilen. Es ist wieder

$$m = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Wir erhalten also

$$a_1 = \text{card}(M) = m = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\approx \frac{36 \cdot 10^{18}}{2} = 18 \cdot 10^{18}.$$

- (b) Die Anzahl a_2 der Paare von Einwohnern in der Bundesrepublik ($n_2 \approx 6 \cdot 10^7$) mit ununterscheidbarem Fingerabdruck ergibt sich als Produkt der Anzahl aller möglichen Paare verschiedener Personen in der Bundesrepublik und der relativen Häufigkeit dafür, daß zwei verschiedene Personen ununterscheidbaren Fingerabdruck haben. Also

$$a_2 = \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} \cdot \frac{1}{64 \cdot 10^9} \approx \frac{18}{64} \cdot \frac{10^{14}}{10^9} \approx 28 \cdot 10^3.$$

- (c) Für die Anzahl n_3 der Einwohner muß gelten:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{n_3(n_3 - 1)}{2} \cdot \frac{1}{64 \cdot 10^9} \leq \frac{n_3^2}{128 \cdot 10^9} \\ \Rightarrow n_3^2 &\geq 128 \cdot 10^9 = 12,8 \cdot 10^{10} \approx (3,5 \cdot 10^5)^2 \\ \Rightarrow n_3 &\geq 3,5 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

11. Die Fibonacci-Zahlen F_n sind induktiv definiert:

$$F_1 := F_2 := 1 \quad F_{n+1} := F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Zeige:

- (a) $F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + 1 = F_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
 (b) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$, $n \in \mathbb{N}$.
 (c) $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + 1$ für alle geraden Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Induktion nach n :

$n=2$: $F_1 + 1 = F_3$ ist offensichtlich richtig.

$n \rightarrow n + 1$:

$$\sum_{i=1}^n F_i + 1 = \sum_{i=1}^{n-1} F_i + 1 + F_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

(b) Unter Benutzung der Formeln $F_m = F_{m+2} - F_{m+1}$ und $F_m = F_{m-2} + F_{m-1}$ zeigt man durch Induktion, daß

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n,$$

für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.

Die Gleichung gilt offensichtlich für $k=2$.

$k \rightarrow k + 1$:

$$\begin{aligned} F_{n+k+1} &= F_{n+k} + F_{n+k-1} \\ &= F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n + F_{k-1} F_{n+1} + F_{k-2} F_n \\ &= (F_k + F_{k-1}) F_{n+1} + (F_{k-1} + F_{k-2}) F_n \\ &= F_{k+1} F_{n+1} + F_k F_n \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Identität $k = n + 1$, so folgt

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$$

(c) Wir zeigen $F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 2$.

$n=2$: $F_3 F_1 - F_2^2 = 1$ ist offensichtlich richtig.

$n=3$: $F_4 F_2 - F_3^2 = -1$ ist ebenfalls richtig.

Setzt man $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ in obige Formel ein, so ist diese äquivalent zu

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1} F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

$n \rightarrow n + 1$:

$$F_{n+2} F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n) F_n - F_{n+1}^2$$

$$\begin{aligned}
&= -F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n + F_n^2 \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2) \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

12. Wir bilden „Worte“ aus den Buchstaben a, b in folgender Weise:

$$W_1 := a, \quad W_2 := b, \quad W_{n+1} := W_n W_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Zeige:

- (a) W_n hat F_n Buchstaben, $n \in \mathbb{N}$. ($F_n = n$ -te Fibonacci-Zahl)
- (b) Es gibt kein „Doppel a “ in W_n , $n \in \mathbb{N}$.

Wieviele Buchstaben hat W_{33} ?

Lösung:

1. Wir bezeichnen mit $|W_n|$ die Anzahl der Buchstaben des Wortes W_n . Durch Induktion über n zeigen wir die Behauptung:

$$n = 1, 2: |W_1| = |W_2| = 1 = F_1 = F_2$$

$$\begin{aligned}
n \rightarrow n+1: |W_{n+1}| &= |W_n| + |W_{n-1}| \\
&= F_n + F_{n-1} = F_{n+1} \\
\Rightarrow |W_n| &= F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

2. Ein doppeltes 'a' kann nur erzeugt werden, indem man an ein Wort, welches auf 'a' endet, ein Wort das mit 'a' beginnt anhängt. Wir zeigen, daß für $n \geq 2$ alle W_n mit einem 'b' beginnen. Somit kann in diesen Worten nie ein 'Doppel-a' auftreten, da $W_{n+1} = W_n W_{n-1}$.

$$n = 2 : W_2 = b$$

Nach Induktionsvoraussetzung beginne nun W_n mit einem 'b', d.h. $W_n = bV$ mit einem Wort V . Damit folgt $W_{n+1} = W_n W_{n-1} = bV W_{n-1}$. Also beginnt auch W_{n+1} mit einem 'b' und die Behauptung ist gezeigt. Das einzige Wort, welches mit 'a' beginnt ist W_1 . Also besteht nur noch bei W_3 die Chance ein doppeltes 'a' zu bilden. Es ist aber $W_3 = ba$, d.h. auch W_3 enthält kein 'Doppel-a'.

3. Mit der vorigen Aufgabe gilt wegen $F_7 = 13$, $F_8 = 21$ und $F_9 = 34$:

$$\begin{aligned} |W_{33}| = F_{33} &= F_{17}^2 + F_{16}^2 \\ F_{17} &= F_9^2 + F_8^2 = 34^2 + 21^2 = 1597 \\ \Rightarrow F_{17}^2 &= 2550409 \\ F_{16}^2 &= F_{15} F_{17} - 1 \\ F_{15} &= F_8^2 + F_7^2 = 441 + 169 = 610 \\ \Rightarrow F_{16}^2 &= 610 \cdot 1597 - 1 = 974169 \\ \Rightarrow F_{33} &= 2550409 + 974169 = 3524578 \end{aligned}$$

Übungen (4)

zur Vorlesung „Analysis I “

mit Lösungen

13. Zeige:

$$(a) \quad 4 \cdot n \leq n(n+1), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

$$(b) \quad 2 \cdot n \leq n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$(c) \quad 24 \mid 5^{2n} - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Erinnerung: $1 \cdot m := m, (k+1) \cdot m := k \cdot m + m,$

$$m^1 := m, m^{k+1} := m \cdot m^k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Lösung: Alle drei Teilaufgaben werden durch Induktion über n bewiesen.

$$(a) \quad n = 3 : 12 \leq 12 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 : 4(n+1) &= 4n+4 \stackrel{I.V.}{\leq} n(n+1)+4 \\ &= n^2+n+4 \stackrel{(*)}{\leq} n^2+n+2n+2 \\ &= n^2+3n+2 = (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung $(*)$ wegen $2n+2 \geq 4, n \geq 3$ gilt.

$$(b) \quad n = 2 : 4 \leq 4 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 : 2(n+1) &= 2n+2 \stackrel{I.V.}{\leq} n^2+2 \\ &\stackrel{n \geq 2}{\leq} n^2+2n+1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

$$(c) \quad n = 1 : 24 \mid 24 \quad \checkmark$$

$$n \rightarrow n+1 : 5^{2(n+1)} - 1 = 5^{2n+2} - 1$$

$$\begin{aligned}
&= 25 \cdot 5^{2n} - 1 \stackrel{I.V.}{=} 25 \cdot (24 \cdot k + 1) - 1, \quad k \in \mathbb{N} \\
&= 25 \cdot 24 \cdot k + 25 - 1 = 24(25k + 1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 24 \mid 5^{2(n+1)} - 1$$

14. Gegeben sei eine Menge $\mathbb{K} = \{a, b, c\}$. Auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ seien Abbildungen $+$ und $\cdot$ durch folgende Tafeln erklärt:

$+$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	a

- (a) Welches Element in $\mathbb{K}$ hat die Eigenschaft eines Null- bzw. Einselements?
Verifiziere die entsprechenden Eigenschaften.
- (b) $\mathbb{K}$ ist mit den angegebenen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ein Körper.
Verifiziere dazu das Kommutativgesetz.
- (c) Berechne $x := a + (-c)$, $y := a \cdot c^{-1}$.

Lösung:

- (a) Das Nullelement ist b , das Einselement a . Verifizieren kann man diese Aussage dadurch, daß man erkennt, daß die Spalte unter „+“ bzw. unter „ $\cdot$ “ in der Spalte unter b bzw. a reproduziert wird.
- (b) Da die beiden Verknüpfungstabellen symmetrisch bez. der Hauptdiagonalen sind, gilt sowohl für $+$, als auch für $\cdot$ das Kommutativgesetz.
- (c)

$$\begin{aligned}
x &= a + (-c) = a + a = c \\
y &= a \cdot c^{-1} = c^{-1} = c
\end{aligned}$$

15. Sei X eine Menge und sei $\mathcal{X} \subset P(X)$. $\mathcal{X}$ heißt ein *Dynkin-System* in X , wenn gilt:

- i) $X \in \mathcal{X}$
- ii) $A, B \in \mathcal{X}, A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{X}$
- iii) Ist $A_m \in \mathcal{X}, m \in \mathbb{N}$, und gilt $A_n \cap A_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, so gilt $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \in \mathcal{X}$ ($\mathcal{X}$ ist abgeschlossen gegenüber disjunkter Vereinigung).
- (a) Zeige die Äquivalenz von :
 - i) $\mathcal{X}$ ist Dynkin-System und aus $A, B \in \mathcal{X}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{X}$.
 - ii) $\mathcal{X}$ ist σ -Algebra.
- (b) Sei $\#X = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{X}$ definiert durch

$$\mathcal{X} := \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid \#A = 2\ell, \ell \in \mathbb{N}_k\}.$$

Zeige: $\mathcal{X}$ ist Dynkin-System, aber keine σ -Algebra, falls $k > 1$.

Lösung:

- (a) Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{X}$ eine σ -Algebra ist.

Eig.(i): Eigenschaft (i) einer σ -Algebra ist offensichtlich erfüllt.

Eig.(ii): Sei $A \in \mathcal{X}$, dann wähle in Eig.(ii) eines Dynkin-Systems $B = X \Rightarrow X \setminus A = A' \in \mathcal{X}$.

Eig.(iii): Sei $A_n \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist $\bigcup A_n \in \mathcal{X}$. Wir schreiben diese Vereinigung als disjunkte Vereinigung mit

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus (B_1 \cap A_2) \\ B_3 &= A_3 \setminus ((B_1 \cup B_2) \cap A_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$B_n = A_n \setminus ((B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n-1}) \cap A_n)$$

Es gilt $B_n \in \mathcal{X}$, wegen der zusätzlichen Vor. in (i) und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Bei der Umkehrung folgt aus den Eigenschaften einer σ -Algebra zunächst $A \cap B = (A' \cup B')' \in \mathcal{X}$ und damit für $A, B \in \mathcal{X}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A = B \cap A' \in \mathcal{X}$. Eig. (i) und (iii) eines Dynkin Systems sind offensichtlich erfüllt.

(b) Wir weisen die Eigenschaften eines Dynkin Systems nach.

- i. $X \in \mathcal{X}$ ist klar
- ii. $A, B \in \mathcal{X}, A \subset B \Rightarrow \#(B \setminus A) = 2l_B - 2l_A = 2(l_B - l_A) \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{X}$
- iii. Da X endlich ist, also $X = \{a_1, \dots, a_{2k}\}$, gibt es in $\mathcal{X}$ auch nur endlich viele disjunkte Teilmengen. Seien also $A_i \in \mathcal{X}, i = 1, \dots, m$, paarweise disjunkt.

$$\Rightarrow \# \bigcup_{i=1}^m A_i = \sum_{i=1}^m \# A_i = \sum_{i=1}^m 2l_i = 2 \left(\sum_{i=1}^m l_i \right) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{X}.$$

$\mathcal{X}$ ist keine σ -Algebra : $A = \{a_0, a_1\}, B = \{a_1, a_2\} \Rightarrow A \cup B = \{a_0, a_1, a_2\} \notin \mathcal{X}$.

16. Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{N} \ni n \mapsto n^5 - n \in \mathbb{N}_0$, wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zeige: 30 ist Teiler von $f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 5n + 6 - (5n + 5)) \\ &= (n - 1)n(n + 1)((n + 2)(n + 3) - 5(n + 1)) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) - 5(n - 1)n(n + 1)^2. \end{aligned}$$

Die in der letzten Zeile auftretende Differenz ist durch 30 teilbar, da der Minuend aus einem Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen besteht, der Subtrahend aus einem Produkt drei aufeinander folgender Zahlen und dem Faktor 5 besteht und jedes Produkt, das aus k aufeinander folgenden Zahlen besteht, durch k teilbar ist.

Übungen (5)
zur Vorlesung „Analysis I “
mit Lösungen

Hinweis zu 17 und 20: Benutzen Sie die Aussage, daß eine Primzahl p eine der beiden Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ teilt, falls p das Produkt $m \cdot n$ teilt.

17. (a) Zeige: Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 12$.

(b) Sei p eine Primzahl und sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Zeige: Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^n = p$.

Lösung: Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:

Beh.: Sei p eine Primzahl, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $a \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl. Dann gilt:

$$(*) \quad p|a^n \Rightarrow p|a.$$

Beweis: Für den Beweis benutzen wir

$$p|m \cdot n \Rightarrow p|m \vee p|n.$$

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch vollständige Induktion nach n . Sei M die Menge der natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die die Behauptung gilt. Es ist $2 \in M$, da

$$p|a^2 \Leftrightarrow p|a \cdot a \Rightarrow p|a \vee p|a \Leftrightarrow p|a.$$

Sei nun $n \in M$, d.h. aus $p|a^n$ folgt $p|a$. Dann ist auch $n+1 \in M$, denn

$$p|a^{n+1} \Leftrightarrow p|a \cdot a^n \Rightarrow p|a \vee p|a^n \Rightarrow p|a \vee p|a \Leftrightarrow p|a.$$

Also gilt die Behauptung für alle $n \geq 2$.

Wir kommen nun zur Lösung der Aufgaben.

- (a) Nehmen wir an, daß ein $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden a, b und $x^2 = 12$ existiere.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} = 12 &\Rightarrow a^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot b^2 \Rightarrow 3|a^2 \Rightarrow 3|a \Rightarrow \exists c : a = 3 \cdot c \\ &\Rightarrow a^2 = 3^2 \cdot c^2 \Rightarrow 3^2 \cdot c^2 = 3 \cdot 2^2 \cdot b^2 \Rightarrow 3 \cdot c^2 = 2^2 \cdot b^2 \\ &\Rightarrow 3|2^2 \cdot b^2 \Rightarrow 3|2^2 \vee 3|b^2 \Rightarrow 3|b^2 \Rightarrow 3|b. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage steht allerdings im Widerspruch zur Annahme, daß a und b teilerfremd sind, womit (17a) bewiesen ist.

- (b) Nehmen wir an, daß ein $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden a, b und $x^n = p$ existiere.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{b^n} = p &\Rightarrow a^n = p \cdot b^n \Rightarrow p|a^n \Rightarrow p|a \Rightarrow \exists c : a = p \cdot c \Rightarrow a^n = p^n \cdot c^n \\ &\Rightarrow p^n \cdot c^n = p \cdot b^n \Rightarrow p^{n-1} \cdot c^n = b^n \Rightarrow p|b^n \Rightarrow p|b. \end{aligned}$$

Die letzte Aussage steht nun im Widerspruch zur Annahme, daß a und b teilerfremd sind, womit (17b) bewiesen ist.

18. Sei p eine Primzahl.

Sei $x = \frac{a}{b}$ eine rational Zahl, $a \neq 0$. Die Primfaktorzerlegung läßt eine eindeutige Darstellung

$$x = \frac{a}{b} = p^\nu \cdot \frac{a'}{b'} \quad \text{mit } \nu \in \mathbb{Z}, a' \in \mathbb{Z}, b' \in \mathbb{N}, p \nmid |a'|, p \nmid b'$$

zu. Wir definieren damit

$$|x|_p := p^{-\nu}.$$

Dies ergänzen wir mit: $|0|_p := 0$.

Beweise:

(a) $|x|_p = 0 \iff x = 0$.

(b) $|x \cdot y|_p = |x|_p \cdot |y|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$

$$(c) \quad |x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

$$(d) \quad |x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Lösung: Wir beweisen zunächst, daß die Darstellung eindeutig ist. Dazu betrachten wir zwei Darstellungen

$$x = \frac{a}{b} = p^\nu \cdot \frac{a'}{b'} = p^\mu \cdot \frac{a''}{b''} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \nu, \mu \in \mathbb{Z}, a', a'' \in \mathbb{Z}, b', b'' \in \mathbb{N}, \\ (*) \quad p \nmid |a'|, p \nmid |a''|, p \nmid b', p \nmid b''. \end{array}$$

Betrachten wir den Fall $\nu \geq \mu$ und multiplizieren beide Seiten mit $p^{-\mu} \cdot b' \cdot b''$, dann erhalten wir

$$p^{\nu-\mu} \cdot a' \cdot b'' = a'' \cdot b'$$

Aus Voraussetzung (*) folgt zunächst $\nu = \mu$ und damit sofort

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}.$$

Im Fall $\nu < \mu$ vertauscht man oben ν und μ .

(a) Es gilt nach Definition

$$x = 0 \Rightarrow |x|_p = 0.$$

und weiter

$$x \neq 0 \Rightarrow x = p^\nu \cdot \frac{a'}{b'} \quad \text{mit} \quad a' \neq 0 \Rightarrow |x|_p = p^{-\nu} > 0.$$

(b) Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine der beiden Zahlen, z.B. x , gleich Null ist. Dann gilt einerseits

$$x = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0 \Rightarrow |x \cdot y|_p = 0$$

und andererseits

$$|x|_p = 0 \Rightarrow |x|_p \cdot |y|_p = 0.$$

Falls beide Zahlen ungleich Null sind, lassen sie sich in eindeutiger Weise darstellen als

$$x = p^{\nu_1} \frac{a}{b} \text{ und } y = p^{\nu_2} \frac{c}{d},$$

und für die zugehörigen „Beträge“ erhält man

$$|x|_p = p^{-\nu_1} \text{ und } |y|_p = p^{-\nu_2}.$$

Dann gilt für das Produkt

$$x \cdot y = p^{\nu_1 + \nu_2} \cdot \frac{ac}{bd}, p \nmid |ac|, p \nmid bd.$$

Damit folgt:

$$|xy|_p = p^{-(\nu_1 + \nu_2)} = p^{-\nu_1} \cdot p^{-\nu_2} = |x|_p \cdot |y|_p.$$

- (c) Wir betrachten wieder zuerst den Fall, daß eine der beiden Zahlen gleich Null ist. Sei also o.B.d.A. $x = 0$. Dann gilt einerseits

$$|x|_p = 0 \Rightarrow \max(|x|_p, |y|_p) = |y|_p$$

und andererseits

$$|x + y|_p = |y|_p.$$

Für den Fall, daß beide Zahlen ungleich Null sind, gilt wieder die obige eindeutige Darstellung und für die Summe

$$x + y = p^{\nu_1} \frac{a}{b} + p^{\nu_2} \frac{c}{d}.$$

1. Fall: $\nu_1 < \nu_2 \Rightarrow \nu_2 - \nu_1 > 0$

$$\Rightarrow -\nu_1 > -\nu_2 \Rightarrow p^{-\nu_1} > p^{-\nu_2} \Rightarrow \max(|x|_p, |y|_p) = p^{-\nu_1}$$

Durch Ausklammern von p^{ν_1} aus der Summe erhält man

$$x + y = p^{\nu_1} \left(\frac{a}{b} + p^{\nu_2 - \nu_1} \frac{c}{d} \right) = p^{\nu_1} \left(\frac{ad + p^{\nu_2 - \nu_1} bc}{bd} \right).$$

Nun gilt aber

$$p \nmid |ad| \Rightarrow p \nmid |ad + p^{\nu_2 - \nu_1} bc|$$

und

$$p \nmid bd$$

und damit für den „Betrag“ der Summe

$$|x + y|_p = p^{-\nu_1} = \max(|x|_p, |y|_p).$$

2. Fall: $\nu_1 > \nu_2$ Vertausche ν_1 und ν_2 im 1. Fall. $\checkmark$

3. Fall: $\nu_1 = \nu_2$ Durch Ausklammern von p^{ν_1} aus der Summe erhält man

$$x + y = p^{\nu_1} \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = p^{\nu_1} \left(\frac{ad + bc}{bd} \right).$$

Hier kann nun aber im Zähler eine Zahl auftreten, die durch $p^n, n \in \mathbb{N}_0$, teilbar ist. Die eindeutige Darstellung von $x + y$ besitzt also die Form

$$x + y = p^{\nu_1+n} \left(\frac{e}{bd} \right).$$

Damit erhält man nun:

$$|x + y|_p = p^{-\nu_1-n} \leq p^{-\nu_1} = \max(|x|_p, |y|_p).$$

Für $n > 0$ tritt an dieser Stelle eine echte Ungleichung auf.

(d) Durch Anwendung des dritten und ersten Aufgabenteils erhält man

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p) \leq |x|_p + |y|_p.$$

19. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

(a) Es gelte

i) $A \cup B = \mathbb{R}$.

ii) $x \in A, y \in B \implies x < y$

Zeige: $\exists x \in \mathbb{R}$ mit: $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq x\}$ oder $A = \{z \in \mathbb{R} \mid z < x\}$.

(b) Seien A, B nach oben beschränkt. Setze

$$C := \{z \in \mathbb{R} \mid z = a + b \text{ mit } a \in A, b \in B\}.$$

Zeige: $\sup_{z \in C} z = \sup_{a \in A} a + \sup_{b \in B} b$.

Lösung:

Bemerkungen zum Supremum:

Für eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum, d.h. eine kleinste obere Schranke dieser Menge. Eine solche Zahl S ist eine obere Schranke und keine Zahl $< S$ ist obere Schranke, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es mindestens ein $a \in A$ mit $S - \varepsilon < a$.

- (a) Nach Voraussetzung ist $A \neq \emptyset$ und die Menge ist nach oben beschränkt, denn jedes $y_0 \in B \neq \emptyset$ ist obere Schranke von A , da

$$\forall x \in A : x \stackrel{ii)}{<} y_0.$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom besitzt A demnach ein Supremum $x := \sup A$.

1.Fall: $x \in A$

Wir zeigen, daß dann $A = \{z \in \mathbb{R} : z \leq x\} =: C$.

$A \subset C$: Sei $z \in A$. Da x obere Schranke von A ist, gilt $z \leq x \Rightarrow z \in C$.

$C \subset A$: Sei $z \in C$. Angenommen $z \notin A$.

$$\stackrel{i)}{\Rightarrow} z \in B \stackrel{x \in A}{\Rightarrow} x < z.$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu $z \in C$. z muß also in A liegen.

2.Fall: $x \notin A$

Wir zeigen, daß dann $A = \{z \in \mathbb{R} : z < x\} =: D$.

$A \subset D$: Sei $z \in A$.

$$x \notin A \stackrel{(i)}{\Rightarrow} x \in B \stackrel{(ii)}{\Rightarrow} z < x \Rightarrow z \in D.$$

$D \subset A$: Sei $z \in D$. Nehmen wir an, daß $z \notin A$.

$$\Rightarrow z \in B \Rightarrow z \text{ obere Schranke von } A \Rightarrow x \leq z.$$

Die letzte Ungleichung steht allerdings im Widerspruch zu $z \in D$. z muß also in A liegen.

- (b) Wir definieren $A + B := \{z \in \mathbb{R} \mid z = a + b \text{ mit } a \in A, b \in B\}$ und zeigen, daß $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Sei $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$, so müssen wir zeigen, daß $\alpha + \beta$ die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist. Offensichtlich ist $\alpha + \beta$ eine obere Schranke dieser Menge, denn es gilt für $z \in A + B$:

$$z = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existieren $a \in A, b \in B$ mit

$$\alpha - \varepsilon/2 < a \quad \text{und} \quad \beta - \varepsilon/2 < b$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta) - \varepsilon < (a + b) =: z,$$

und damit ist $\alpha + \beta$ die kleinste obere Schranke von $A + B$.

20. (a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeige: Ist $x \cdot y$ oder $x + y$ eine rationale Zahl, so gilt:
 $x, y \in \mathbb{Q}$ oder $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Seien p, q verschiedene Primzahlen. Zeige: Es gibt keine rationale Zahl x mit

$$x^2 = p \cdot q.$$

Lösung:

(a) Es ist zu zeigen: $x \in \mathbb{Q} \iff y \in \mathbb{Q}$. Da die Verknüpfungen '+' und '·' kommutativ sind, genügt es, $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in \mathbb{Q}$ zu beweisen.

i. Sei $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ und $x \cdot y = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow y = \frac{c}{dx} = \frac{cb}{ad} \in \mathbb{Q}$$

also ist $y \in \mathbb{Q}$.

ii. Sei nun $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ und $x + y = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow y = \frac{c}{d} - x = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd} \in \mathbb{Q}$$

also ist auch hier $y \in \mathbb{Q}$.

(b) Wir nehmen an, es gäbe ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = pq$. Dann läßt sich x schreiben als $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Damit gilt

$$\begin{aligned} b^2 x^2 = a^2 &\iff b^2 pq = a^2 \Rightarrow p|a^2 \Rightarrow p|a \Rightarrow a = mp, \quad m \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow b^2 pq = m^2 p^2 &\iff b^2 q = m^2 p \Rightarrow p|b^2 \Rightarrow p|b \end{aligned}$$

Also teilt p sowohl a , als auch b im Widerspruch zu a, b teilerfremd. Wir haben im Beweis benutzt: Falls eine Primzahl p ein Produkt ganzer Zahlen m, n teilt, so teilt sie bereits eine der beiden Zahlen. Hieraus folgt sofort: $p|n^2 \Rightarrow p|n$.

Übungen (6)

zur Vorlesung „Analysis I“

21. (a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise:

$$(1+a)^n \geq 1+n \cdot a \quad (\text{Bernoullische Ungleichung}).$$

- (b) Bestimme Supremum und Infimum von

$$M := \left\{ \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lösung:

- (a) Führe Induktion über n .

$$\begin{aligned} n=1: (1+a)^1 &\geq 1+a \quad \checkmark \\ n \rightarrow n+1: (1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \stackrel{I.V.}{\geq} (1+na)(1+a), \quad a > -1 \\ &= 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \\ &\geq 1+(n+1)a \end{aligned}$$

- (b) Wie man sofort mit der nächsten Aufgabe Teil a) sieht, gilt $0 \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Da für $n=1$ der Wert 0 angenommen wird, ist

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 0$$

Für $0 < \rho < 1$ gilt nach Teil a):

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} > \rho \quad \text{für } n > \frac{1}{1-\rho}.$$

Nach Lemma 4.7 der Vorlesung ist für das Supremum $x=1$ zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in M : x - \varepsilon \leq a.$$

Setze $\rho = 1 - \varepsilon$. Dann gibt es ein n , $n > \frac{1}{1-\rho}$ mit $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \rho = 1 - \varepsilon$, woraus folgt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1.$$

22. (a) Sei $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Zeige: $0 < a^n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Zeige:

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a > 1 + \frac{1}{n}$

ii) $A := \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht nach oben beschränkt.

Lösung:

(a) Führe Induktion über n .

$$n = 1 : 0 < a^1 < 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 : \underbrace{0 < a^n \wedge 0 < a}_{I.V.} &\Rightarrow 0 < a \cdot a^n = a^{n+1} \\ \underbrace{a^n < 1 \wedge a < 1}_{I.V.} &\Rightarrow a^{n+1} = a \cdot a^n < 1 \end{aligned}$$

(b) i. Wähle $n > \frac{1}{a-1}$. Damit folgt

$$n > \frac{1}{a-1} \iff a-1 > \frac{1}{n} \iff a > 1 + \frac{1}{n}$$

ii. Sei $C \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Es ist zu zeigen, daß ein Element aus A größer als C ist, d.h. man findet ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > C$. Setze dazu $a = 1+b$, $b > 0$.

Wähle weiter ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{C-1}{b} = \frac{C-1}{a-1}$. Dann gilt offenbar

$$1 + nb > 1 + C - 1 = C$$

Mit Aufgabe 21 Teil a) folgt also:

$$a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb > C$$

Jede Konstante $C \in \mathbb{R}$ wird also für $n > \frac{C-1}{a-1}$ von a^n übertroffen, d.h. A ist nicht nach oben beschränkt.

23. Beweise:

(a) $\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 .$

(b) $\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} = \frac{n^n}{(n-1)!} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2 .$

$$(c) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(d) \quad 3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n! \leq 2 \cdot n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis zu 23.(c), 1. Teil: Bei Verwendung der Binomischen Formel benutzen Sie die Tatsache, daß $\binom{n}{k} n^{-k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, $1 \leq k \leq n$.

Lösung:

(a) Wir beweisen die Formel mit Induktion. Der Induktionsanfang ist offensichtlich erfüllt.

$$n \mapsto n + 1 :$$

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Wir beweisen die Formel mit Teil (a):

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \frac{n^n}{n!} \underbrace{\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i+1}{i}\right)}_{=n} = \frac{n^n}{n!} \cdot n = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

(c) Nach der Binomischen Formel gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

Für $k \geq 1$ gilt $1 \leq n - k + 1 \leq n$ und deshalb

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} \leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Setzt man diese Abschätzung in die obige Summe ein, so folgt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 3. \end{aligned}$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung in Aufgabe 1 folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{1}{n} = 2.$$

(d) Nach Aufgabenteil (a) und (c) gilt

$$n! = \frac{n^n}{\prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}_{\geq 2}} \leq \frac{n^n}{2^{n-1}} \leq 2n \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

und

$$n! = \frac{n^n}{\prod_{i=1}^{n-1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}_{< 3}} \geq \frac{n^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

24. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Zeige: Es gibt genau eine positive reelle Zahl x , so daß $x^n = a$.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + x^{n-1}), \quad 0 < x < z,$$

und die daraus folgende Ungleichung $z^n - x^n < (z - x)n z^{n-1}$.

Lösung: Die Eindeutigkeit folgt aus der Implikation

$$0 < x < y \Rightarrow x^n < y^n.$$

Sei $A := \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0, z^n \leq a\}$. Die Zahl $t = \frac{a}{1+a}$ liegt in A , denn $0 < t < 1$ und daher $t^n \leq t < a$. Damit ist A nichtleer. Weiter ist $1 + a$ obere Schranke von A , denn

$$z > 1 + a \Rightarrow z^n \geq z > a \Rightarrow z \notin A.$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es eine obere Grenze $x = \sup_{z \in A} z$ in $\mathbb{R}$. Wir werden zeigen, daß $x^n = a$ gilt, d.h., wir zeigen (indirekt) $x^n \geq a$ und $x^n \leq a$.

Angenommen $x^n < a$. Die Identität

$$z^n - x^n = (z - x)(z^{n-1} + z^{n-2}x + \dots + x^{n-1}), \quad 0 < x < z,$$

führt auf die Ungleichung

$$z^n - x^n < (z - x)nz^{n-1}.$$

Wähle h so, daß $0 < h < 1$ und

$$h < \frac{a - x^n}{n(x+1)^{n-1}}$$

gilt. Setze $z = x + h$, dann folgt

$$(x+h)^n - x^n < hn(x+h)^{n-1} < hn(x+1)^{n-1} < a - x^n,$$

und $(x+h)^n < a$, d.h. $x+h \in A$ (Widerspruch zu $x = \sup_{z \in A} z$!).

Sei nun $x^n > a$ angenommen. Setze

$$k = \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}.$$

Dann ist $0 < k < x$ (da $x^n - a < x^n < nx^n \forall n$), und für beliebiges $z \geq x - k$ folgt

$$x^n - z^n \leq x^n - (x-k)^n < knx^{n-1} = x^n - a.$$

Also ist $z^n > a$ und $z \notin A$. Damit ist $x-k$ eine obere Schranke von A im Widerspruch dazu, daß x kleinste obere Schranke ist.

Übungen (7)

zur Vorlesung „Analysis I“

mit Lösungen

25. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen.

(a) Zeige: Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, und es gilt:

$$\lim_n |a_n| = \left| \lim_n a_n \right|.$$

(b) Gilt in (a) auch die Umkehrung?

(c) Zeige: Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so konvergiert auch

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ und es gilt: } \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \lim_n a_n.$$

(d) Zeige: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und ist $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge,

so ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt: $\lim_n a_n = \lim_n b_n$.

Lösung:

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gilt:

$$\exists a, N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Damit folgt aber für alle $n \geq N_0$:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon,$$

also gerade die Behauptung.

(b) Die Umkehrung gilt nicht. Dies sieht man z.B. an $a_n = (-1)^n$.

(c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gilt:

$$\exists a, N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2.$$

Wir wählen nun

$$N_0 := \max \left\{ N_1, \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| \right\rceil + 1 \right\}.$$

Dann ist für $n \geq N_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i - a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a| + \frac{1}{n} \sum_{i=N_1+1}^n \underbrace{|a_i - a|}_{\leq \varepsilon/2} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a|}{\frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a|} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - N_1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist damit bewiesen.

(d) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gilt:

$$\exists a, N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2.$$

Da $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert, gilt:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |a_n - b_n| < \varepsilon/2.$$

Wir wählen $N_0 := \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für alle $n \geq N_0$:

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \leq |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

26. Beweise:

(a) $\left(\frac{n+2}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

(b) $\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

(c) $\lim_n \left(\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n\right) = \frac{5}{4}.$

Lösung:

$$(a) \quad \frac{n+2}{n^2} = \frac{1+2/n}{n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\left(1 + \underbrace{2/n}_{\rightarrow 0}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow 0$$

(b) Wir zeigen, daß $2^n \geq n^2$ ist. Damit erhalten wir dann nämlich:

$$\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Beh. 1: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ gilt: $n^2 \geq 2n + 1$.

Beweis: (durch Induktion über n)

$$n = 3: 3^2 = 9 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1 \checkmark.$$

$n \rightarrow n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $n^2 \geq 2n + 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \stackrel{I.V.}{\geq} 2n + 1 + 2n + 1 = 4n + 1 + 1 \\ &\stackrel{n \geq 1}{\geq} (3n + 2) + 1 \stackrel{n \geq 0}{\geq} (2n + 2) + 1 = 2(n + 1) + 1. \end{aligned}$$

Damit beweisen wir nun die

Beh. 2: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt: $2^n \geq n^2$.

Beweis: (durch Induktion über n)

$$n = 4: 2^4 = 16 = 4^2 \checkmark.$$

$n \rightarrow n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $2^n \geq n^2$. Damit erhalten wir:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{I.V.}{\geq} 2 \cdot n^2 \stackrel{Beh.1}{\geq} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Eine **alternative Lösungsmöglichkeit** besteht darin, allgemeiner zu zeigen, daß für $p > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ die Folge mit den Gliedern $\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}$ eine Nullfolge ist. Im Spezialfall $p = 1, \alpha = 1$ folgt die Behauptung in (b). Sei $k > \alpha$, dann gilt für $n > 2k$

$$\begin{aligned} (1+p)^n &> \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!} \\ \Rightarrow 0 &< \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha-k}. \end{aligned}$$

Da $n^{\alpha-k} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), wegen $k > \alpha$, folgt die Behauptung.

(c) Es gilt nach der Binomischen Formel für beliebige $a \in \mathbb{R}, a > 0$:

$$(1 + a/2)^2 = 1 + a + a^2/4 \geq 1 + a \Rightarrow (*) \quad \sqrt{1+a} \leq 1 + a/2.$$

Wir betrachten nun

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n = 2n \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} - 2n$$

$$= 2n \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} - 1 \right)$$

Es gilt $a_n \geq \frac{5}{4}$, da

$$1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2} = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{8n} + \left(\frac{5}{8n} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2n^2} - \frac{25}{64n^2}}_{\geq 0} \geq \left(1 + \frac{5}{8n} \right)^2$$

$$\Rightarrow a_n = 2n \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} - 1 \right) \geq 2n \left(1 + \frac{5}{8n} - 1 \right) = \frac{5}{4}.$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n - \frac{5}{4} &= 2n \left(\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2}} - 1 \right) - \frac{5}{4} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 2n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4n} + \frac{1}{2n^2} \right) - 1 \right) - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2n} - \frac{5}{4} \\ &= \frac{1}{2n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

27. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige:

- (a) $0 \leq a_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
- (c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

Lösung:

- (a) Wir beweisen die erste Aussage mit Induktion. Der Induktionsanfang ist für beide Ungleichungen erfüllt. Sei also $a_n \geq 0$, dann ist offensichtlich auch $a_{n+1} \geq 0$. Für die andere Ungleichung sei

$$a_n \leq 1 \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \underbrace{\sqrt{1 + a_n^2}}_{\geq 0}} \leq a_n \leq 1$$

(b) Aus der gerade bewiesenen Ungleichung folgt sofort, daß a_n monoton fallend ist.

(c) Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + \underbrace{a_n^2}_{\geq 0}}} \leq \frac{a_n}{2}.$$

$$\Rightarrow a_n \leq \frac{a_{n-1}}{2} \leq \frac{a_{n-2}}{4} \leq \dots \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ und $a_n \geq 0$ folgt $\lim a_n = 0$.

28. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $q \in [0, 1)$ und damit gelte:

$$|a_{n+1} - a| \leq q|a_n - a| \quad \forall n \geq N.$$

Zeige: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Es sei $r \in (0, 1)$, $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} := rx_n(1 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeige: $x_n \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, was ist der Grenzwert?

iii) Zeige die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lösung:

(a) Man zeigt zunächst

$$|a_{N+n} - a| \leq q^n |a_N - a|, \quad n \geq 1$$

durch Induktion über n :

$$n = 1 : |a_{N+1} - a| \leq q|a_N - a| \quad \checkmark$$

$$n \rightarrow n + 1 : |a_{N+(n+1)} - a| = |a_{(N+n)+1} - a| \leq q|a_{N+n} - a|$$

$$\stackrel{I.V.}{\leq} q \cdot q^n |a_N - a| = q^{n+1} |a_N - a|.$$

Da $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt $|a_n - a| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(b) i. Beweis durch Induktion über n .

$$n = 1 : x_1 \in (0, 1) \quad \checkmark$$

$$n \rightarrow n + 1 : x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > 0$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) < 1$$

da $0 < r < 1$ und $0 < x_n < 1$, $0 < 1 - x_n < 1$ nach I.V..

ii. Im Falle von Konvergenz gilt für den Grenzwert

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

die Beziehung

$$x = rx(1 - x).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x = 0$.

2. Fall: $x \neq 0$.

$$\Rightarrow 1 = r(1 - x) \Rightarrow x = \frac{r - 1}{r} < 0.$$

Dieses x stellt allerdings keinen möglichen Grenzwert für unsere Folge x_n dar, da nach Aufgabenteil i. alle Folgenglieder im Intervall $(0, 1)$ liegen und somit kein Grenzwert < 0 in Frage kommt.

iii. Es gilt

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = x_n \cdot \underbrace{r(1 - x_n)}_{< 1} < x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Also ist die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Nach Teil ii. ist sie auch nach unten beschränkt (durch 0) und muß somit konvergieren.

Übungen (8)

zur Vorlesung „Analysis I“

mit Lösungen

29. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.

(a) Sei $b_n := \inf\{a_k | k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Zeige: $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton wachsend und es gilt:

$$\lim_n b_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

(b) Sei $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Zeige: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Lösung:

(a) Da die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, also $|a_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$ für ein $C \in \mathbb{R}$, ist auch die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, d.h.

$$|b_n| = \inf_{k \geq n} |a_k| \leq C, \quad n \in \mathbb{N}$$

Offenbar ist

$$b_{n_1} = \inf_{k \geq n_1} a_k \leq \inf_{k \geq n_2} a_k = b_{n_2}, \quad n_1 \leq n_2$$

Die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist somit monoton wachsend und beschränkt, also existiert der Grenzwert $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Nach Definition des Grenzwertes gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$b_{n_0} = \inf_{k \geq n_0} a_k > b - \varepsilon$$

Daraus folgt für $\underline{a} = \liminf a_n$, daß $\underline{a} \geq b$ ist. Andernfalls wäre $\underline{a} < b$, so daß für unendlich viele a_n gilt: $a_n \leq \underline{a} + \varepsilon'$ für $\varepsilon' = \frac{b-\underline{a}}{2}$; damit ist $a_n \leq b - \varepsilon'$ für unendlich viele n (Widerspruch!).

Es bleibt zu zeigen, daß $\underline{a} \leq b$ ist. Nach Definition des Infimums gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\mu_n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \geq n$ mit $b_n \leq a_{\mu_n} \leq b_n + \frac{1}{n}$ (siehe Lemma 4.7 der Vorlesung für das Infimum). Die Teilfolge $\{a_{\mu_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen b ,

$$|b - a_{\mu_n}| \leq |b - b_n| + |b_n - a_{\mu_n}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\forall n \geq N$, wobei zu beliebigem $\varepsilon > 0$ $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq N$ und $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dies zeigt $\underline{a} \leq b$, da $\underline{a}$ der kleinste Grenzwert von Teilfolgen von $\{a_n\}$ ist.

(b) Setze

$$a := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$b := \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n > a - \frac{\varepsilon}{4}$, $n > m$. Also gilt auch für das arithmetische Mittel

$$\frac{a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m} > a - \frac{\varepsilon}{4}, \quad n > m$$

und damit

$$\frac{a_{m+1} + \dots + a_n}{n} > \frac{n - m}{n} \left(a - \frac{\varepsilon}{4} \right), \quad n > m$$

Wegen $\frac{n-m}{n} \left(a - \frac{\varepsilon}{4} \right) \rightarrow a - \frac{\varepsilon}{4}$, $n \rightarrow \infty$ gibt es ein $n_0 > m$ mit

$$\frac{a_{m+1} + \dots + a_n}{n} > a - \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\frac{a_1 + \dots + a_m}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, also für alle hinreichend großen n sicher größer als $-\frac{\varepsilon}{2}$ ist, folgt die Existenz eines $n_1 > n_0$ mit

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n} > a - \varepsilon, \quad n > n_1$$

Daraus sieht man, daß $b \geq a$ gilt. Andernfalls wäre $b < a$, so daß für unendlich viele b_n gilt

$$b_n \leq b + \varepsilon' \text{ für } \varepsilon' = \frac{a - b}{2};$$

Damit ist $b_n \leq a - \varepsilon'$ für unendlich viele n (Widerspruch!). Völlig analog sieht man die Ungleichung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Aufgrund der trivialen Ungleichung

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

folgt die Behauptung.

30. Zeige:

$$(a) \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

$$(b) \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

$$(c) \lim_n \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{für alle } a > 0.$$

Lösung:

(a) Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann gilt nach dem binomischen Satz

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2, \quad n \geq 2$$

$$\Rightarrow a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

(b) Es genügt zu zeigen, daß $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ gilt. Dazu beweisen wir, daß zu jedem $a > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sqrt[n]{n!} \geq a$, $n \geq n_0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n!} \geq a &\iff n! \geq a^n \\ &\iff \prod_{k=1}^n k \geq \prod_{k=1}^n a \\ &\iff \prod_{k=1}^n \frac{k}{a} \geq 1 \\ &\iff \prod_{\substack{k=1 \\ k \leq 2a}}^n \frac{k}{a} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k > 2a}}^n \frac{k}{a} \geq 1 \end{aligned}$$

Für $n > 2a$ bleibt das linke Produkt offensichtlich konstant. Das rechte Produkt jedoch läßt sich nach unten durch 2^{n-n_1} abschätzen, wobei n_1 die kleinste natürliche Zahl größer als $2a$ bezeichnet. Wegen $2^{n-n_1} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ folgt die

Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Somit haben wir $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ gezeigt.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

(c) Nach Teil a) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \quad (*)$$

Sei nun $a > 0$. Dann gilt für $n \geq n_0 > \max\left\{a, \frac{1}{a}\right\}$

$$\frac{1}{n} \leq a \leq n, \quad n \geq n_0 \iff \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}, \quad n \geq n_0$$

Wegen des Sandwich-Theorems und (*) folgt also die Behauptung.

31. Zeige:

(a) Für alle $y \geq 0$ gilt: $(1+y)^{1/n} \leq 1 + \frac{1}{n}y$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_n (1+x^n)^{1/n} = 1$, $x \in [0, 1]$.

(c) Bestimme $\lim_n (a^n + b^n)^{1/n}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.

Lösung:

(a) Die Behauptung folgt sofort aus der Bernoullischen Ungleichung (vgl. Aufgabe 21(a)):

$$\left(1 + \frac{1}{n}y\right)^n \geq 1 + y \quad \forall y \geq -1, n \in \mathbb{N}.$$

(b) Aus Teil(a) folgt

$$1 \leq (1+x^n)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für $0 \leq x \leq 1$ konvergiert x^n/n gegen 0 ($n \rightarrow \infty$). Nach dem Einschließungsprinzip für Folgen gilt die Behauptung.

(c) Wir nehmen ohne Einschränkung an $0 \leq a \leq b$ und haben dann

$$b \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2b^n)^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{2} \cdot b \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a, b\}.$$

32. Sei die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv definiert durch

$$x_1 \in (0, 1), \quad x_{n+1} := 2x_n(1 - x_n).$$

- (a) Zeige: $x_n \in (0, 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Was sind die möglichen Grenzwerte der Folge?
- (c) Zeige: $\lim_n x_n = \frac{1}{2}$.

Lösung:

- (a) Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion nach n .

$n = 1$: $x_1 \in (0, 1)$ nach Definition.

$n \rightarrow n + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung ist $x_n \in (0, 1)$ und damit auch $(1 - x_n) \in (0, 1)$. Es folgt sofort $x_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) > 0$. Bleibt noch zu zeigen, daß $x_{n+1} < 1$ gilt. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $x_n \leq 1/2$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \leq 2 \cdot 1/2 \cdot (1 - x_n) < 1$$

2. Fall: $x_n > 1/2 \Rightarrow 1 - x_n < 1/2$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) < 2 \cdot x_n \cdot 1/2 < 1$$

Also ist $x_{n+1} \in (0, 1)$.

- (b) Nach dem ersten Aufgabenteil liegen alle Glieder der Folge im abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[0, 1]$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß besitzt die Folge demnach mindestens einen Häufungspunkt im Intervall $[0, 1]$.

Nehmen wir an, die Folge sei konvergent mit Grenzwert $x = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ in $[0, 1]$.

Nach Definition der Folge gilt für diesen Grenzwert

$$x = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_{n+1} = \lim_{n \in \mathbb{N}} \{2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)\} = 2 \cdot x \cdot (1 - x) = 2x - 2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Die möglichen Grenzwerte sind also $x = 0$ und $x = 1/2$.

(c) Für die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder erhält man:

$$x_{n+1} - x_n = 2 \cdot x_n \cdot (1 - x_n) - x_n = x_n - 2x_n^2 = x_n \cdot (1 - 2x_n).$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1/2 - x_{n+1} = 1/2 - 2x_n + 2x_n^2 = 2\left(1/4 - x_n + x_n^2\right) = 2(x_n - 1/2)^2 \geq 0,$$

das bedeutet, daß außer x_1 alle Glieder der Folge in $(0, 1/2]$ liegen müssen. Wir betrachten nun die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = x_{n+1}$. Dann ist $a_n \in (0, 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$, und es gilt:

$$a_{n+1} - a_n = a_n(1 - 2a_n) \geq a_n(1 - 2 \cdot 1/2) = 0.$$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ ist also monoton wachsend und durch $1/2$ nach oben beschränkt. Dann ist $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}'}$ aber auch konvergent mit $0 < \lim a_n = a \stackrel{(b)}{=} 1/2$. Da sich die Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in nur endlich vielen Gliedern von $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unterscheidet, gilt auch

$$\lim x_n = 1/2.$$

Übungen (9)

zur Vorlesung „Analysis I“

mit Lösungen

33. Zeige:

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} = -\frac{3}{7}$
- (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$
- (c) $(1-a) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ka^k = \frac{a}{1-a}$ für $|a| < 1$.

Lösung:

- (a) Nach der Formel für die geometrische Reihe erhalten wir mit $q = -3/4$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} = \frac{-3/4}{1 + 3/4} = \frac{-3}{7}.$$

- (b) Es ist

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)} = x_k - x_{k+1}, \quad x_k = \frac{1}{2(2k-1)}.$$

Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist offensichtlich konvergent mit Grenzwert Null, und deshalb gilt für die Folge der Partialsummen:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k+1}) = x_1 - x_{n+1} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

- (c) Wir betrachten zunächst die n -te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe

$$\begin{aligned} s_n &= (1-a) \sum_{k=1}^n ka^k = \sum_{k=1}^n ka^k - \sum_{k=1}^n ka^{k+1} \\ &= a + \sum_{k=2}^n ka^k - \sum_{k=2}^n (k-1)a^k - na^{n+1} \\ &= a + \sum_{k=2}^n [k - (k-1)]a^k - na^{n+1} = \sum_{k=1}^n a^k - na^{n+1} \\ &= \frac{a - a^{n+1}}{1-a} - na^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Behauptung erhält man aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a^n = 0.$$

34. (a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

- (b) Zeigen Sie die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$.

Wie viele Reihenglieder muß man aufsummieren, um den Reihenwert mit einem Fehler vom Betrag kleiner als 10^{-3} anzunähern?

Lösung:

- (a) i. Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit den positiven Gliedern $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, k \in \mathbb{N}$, bildet eine Nullfolge, und aus diesem Grund ist nach dem *Leibniz*-Kriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

konvergent.

- ii. Für die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit den Gliedern $x_k = \frac{k^2}{k!}$ gilt

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1 + 2/k + 1/k^2}{k+1} \rightarrow 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium ergibt sich also die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}.$$

- iii. Mit der Abschätzung $\frac{k!}{k^k} < \frac{2}{k^2}, k \geq 4$ erhält man mit Hilfe des Majorantenkriteriums

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \leq c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < \infty.$$

Die benötigte Abschätzung beweist man mittels vollständiger Induktion.

$k = 4$:

$$\frac{4!}{4^4} = \frac{2^3 \cdot 3}{2^8} = \frac{3}{2^5} < \frac{4}{2^5} = \frac{2}{2^4} = \frac{2}{4^2}$$

$k \rightarrow k+1$:

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} &= \frac{k!}{(k+1)^k} = \frac{k!}{k^k} \frac{1}{(1+1/k)^k} \stackrel{I.V.}{<} \frac{2}{k^2} \frac{1}{(1+1/k)^k} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{2}{k^2(1+1/k)^2} = \frac{2}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung (*) geht die Ungleichung

$$(1 + 1/k)^k \geq \underbrace{(1 + 1/k)^{k-2}}_{\geq 1} \cdot (1 + 1/k)^2, k \geq 2$$

ein.

- (b) Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit den positiven Gliedern $x_k = \frac{3^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$, ist monoton fallend für $k \geq 3$, denn

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{3}{k+1} < 1, \text{ falls } k \geq 3.$$

Die Konvergenz der alternierenden Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!}$$

ergibt sich dann nach dem *Leibniz*-Kriterium.

Der Fehler $r_n = s - s_n$ dieser Reihe vom *Leibnizschen* Typ besitzt das Vorzeichen des ersten Gliedes und ist kleiner als der absolute Betrag dieses Gliedes. Nun ist n so zu bestimmen, daß

$$|r_n| < \left| \frac{(-3)^{(n+1)}}{(n+1)!} \right| < 10^{-3}.$$

Wegen

$$3^{13}/13! = 2.560330295 \cdot 10^{-4} < 10^{-3} < 1.109476461 \cdot 10^{-3} = 3^{12}/12!$$

erhalten wir $n = 12$.

35. (a) Bestimme eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, so daß für alle $x \in (-3, 3)$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{2}{x-3}.$$

- (b) Zeige für $x \in (-1, 1)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

- (c) Forme für geeignete $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (5^k + 2^{-k+1}) x^k$$

so um, daß sich schließlich ein Ausdruck in x ergibt, der ohne das Reihensymbol auskommt.

Lösung:

- (a) Die Potenzreihe der Funktion $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ $|x| < 1$ wird bekanntlich geometrische Reihe genannt. Es gilt

$$\frac{2}{x-3} = \left(-\frac{2}{3}\right) \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{3^{k+1}} x^k$$

und die Reihe konvergiert für $|x| < 3$.

- (b) Eigentlich ist diese Teilaufgabe bereits in Aufgabe 33(a) dieses Blattes gelöst worden. Es werden an dieser Stelle noch weitere Lösungsmöglichkeiten angegeben. Für zwei absolut konvergente Reihen ist das Cauchy-Produkt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad c_k = \sum_{n=0}^k a_n b_{k-n}$$

ebenfalls absolut konvergent. Wir wenden diese Aussage auf die geometrische Reihe an

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum x^k\right) \left(\sum x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k x^n x^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

- (c)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (5^k + 2^{-k+1}) x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (5x)^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-5x} - 1 + 2 \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1-5x} - 1 + \frac{2x}{2-x} \end{aligned}$$

und diese Rechnung ist gültig für alle $|x| < \frac{1}{5}$.

36. (a) Sei $q \in \mathbb{N}$. Zeige:

- i. $\exp(x) > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}$ für $x > 0$;
- ii. $\forall n \in \mathbb{N} \exists x > 0 : \exp(x) > nx^q$;

iii. $e^{-1}q! \notin \mathbb{Z}$.

(Hinweis: Betrachte $e^{-1}q! - q! \sum_{k=0}^q \frac{(-1)^k}{k!}$.)

(b) Zeige: $e \notin \mathbb{Q}$.

Lösung: Sei $q \in \mathbb{N}$ fest.

(a) i. Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{q+1}}{(q+1)!}, \quad x > 0.$$

ii. Wähle $x > n(q+1)!$.

$$\frac{\exp(x)}{x^q} \stackrel{(36(a)i)}{>} \frac{x}{(q+1)!} > n \quad \Rightarrow \quad \exp(x) > nx^q$$

iii. Für jedes feste $q \in \mathbb{N}$ gilt

$$e^{-1}q! = \sum_{n=0}^q \frac{(-1)^n q!}{n!} + R$$

wobei die vordere Summe eine ganze Zahl darstellt und R nach dem Satz über alternierende Reihen abgeschätzt werden kann durch:

$$0 < |R| < \frac{q!}{(q+1)!} = \frac{1}{q+1} < 1$$

Somit ist $e^{-1}q! \notin \mathbb{Z}$.

(b) Da oben gezeigt wurde, daß $e^{-1}q! \notin \mathbb{Z}$ für alle $q \in \mathbb{N}$, kann e^{-1} nicht rational sein. Somit kann auch $\frac{1}{e-1} = e$ nicht rational sein.

Übungen (10)
zur Vorlesung „Analysis I“
mit Lösungen

37. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge und sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere:

$$b_n := 2^n a_{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeige:

- i. $\sum_{k=1}^{2^n-1} a_k \leq \sum_{j=0}^{n-1} b_j, \quad n \in \mathbb{N}.$
- ii. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert.

(b) Anwendung: Zeige, daß $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ konvergiert.

Lösung:

(a) i. Für $k = 2^n, \dots, 2^{n+1}$ ist $a_k \leq a_{2^n}$, da die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k &\leq 2^j a_{2^j} = b_j \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k \leq \sum_{j=0}^{n-1} b_j \end{aligned}$$

ii. Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ sei konvergent und der Grenzwert sei mit b bezeichnet. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2^m - 1$ und nach Teil (37(a)i) gilt

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{2^m-1} a_k \leq \sum_{j=0}^{m-1} b_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j = b,$$

weil $\forall j \in \mathbb{N} : b_j = 2^j a_{2^j} \geq 0$ ist. Damit ist die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ offensichtlich durch b nach oben beschränkt. Da alle $a_k \geq 0$ sind,

ist die Partialsummenfolge auch monoton wachsend und somit konvergent.

Also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Wir benutzen den ersten Teil der Aufgabe mit $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^3}}$, $b_n = 2^n \cdot a_{2^n} = 2^{-\frac{n}{2}}$.

Es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^j = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}} \text{ konvergiert.}$$

38. Für $x \in [0, 1)$ sei $\tilde{g}(x) := \begin{cases} x & , \quad x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & , \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$g(x) := \tilde{g}(x - [x]), \quad x \in \mathbb{R},$$

definiert.

(a) Zeige

- i. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$.
- ii. g ist stetig.

Hinweis zu ii.) : Wegen $g(x+1) = g(x)$ genügt es zu zeigen, daß g stetig in $[0, 1)$ und $g(0) = g(1)$ ist.

(b) Nun sei für $n \in \mathbb{N}$ $g_n(x) := 2^{-n+1} g(2^{n-1}x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Skizziere g_1, g_2, g_3 .

(c) Zeige: Durch

$$x \mapsto h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

wird eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion erklärt.

Lösung:

(a) i. Für $x \in [0, 1)$ gilt $[x] = 0$

$$\Rightarrow \left| g(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \max \left\{ \left| x - \frac{1}{2} \right|, \left| 1 - x - \frac{1}{2} \right| \right\} = \left| x - \frac{1}{2} \right| \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{2}$$

Für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist $[x] = -1$ oder $[x] = 0$

$$\Rightarrow |g(x)| \leq \max \{ |x|, |1 - (x + 1)| \} = |x| \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

Für $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ist $[x] = 0$ oder $[x] = 1$

$$\Rightarrow |g(x)| \leq \max \{ |1 - x|, |x - 1| \} = |x - 1| \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

ii. Wegen $g(x + 1) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ist g 1-periodisch. Es muß also nur die Stetigkeit von g auf $[0, 1)$ und $g(0) = g(1)$ gezeigt werden. g ist offensichtlich stetig in $(0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1)$. Wie oben gezeigt, gilt zusätzlich

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \frac{1}{2} = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

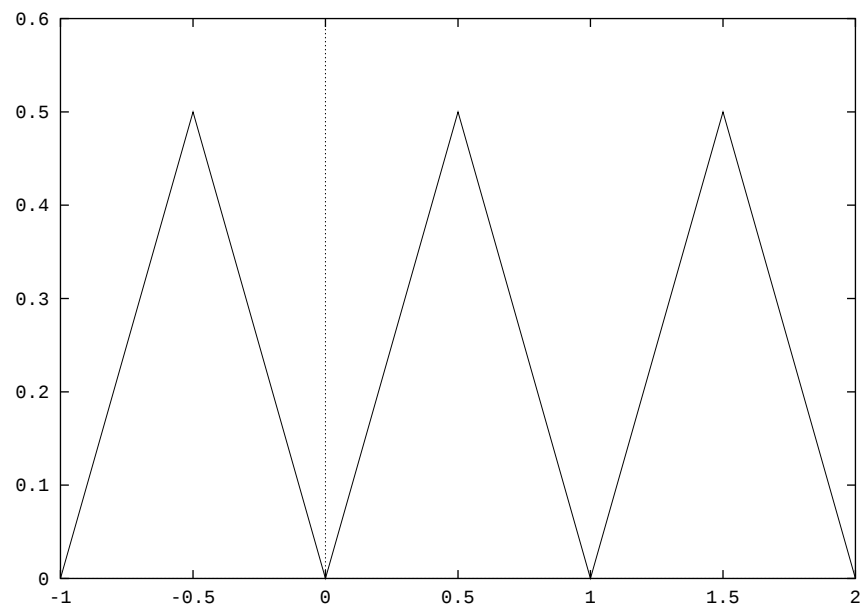
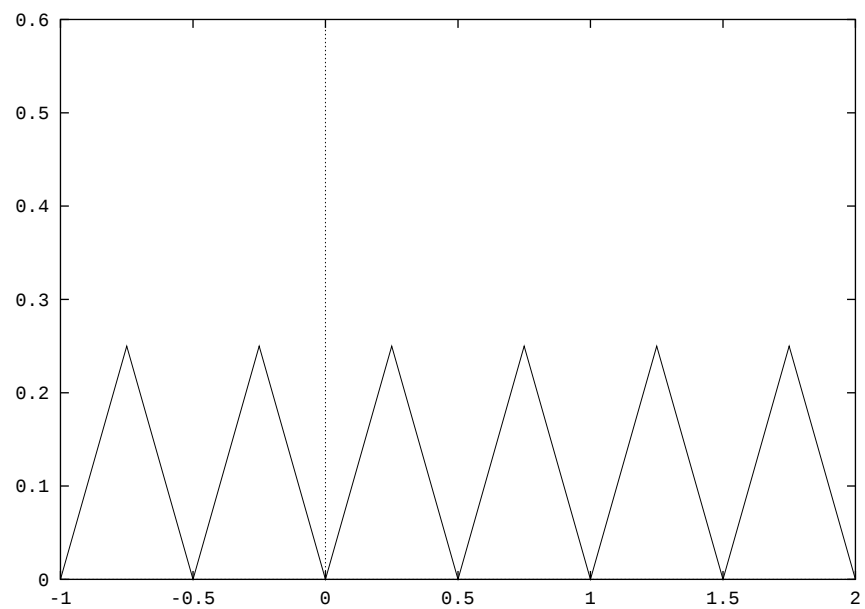
$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

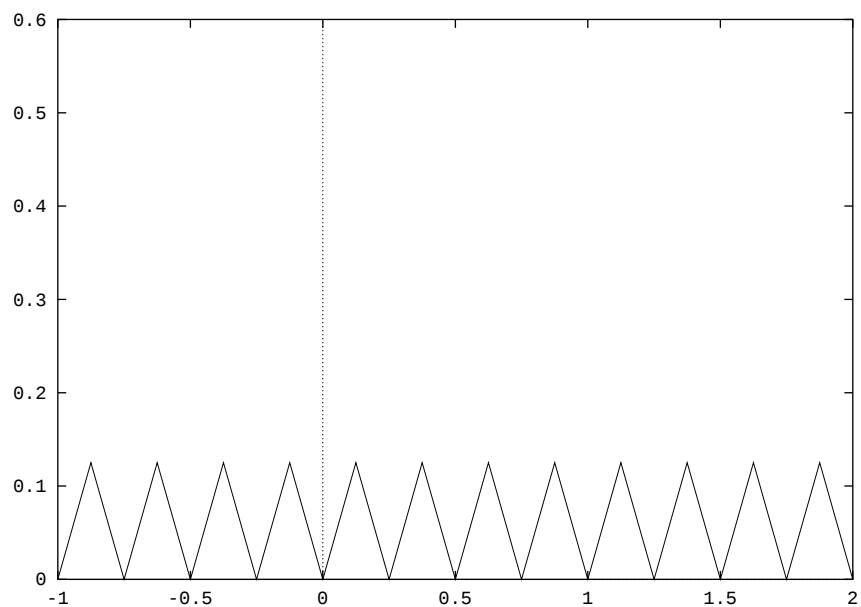
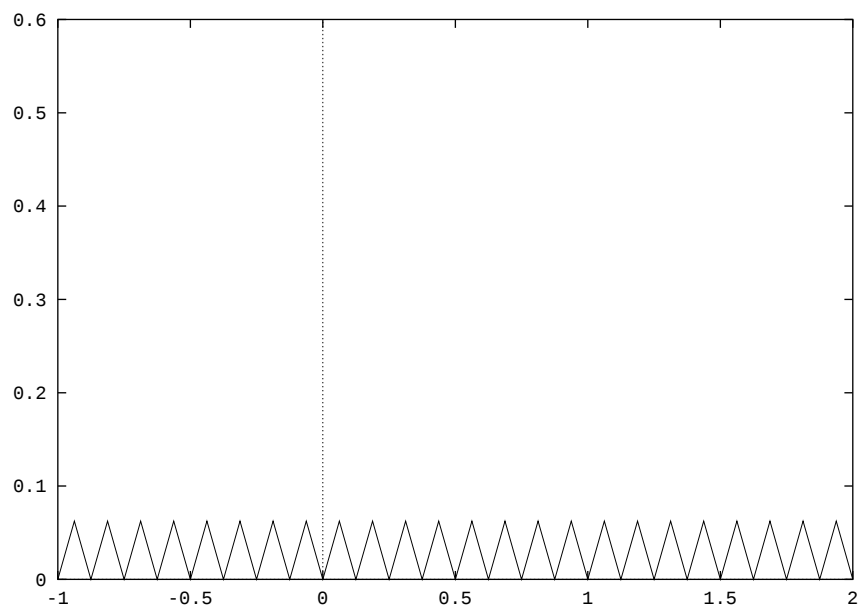
und

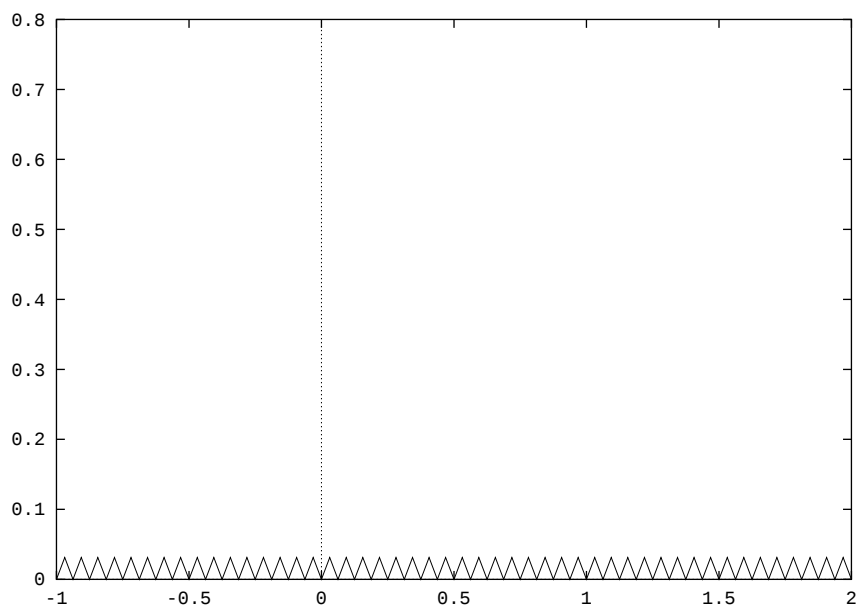
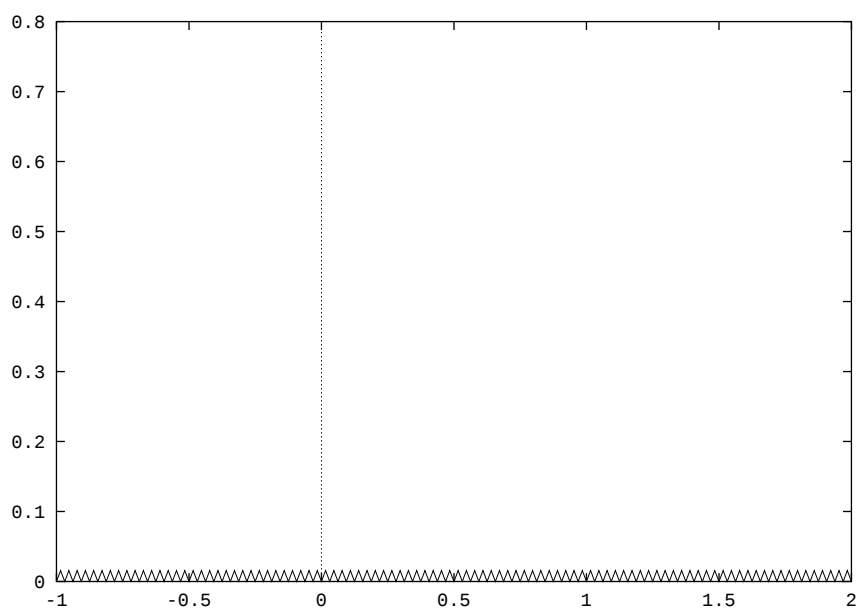
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0 = g(1) = g(0)$$

Also ist g auf $[0, 1)$ stetig und $g(0) = g(1) \Rightarrow g$ überall stetig.

(b) Graphische Darstellung

Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 1$.Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 2$.

Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 3$.Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 4$.

Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 5$.Graphische Darstellung der Funktion g_n für $n = 6$.

- (c) Es soll nun gezeigt werden, daß h an einer beliebig gewählten Stelle $x \in \mathbb{R}$, die im folgenden festgehalten wird, stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist zu zeigen, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß für $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

Der Beweis wird über einen 3ε -Schluß geführt.

Setze

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^n g_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann sind die so definierten Funktionen h_n auf Grund der Rechenregeln für stetige Funktionen stetig, und es gilt:

$$\begin{aligned} |h(x) - h_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k+1} g(2^{k-1}x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k+1} \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|}_{=\frac{1}{2}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung ist es möglich, ein $N \in \mathbb{N}$ unabhängig von der betrachteten Stelle x zu wählen, so daß:

$$\forall n \geq N : |h(x) - h_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die Eigenschaft, daß diese Abschätzung für genügend großes n „gleichmäßig“ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist hier besonders hervorzuheben. Man sagt in diesem Fall, daß die Folge der Funktionen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen h konvergiere oder daß h der „gleichmäßige Limes“ der Funktionenfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei.

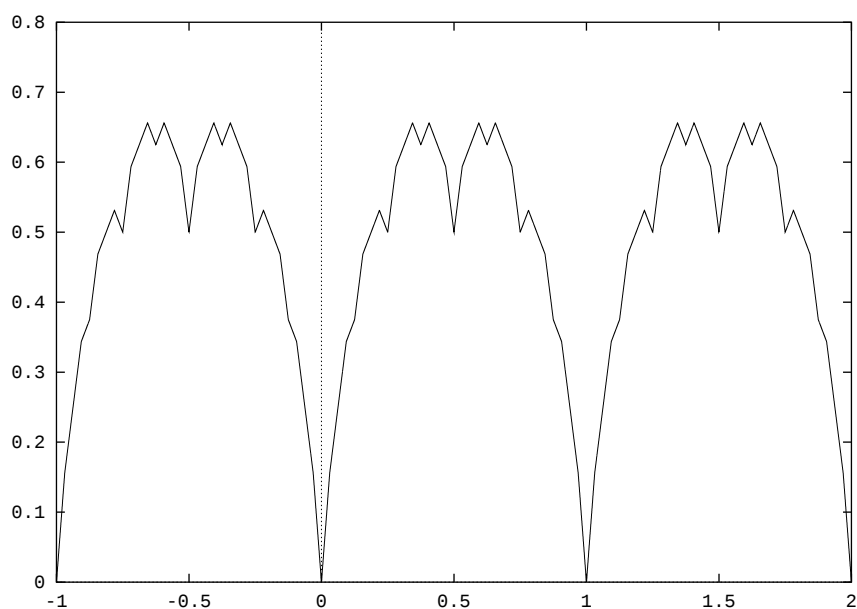
Wir legen nun ein $n_0 \geq N$ fest (z.B. $n_0 = N$). Auf Grund der Stetigkeit von h_{n_0} existiert dann ein $\delta > 0$, so daß gilt:

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |h_{n_0}(x) - h_{n_0}(y)| < \varepsilon.$$

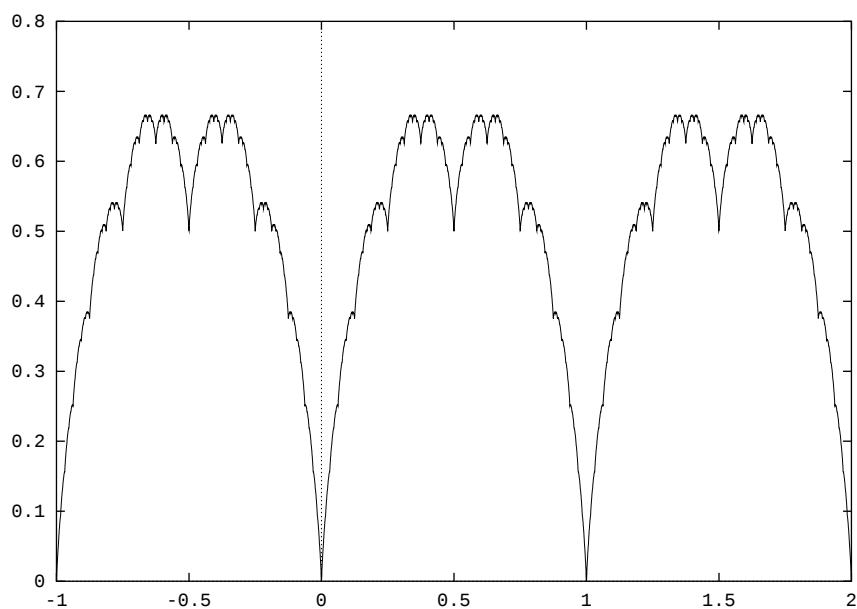
Damit erhalten wir nun für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |h(x) - h_{n_0}(x) + h_{n_0}(x) - h_{n_0}(y) + h_{n_0}(y) - h(y)| \\ &= |h(x) - h_{n_0}(x)| + |h_{n_0}(x) - h_{n_0}(y)| + |h_{n_0}(y) - h(y)| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ganz allgemein kann man auf diese Weise zeigen, daß der gleichmäßige Limes einer Folge stetiger Funktionen auch wieder stetig ist.



Graphische Darstellung der Funktion h_n für $n = 5$.



Graphische Darstellung der Funktion h_n für $n = 10$.

39. Beweise die Stetigkeit der folgenden Funktionen in $x = a$, jeweils nach der $\varepsilon - \delta$ - Definition:

(a) $f : (0, 1) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R} ; \quad a \in (0, 1) .$

(b) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R} ; \quad a \in \mathbb{R} .$

(c) $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} , \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \\ \frac{1-x}{1-x^2} & , \quad x \in [0, 1) \end{cases} ; \quad a = 1 .$

Lösung:

(a) Es sei $a \in (0, 1)$, dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \cdot |x - a| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

Wir wählen also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$ und haben nach obiger Abschätzung die Stetigkeit von f in $(0, 1)$ nachgewiesen.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2} \right| \\ &= \left| \frac{(1+a^2) - (1+x^2)}{(1+a^2)(1+x^2)} \right| \\ &\leq |x+a| \cdot |x-a| \leq (|x-a| + a+a) \cdot |x-a| \\ &\leq (2|a| + |x-a|) \cdot |x-a|. \end{aligned}$$

Wähle $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2|a|+1}, 1)$. Dann gilt

$$|f(x) - f(a)| \leq |x+a| \cdot |x-a| \leq (|x|+|a|) \cdot \delta \leq (2|a|+1) \cdot \delta < \varepsilon.$$

(c) Wir haben die Stetigkeit in $a = 1$ nachzuweisen.

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1-x}{1-x^2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right| = \frac{1}{2|1+x|} \cdot |x-1| \leq \frac{1}{2} \cdot |x-1|,$$

und wir wählen $\delta = 2\varepsilon$.

40. (a) Zeige: $1 + y \leq \exp(y) \leq \frac{1}{1-y}$, $y \in (-1, 1)$.
 (b) Zeige: Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ist stetig.

Lösung:

- (a) Mit der Reihendarstellung für die Exponentialfunktion gilt:

$$\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = 1 + y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Um die linke Ungleichung zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle:

$y \geq 0$: In diesem Fall ist der Reihenrest offensichtlich größer als oder gleich Null.

$y < 0$: In diesem Fall können wir den Reihenrest R_2 als alternierende Reihe schreiben

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{|y|^n}{n!}.$$

Bezeichnen wir die Absolutbeträge der Glieder der Reihe mit $a_n(y)$, so erhalten wir mit $|y| < 1$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|y|}{n+1} < 1.$$

Die Reihenglieder bilden also eine monoton fallende Folge. Nach dem Kriterium von Leibniz besitzt dann der Reihenrest dasselbe Vorzeichen wie sein erster Summand, ist in unserem Fall also positiv.

In beiden Fällen gilt also die Abschätzung

$$\exp(y) = 1 + y + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \geq 1 + y.$$

Bem. 1: Diese Abschätzung ist sogar für alle $y \geq 0$ gültig. Für den Beweis der rechten Ungleichung verwenden wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die linke Ungleichung. Für $x \in (-1, 1)$ gilt:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{1+x}$$

Ersetzen wir hier $-x$ durch y , so erhalten wir die gewünschte Abschätzung nach oben:

$$\exp(y) \leq \frac{1}{1-y}.$$

Bem. 2: Nach Bem. 1 gilt diese Abschätzung für alle $y \leq 0$.

(b) Für $x > 0$ ist die Funktion stetig, da sowohl $1/x$ als auch $\exp(-1/x^2)$ stetig sind.

Wir haben also noch die Stelle $x = 0$ genauer zu untersuchen. Es ist $f(0) = 0$ und für $x \in (0, 1)$ gilt nach Teil (a) Bem. 2

$$0 < f(x) = \frac{1}{x} \exp \left\{ \frac{-1}{x^2} \right\} \leq \frac{1}{x} \frac{1}{1 - \left\{ \frac{-1}{x^2} \right\}} = \frac{1}{x} \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2} \xrightarrow{(x \rightarrow 0)} 0.$$

Also $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Damit haben wir Stetigkeit auch an der Stelle $x_0 = 0$ nachgewiesen.

Übungen (11)
zur Vorlesung „Analysis I“
mit Lösungen

41. Weise die Stetigkeit der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jeweils in a nach:

$$(a) \quad f(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases} \quad , \quad a := 0$$

$$(b) \quad f(x) := d^x; \quad a \in \mathbb{R} \quad (d > 0 \text{ vorausgesetzt})$$

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 0 = 0,$$

$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß f stetig bei 0 ist.

(b) Wir müssen zeigen, daß f an der Stelle $a = 0$ stetig ist mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1.$$

Dann gilt nämlich für beliebige $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (d^a \cdot d^h) \\ &= d^a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (d^h) = d^a \cdot 1 = d^a = f(a). \end{aligned}$$

Untersuchen wir also noch die Funktion an der Stelle $a = 0$.

Nach Aufgabe 30(c) gilt für alle $d > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{1/n} = 1.$$

Damit folgt auch sofort

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{-1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^{1/n}} = 1.$$

Sei nun o.B.d.A. $d > 1$ (bei $0 < d < 1$ betrachte $e = \frac{1}{d} > 1$ anstelle von d).

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert nach Definition des Limes ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$1 - \varepsilon < d^{-1/n_0} < d^{1/n_0} < 1 + \varepsilon.$$

Für $-1/n_0 < x < 1/n_0$ gilt dann

$$1 - \varepsilon < d^x < 1 + \varepsilon$$

und wir erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} d^x = 1.$$

42. Zeige:

(a) $f : (0, 1) \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

(b) $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

(c) Beantworten Sie die Frage (mit Begründung):

Nimmt g aus (b) sein Infimum und Supremum an?

Hinweis: Zum Beweis von (a) - (c) sollen keine Differenzierbarkeitseigenschaften von f bzw. g benutzt werden.

Lösung:

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt genau dann gleichmäßig stetig in A , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta = \varepsilon/2$. Dann gilt für $x, y \in (0, 1)$ mit $|x - y| < \delta$:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \underbrace{|x + y|}_{\leq 2} \leq 2|x - y| < 2\delta = 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Es gilt $\forall y \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2},$$

da

$$(1-y)^2 = 1 - 2y + y^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad (1+y)^2 = 1 + 2y + y^2 \geq 0.$$

Also ist

$$\left| \frac{y}{1+y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Wähle $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| \\ &\leq |y - x| \left(\left| \frac{y}{1+y^2} \right| + \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \right) \leq |y - x| < \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

- (c) Offenbar ist $0 < g(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und $g(0) = 1$. g nimmt also sein Supremum an. Für das Infimum gilt $\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$. Nach Lemma 4.7 (für das Infimum anstelle des Supremums) ist nämlich zu zeigen, daß

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{R} : \varepsilon \geq g(x);$$

letzteres ist offenbar richtig für x mit $x^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Das Infimum wird demzufolge nicht angenommen.

43. (a) Beweise die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &< x, \quad x > 0 \\ \ln(1+x) &> x - \frac{1}{2}x^2, \quad x \geq 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Die letzte Abschätzung gilt auch für $x \in (0, 1)$, was Sie (freiwillig) versuchen können zu beweisen.

- (b) Leite aus (a) folgende Abschätzung her:

$$\ln(1-x) > \frac{x}{x-1}; \quad 0 < x < 1.$$

Hinweis: In (a) und (b) soll nicht die Reihendarstellung der Logarithmusfunktion benutzt werden.

Lösung:

(a) Für $x > 0$ gilt

$$\ln(1+x) < x \Leftrightarrow 1+x < \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Ungleichung: Für die Funktion $g(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ gilt $g(x) \leq \frac{1}{2}, x \geq 0$, und $g(x) \geq 0, x \in [0, 1]$.

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich; die erste Abschätzung folgt aus

$$0 \leq \frac{1}{2}(1-x)^2 = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2.$$

Benutzt man Ungleichung (b) in Satz 9.6, nämlich $e^y \leq \frac{1}{1-y}, y \in (-1, 1)$, dann erhält man für $x \geq 1$

$$\exp(g(x)) \leq e^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1-1/2} = 2 \leq 1+x.$$

Außerdem gilt die strikte Ungleichung $e^{\frac{1}{2}} < 2$, was die zweite Ungleichung beweist.

(b) Setzt man in (a) $y = 1+x, 1-x' = \frac{1}{y}$, dann ist $y = \frac{1}{1-x'}$ und für $x' \in (0, 1)$ ist $y > 1$. Anwendung der ersten Abschätzung in (a) liefert

$$\frac{x'}{1-x'} = \frac{1}{1-x'} - 1 = y - 1 = x > \ln y = -\ln \frac{1}{y} = -\ln(1-x'),$$

was (mit x' anstelle von x) die Abschätzung in (b) beweist.

44. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f heißt *streng konvex* genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned} & \forall t \in (0, 1) \quad \forall x, y \in [a, b], \quad x \neq y \\ & \Rightarrow f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y). \end{aligned}$$

Beweise:

(a) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng konvex und stetig, so gibt es genau ein $z \in [a, b]$ mit

$$f(z) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch für das Maximum?

(c) $f : [-1, 1] \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ ist streng konvex.

Lösung:

- (a) Die Existenz eines solchen $z \in [a, b]$ ist klar, da eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall Minimum und Maximum annimmt. Nehmen wir nun an, es gäbe ein $z' \neq z$ aus $[a, b]$, in dem ebenfalls das Minimum angenommen wird, also

$$f(z') = f(z) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

Da f streng konvex ist, gilt mit $t = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z'\right) < \frac{1}{2}f(z) + \frac{1}{2}f(z') = f(z)$$

Man sieht sofort, daß $w := \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z'$ in $[a, b]$ liegt. Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn $f(w) < f(z)$ kann nicht gelten, da f in z ihr Minimum annimmt. Also ist z eindeutig bestimmt.

- (b) Die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist streng konvex (siehe nächster Aufgabenteil). Es gilt jedoch

$$f(-1) = f(1) = \max_{x \in [-1, 1]} f(x) = 1$$

d.h. obige Aussage gilt nicht für das Maximum.

- (c) Es seien $x, y \in [-1, 1]$, $x \neq y$, $t \in (0, 1)$. Dann ist nach der Definition streng konvexer Funktionen für obiges f die Beziehung

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) > 0$$

zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned} & tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - t^2x^2 - 2t(1-t)xy - (1-t)^2y^2 \\ &= y^2 - y^2 + t(x^2 - y^2 - 2xy + 2y^2) - t^2(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \underbrace{(t - t^2)}_{>0} \underbrace{(x - y)^2}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

Übungen (12)
zur Vorlesung „Analysis I“
mit Lösungen

45. Sei $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert (in $\mathbb{R}$!).

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \geq M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Lösung:

(a) $\Rightarrow$ (b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \\ \iff \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow \infty \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 : |f(x_n) - c| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ann.: (b) gilt nicht, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \in \mathbb{R} \exists x, y \geq M : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

Betrachte nun dieses feste ε und wähle zu $M = n \in \mathbb{N}$ sukzessive $x_n, y_n \geq n$ mit $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Dann gilt $x_n \rightarrow \infty$ und $y_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Wegen (a) folgt

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_1 : |f(x_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_2 : |f(y_n) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Wähle $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dann folgt

$$\varepsilon \leq |f(x_N) - f(y_N)| \leq |f(x_N) - c| + |f(y_N) - c| < \varepsilon$$

also ein Widerspruch.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, x_n \rightarrow \infty$ eine beliebig gewählte Folge.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x_n, x_m \geq M : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \\ \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$$

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei dazu $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, y_n \rightarrow \infty$ eine weitere Folge. Dann gilt

$$\exists c' \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = c'$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N :$$

$$|c - c'| \leq |c - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - c'| < 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow c = c'$$

46. Zeige:

(a) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ ist in $a = 0$ nicht differenzierbar.

(b) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \in \mathbb{R}$ hat für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

(c) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} x^2 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases} \in \mathbb{R}$ ist in $a = 0$ differenzierbar.

Lösung:

$$(a) \quad \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h|}}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|h|}} = \infty$$

(b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x^2(x^2 + 1)^{-1/2}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

47. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a Häufungspunkt von D , $c \in \mathbb{R}$. Beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist differenzierbar in a , und es gilt $f'(a) = c$.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, a + h \in D :$
 $|h| < \delta \implies \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c \right| < \varepsilon .$

Lösung:

Ersetze in Satz 10.4 x durch $a + h$.

48. (a) Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gelte $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Zeige: f ist streng monoton fallend.

(b) Sei $g : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gebe $M \geq 0$ mit

$$|g'(a)| \leq M \quad \forall a \in (-1, 1) .$$

Zeige: Es gibt $\varepsilon > 0$, so daß die Abbildung $f : (-1, 1) \ni x \mapsto x + \varepsilon g(x) \in \mathbb{R}$ injektiv ist.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in (a, b), x < y$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi, x < \xi < y$, mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0} \underbrace{(y - x)}_{>0} < 0.$$

Die Funktion f ist also streng monoton fallend.

Bem.: Analog beweist man, daß f streng monoton wachsend ist, wenn unter denselben Voraussetzungen wie oben $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$ gilt.

(b) Die Abbildung $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x), x \in (-1, 1).$$

Ist $M = 0$, so folgt aus

$$|g'(a)| \leq 0 \quad \forall a \in (-1, 1)$$

zunächst $g'(x) = 0, x \in (-1, 1)$ und damit für die Ableitung von f für beliebige $\varepsilon > 0$

$$f'(x) = 1 > 0.$$

Im Fall $M > 0$ wählen wir $\varepsilon = \frac{1}{2M} > 0$ und erhalten

$$f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) > 1 - \varepsilon M = \frac{1}{2} > 0.$$

In beiden Fällen ist also $f'(x) > 0 \forall x \in (-1, 1)$ und somit f nach der Bemerkung aus Aufgabenteil (a) streng monoton wachsend. Da aber jede streng monoton wachsende Funktion injektiv ist, ist die Behauptung bewiesen.

Übungen (13)

zur Vorlesung „Analysis I“

49. Zeige:

$$(a) \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k^{-1} + 1) \leq \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(c) \quad \text{Die Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}, \text{ ist konvergent.}$$

Lösung:

(a) Nach Aufgabe (43a) gilt für $x > 0$:

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x.$$

Damit gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen $\frac{1}{k} > 0$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}.$$

Die linke Seite der Ungleichung können wir noch nach unten abschätzen durch

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} = \frac{2k-1}{2k^2} \geq \frac{2k-1}{2k^2+k-1} = \frac{2k-1}{(k+1)(2k-1)} = \frac{1}{k+1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Nach Aufgabenteil (49a) folgt sofort für $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Für den mittleren Term erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{1}\right) = \ln(n+1). \end{aligned}$$

(c) Mit den Abschätzungen aus Aufgabenteil (49b) erhalten wir

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1$$

und

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} > 0.$$

Die Folgen der a_n ist also beschränkt.

Weiter erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \frac{1}{n+1} \stackrel{49a}{\leq} \ln(n^{-1} + 1) = \ln(n+1) - \ln(n) \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = a_n. \end{aligned}$$

Die Folge der a_n ist also monoton fallend.

Insgesamt ergibt sich also, daß die Folge der a_n konvergent ist.

50. (a) Berechne die Ableitungen von $\sinh$, $\cosh$.
 (b) Bestimme die Ableitung und den Wertebereich von $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 (c) Zeige, daß $\tanh$ eine Umkehrfunktion besitzt und bestimme diese.

Lösung:

(a)

$$(\sinh)'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh)'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

(b) Es gilt

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

und damit

$$(\tanh)'(x) = \frac{4}{(e^{2x} + 1)^2} > 0.$$

Die Funktion $\tanh$ ist also streng monoton wachsend und daher injektiv. Offensichtlich gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$.

Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ bijektiv. Es existiert also die Umkehrfunktion $\tanh^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) Zur Bestimmung der Umkehrfunktion hat man Die Gleichung

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y$$

nach x aufzulösen. Es gilt

$$\frac{1+y}{1-y} = e^{2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$$

und damit $\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$.

51. (a) Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $\sin^2(y) = \cos(y)$. Zeige:

$$\cos(y) = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) .$$

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$g(x) := \sin(x) \exp(\cos(x)) , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Beweise: g hat ein lokales Extremum in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Welche Art des Extremums liegt vor?

(c) Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} x^2 + x & , \quad x \leq 0 \\ e^x & , \quad x > 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt differenzierbar?

Lösung:

(a) $\cos(y) = \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y)$ ist positive Lösung der Gleichung (setze $x = \cos(y)$)

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Man erhält durch quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned} x^2 + x - 1 &= x^2 + 2x \cdot 1/2 + 1/4 - 5/4 \\ &= \left(x + 1/2 - \sqrt{5}/2\right) \left(x + 1/2 + \sqrt{5}/2\right). \end{aligned}$$

Positive Lösung der obigen Gleichung ist also

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \in (0, 1).$$

- (b) g ist beliebig oft stetig differenzierbar. Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums im Innern von $[0, \pi/2]$ ist also

$$g'(x) = [\cos(x) - \sin^2(x)] \cdot \exp(\cos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \sin^2(x)$$

$$\stackrel{(51a)}{\Leftrightarrow} \cos(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Da $\cos$ in $(0, \pi/2)$ injektiv mit Bildbereich $(0, 1)$ ist, existiert dort ein eindeutig bestimmtes x_0 mit

$$\cos(x_0) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Im Innern von $[0, \pi/2]$ kann also höchstens an dieser Stelle x_0 ein lokales Extremum vorliegen.

Für die zweite Ableitung von g erhält man

$$\begin{aligned} g''(x) &= [-\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)]\exp(\cos(x)) \\ &\quad - \sin(x)[\cos(x) - \sin^2(x)]\exp(\cos(x)). \end{aligned}$$

An der Stelle $x = x_0$ verschwindet der hintere Anteil der Differenz und es bleibt

$$\begin{aligned} g''(x_0) &= -\sin(x_0)(1 + 2\cos(x_0))\exp(\cos(x_0)) \\ &= -\sin(x_0)\sqrt{5}\exp(\cos(x_0)) < 0. \end{aligned}$$

An der Stelle x_0 liegt also ein lokales Maximum vor. An den beiden Rändern $a = 0$ und $b = \pi/2$ finden wir demzufolge lokale Minima.

- (c) Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x^3) = 1$ und $f(0) = 0$ ist f unstetig, also ist eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit nicht erfüllt. Die so definierte Funktion ist also nicht differenzierbar.

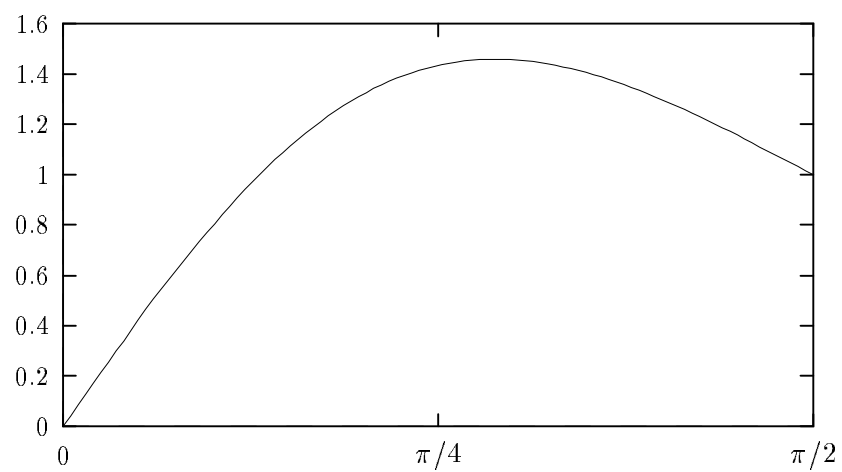


Fig. 1: Verlauf der Funktion g in $[0, \pi/2]$

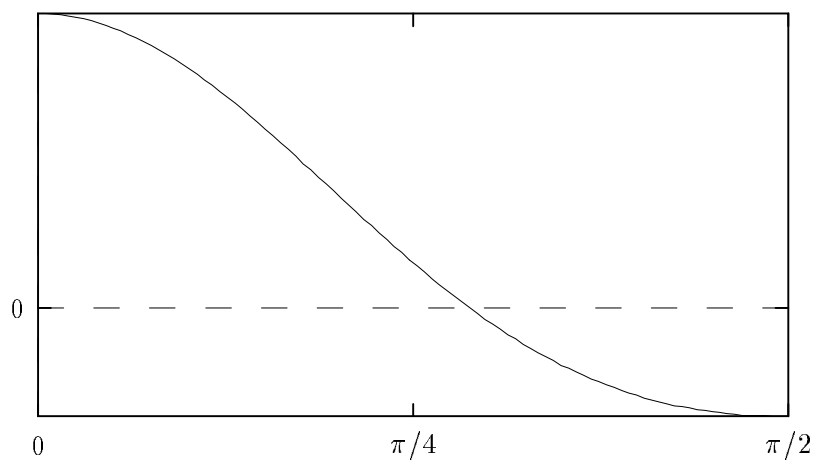


Fig. 2: Verlauf der ersten Ableitung g' in $[0, \pi/2]$

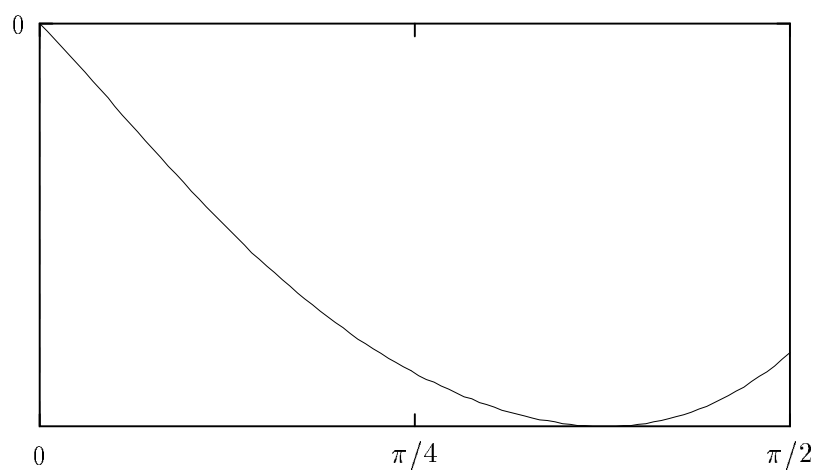


Fig. 3: Verlauf der zweiten Ableitung g'' in $[0, \pi/2]$

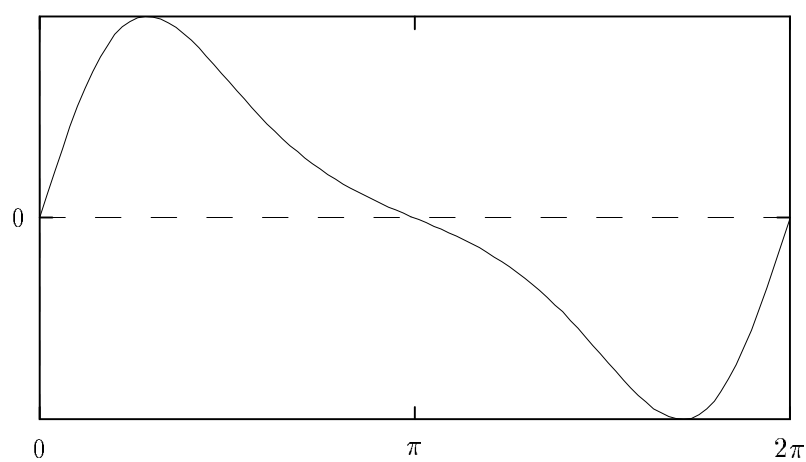


Fig. 4: Verlauf der Funktion g in $[0, 2\pi]$

52. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$.

(a) Sei $K \geq 0$, $\alpha > 1$ und es gelte:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Zeige: f ist konstante Funktion.

(b) Zeige die Äquivalenz von:

- i. f ist n -mal stetig differenzierbar und $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.
- ii. f ist ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades.

Lösung:

(a) Unter obigen Voraussetzungen gilt für $x \in [a, b]$:

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq K \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{\alpha-1} = 0$$

wegen $\alpha > 1$. Also verschwindet f' identisch und damit muß f konstant sein.

(b) Falls f ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades ist, so verschwindet natürlich die n -te Ableitung. Falls nun umgekehrt $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in [a, b]$ ist, so gilt mit der Taylorformel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Also ist f ein Polynom $(n - 1)$ -ten Grades.

53. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 - 6x^3 + 3$.

(a) Bestimme lokale Extrema und Monotonieintervalle.

(b) Wieviele Nullstellen hat f ?

(c) Zeige: f besitzt in $[2, \infty]$ eine differenzierbare Umkehrfunktion g .

(d) Bestimme $g'(84)$.

Lösung:

f ist ein Polynom, in dem nur ungerade Exponenten auftreten. Demzufolge ist f beliebig oft stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

(a) Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums ist $f'(x) = 0$.

Es gilt

$$f'(x) = 5x^4 - 18x^2 = 5x^2(x + \sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}})(x - \sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}}).$$

Lokale Extrema können also nur bei

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}} \text{ und } x_0 = 0$$

vorliegen. Um zu entscheiden ob f an diesen Stellen Extremwerte annimmt und welcher Art diese sind, untersuchen wir die zweite Ableitung von f . Es ist allerdings auf Grund des Verhaltens der Funktion im Unendlichen schon von vornherein klar, daß nur eine gerade Anzahl an Extremstellen in Frage kommt und somit nur keine oder zwei Extremstellen vorliegen können.

Es ist

$$f''(x) = 20x^3 - 36x = 20x(x + \frac{3}{\sqrt{5}})(x - \frac{3}{\sqrt{5}}).$$

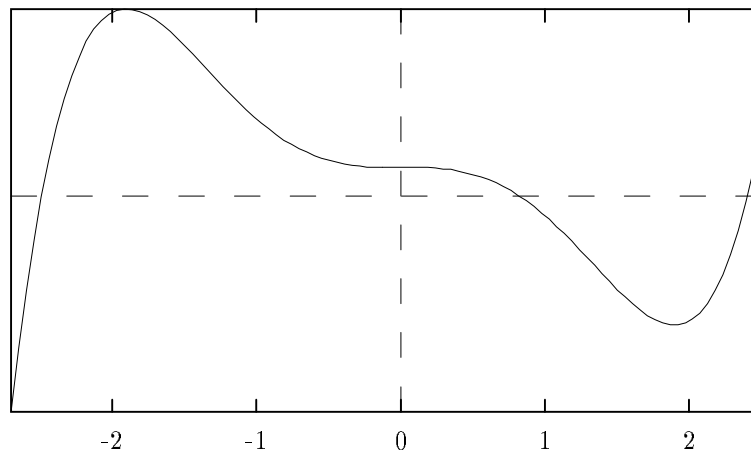
Diese Funktion besitzt Nullstellen bei $-\frac{3}{\sqrt{5}}$, 0 , $\frac{3}{\sqrt{5}}$ und ist links von $-\frac{3}{\sqrt{5}}$ negativ und rechts von $\frac{3}{\sqrt{5}}$ positiv, da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$. Also gilt:

$$f''(x_-) < 0, \quad f''(x_+) > 0.$$

Damit sind die hinreichenden Kriterien für das Vorliegen eines relativen Maximums bzw. Minimums bei x_- bzw. x_+ erfüllt. Bei x_0 kann nach dem oben Gesagten kein relatives Extremum vorliegen. Das Monotonieverhalten von f kann nach diesen Untersuchungen wie folgt beschrieben werden.

f ist in

$$\begin{aligned} \left(-\infty, -\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}}\right) & \quad \text{streng monoton wachsend,} \\ \left(-\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}}\right) & \quad \text{monoton fallend,} \\ \left(\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{5}}, \infty\right) & \quad \text{streng monoton wachsend.} \end{aligned}$$

Fig. 5: Verlauf des Polynoms f

(b) Es gilt

$$f(x_-) = +19,3932\dots, \quad f(x_+) = -13,3932\dots$$

Die Funktion f besitzt also drei Nullstellen.

(c) f ist stetig und wegen

$$\frac{3}{\sqrt{5}} < \sqrt{2} \frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{18}{5}} < \sqrt{4} = 2$$

ist f' positiv in $[2, \infty)$ und damit streng monoton wachsend. Dann ist f in $[2, \infty)$ umkehrbar und die Umkehrabbildung g ist auch differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

(d) Es ist $84 = f(3)$ und damit

$$g'(84) = \frac{1}{f'(g(84))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3^2(53^2 - 18)} = \frac{1}{243}.$$

54. Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\exp(x) - 1} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}.$$

Lösung:

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(1)}{\frac{1}{x}} = \ln'(1) = 1.$$

In den nächsten beiden Aufgabenteilen benutzen wir die Regel von *de l'Hospital*.

(b)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\exp(x) - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x e^x + e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + x e^x + e^x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - x}{1 - x + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} (\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -2. \end{aligned}$$

Übungen (14)
zur Vorlesung „Analysis I“
mit Lösungen

55. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ werde $f : (-1, \infty) \ni x \mapsto (1+x)^\alpha \in \mathbb{R}$ betrachtet.

- (a) Bestimme die Taylorreihe T_{f,x_0}
für $x_0 = 0$ $\left(\text{verwende } \binom{\alpha}{k} \text{ für } \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} \right)$.
- (b) Stellt T_{f,x_0} die Funktion f in $(0,1)$ dar?
- (c) Approximiere $\frac{1}{2}\sqrt[5]{34} = (1+2^{-4})^{1/3}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-4} .

Lösung:

- (a) Es gilt

$$f^{(k)}(x) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \right) (1+x)^{\alpha-k}$$

Also gilt für die Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

$$T_{f,0} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

- (b) Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe, falls

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\alpha \cdots (\alpha - k) k!}{\alpha \cdots (\alpha - k + 1) (k+1)!} x \right| \leq q < 1 \\ \iff & \left| \frac{\alpha}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right| |x| \leq q < 1 \end{aligned}$$

für $k \geq K$ gilt. Ein solches $K \in \mathbb{N}$ existiert offenbar für alle $|x| < 1$. Also konvergiert $T_{f,0}$ für $x \in (0,1)$. Weiter gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x, 0)$$

und wegen $\binom{\alpha}{n+1} \leq 1$, $n \geq \alpha$ folgt für solche n

$$|R_n(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{0 \leq t \leq 1} f^{(n+1)}(tx)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (\alpha - i) 2^{\alpha-n-1} = 2^\alpha \binom{\alpha}{n+1} 2^{-(n+1)} \\ &\leq 2^\alpha \cdot 2^{-(n+1)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Also konvergiert das Restglied gegen 0 und damit ist f in $(0, 1)$ durch ihre Taylorreihe dargestellt.

- (c) Um die Genauigkeit 10^{-4} zu erreichen, muß das Restglied kleiner als diese Zahl werden. Es ist

$$(1+x)^{1/5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad x \in (0, 1)$$

und für das Restglied gilt

$$R_n(2^{-4}, 0) \leq 2^{1/5} 2^{-4(n+1)} \binom{1/5}{n+1} 2^{-(n+1)} \leq 2^{1/5} \cdot 2^{-5(n+1)}$$

Weiter ist

$$2^{1/5} \cdot 2^{-5(2+1)} = 2^{1/5} \cdot 2^{-15} < 10^{-4} < 2^{1/5} \cdot 2^{-10} = 2^{1/5} \cdot 2^{-5(1+1)}$$

Wähle also $n = 2$. Dann gilt

$$(1 + 2^{-4})^{1/5} = \sum_{k=0}^2 \binom{1/5}{k} 2^{-4k} \pm 10^{-4}$$

56. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und es gebe m, M mit:

$$|f'(x)| \geq m, \quad |f''(x)| \leq M, \quad x \in [a, b], \quad m > 0.$$

Die Iterationsfolge des Newton-Verfahrens ist folgendermaßen definiert:

$$x_0 \in [a, b]; \quad x_{n+1} := x_n - f(x_n) f'(x_n)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweise:

- (a) f hat in $[a, b]$ höchstens eine Nullstelle.
 (b) Ist z eine Nullstelle von f in (a, b) , so gilt mit $r := \min\{2mM^{-1}, b - z, z - a\}$,
 $x_0 \in [a, b] \cap (z - r, z + r)$ und $q := (2m)^{-1}M|x_0 - z|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

- i. $x_n \in [a, b], |z - x_{n+1}| \leq (2m)^{-1}M|z - x_n|^2.$
- ii. $|z - x_n| \leq (2m)M^{-1}q^{2^n}.$
- iii. $\lim_n x_n = z.$

Lösung:

- (a) Da f' stetig ist, gilt entweder $f'(x) \geq m > 0, x \in [a, b]$ oder $-f'(x) \geq m > 0, x \in [a, b]$, d.h. f ist streng monoton wachsend (bzw. fallend) und besitzt somit höchstens eine Nullstelle in $[a, b]$.

- (b) Es bezeichne $K_r(z)$ das offene Intervall $(z - r, z + r)$.

- i. Mit $x, y \in K_r(z)$ gilt die Taylorformel

$$f(y) = f(x) + (y - x)f'(x) + R_2(x, y)$$

mit der Abschätzung für das Restglied

$$|R_2(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|^2 M$$

Setze $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dann gilt

$$g(x) - z = -\frac{1}{f'(x)}(f(x) + (z - x)f'(x)) = \frac{1}{f'(x)}R_2(x, z)$$

Mit $x \in K_r(z)$ folgt also

$$|g(x) - z| \leq \frac{M}{2m}|x - z|^2 < \frac{M}{2m}r^2 \leq r \quad (*)$$

und damit auch $g(x) \in K_r(z)$. Wegen $x_{n+1} = g(x_n)$ und $x_0 \in K_r(z)$ sind alle $x_n \in K_r(z)$. Weiter gilt wegen $(*)$

$$|z - x_{n+1}| = |z - g(x_n)| \leq \frac{M}{2m}|z - x_n|^2, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- ii. Setze $r_n := \frac{|z - x_n|M}{2m}$. Dann gilt mit Ungleichung $(*)$ gerade $r_{n+1} \leq r_n^2, n \in \mathbb{N}$. Also folgt

$$r_n \leq r_0^{(2^n)} \iff |z - x_n| \leq \frac{2m}{M}q^{(2^n)}$$

- iii. Wegen obiger Ungleichung, und weil $\frac{2m}{M}q^{(2^n)}$ eine Nullfolge ist, gilt $|z - x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

C Übungen und Musterlösungen zu Analysis II

Übungen (1) zur Vorlesung „Analysis II“ mit Lösungen

1. Mit Hilfe partieller Integration leite man die folgenden Rekursionsformeln her.

$$(a) \quad \alpha_n := \int (\ln x)^n dx, \quad \alpha_n = x \cdot (\ln x)^n - n \alpha_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(b) \quad \beta_n := \int x^\alpha (\ln x)^n dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha + 1} \left(x^{\alpha+1} (\ln x)^n - n \beta_{n-1} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\alpha \neq -1)$$

Lösung:

(a) Wählt man

$$f(x) = (\ln x)^n, \quad f'(x) = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1}$$

und

$$g'(x) = 1, \quad g(x) = x,$$

dann erhält man mit partieller Integration für $n > 0$

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= \int (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n \cdot 1 dx \\ &= x (\ln x)^n - \int n (\ln x)^{n-1} dx \\ &= x (\ln x)^n - n \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\alpha_0 = \int dx = x.$$

(b) Wählt man

$$f(x) = (\ln x)^n, f'(x) = \frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}$$

und

$$g'(x) = x^\alpha, g(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

so erhält man mit partieller Integration für $n > 0$

$$\begin{aligned}\beta_n &:= \int x^\alpha (\ln x)^n dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\ln x)^n - \int \frac{n}{\alpha+1} x^\alpha (\ln x)^{n-1} dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left(x^{\alpha+1} (\ln x)^n - n \beta_{n-1} \right).\end{aligned}$$

Es ist

$$\beta_0 = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2. Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen ($a \in \mathbb{R}$):

$$\int 10^x dx, \quad \int \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Lösung:

(a) Es ist

$$\frac{d}{dx} 10^x = 10^x \ln 10.$$

Damit ergibt sich

$$\int 10^x dx = \frac{1}{\ln 10} \int \left(\frac{d}{dx} 10^x \right) dx = \frac{10^x}{\ln 10}.$$

(b) Substituiere $x = a \cdot u$ und $u = \tan(z)$!

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{1}{a^2} \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1 + \tan^2(z)}{1 + \tan^2(z)} dz = \frac{1}{a} \int dz = \frac{1}{a} z \\ &= \frac{1}{a} \arctan(u) \\ &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

(c) Substituiere $x = |a| \cdot u$ und $u = \sinh(z)$!

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \int \frac{1}{|a|} \frac{dx}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{\cosh(z)}{\sqrt{1 + \sinh^2(z)}} dz = \int dz = z \\ &= \operatorname{Arsinh} u \\ &= \operatorname{Arsinh} \left(\frac{x}{|a|} \right) \end{aligned}$$

(d) Substituiere $x = |a| \cdot u$ und $u = \sin(z)$!

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{1}{|a|} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{\cos(z)}{\sqrt{1 - \sin^2(z)}} dz = \int dz = z \\ &= \arcsin u \\ &= \arcsin \left(\frac{x}{|a|} \right) \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh x - \sinh x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2(k! \pi x))^n \right] \end{aligned}$$

Hinweis zum letzten Grenzwert: Bestimmen Sie zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos^2 x)^n$.

Lösung:

(a) Es gilt nach Definition der Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} \cosh(x) - \sinh(x) &= \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} - \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \\ &= \exp(-x) \end{aligned}$$

und demzufolge ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cosh(x) - \sinh(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = 0.$$

(b) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sinh(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

und der Regel von *de L'Hospital* gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cosh(x)}{1} = 1.$$

(c) Es gilt

$$\cos^2(\pi y) \begin{cases} = 1, & \text{falls } y \in \mathbb{Z}, \\ < 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(\pi y) \right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nutzen nun die folgenden Eigenschaften aus:

- i. $\forall x \in \mathbb{Q} \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : y = k!x \in \mathbb{Z}.$
- ii. $\forall x \notin \mathbb{Q} \forall k \in \mathbb{Z} : y = k!x \notin \mathbb{Z}.$

Beweis:

- i. Sei $x = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Wähle z. B. $N = q!$.
- ii. Ist $x \notin \mathbb{Q}$ und nehmen wir an, es existiere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k!x = p \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $x = \frac{p}{k!} \in \mathbb{Q}$ im Widerspruch zu $x \notin \mathbb{Q}$.

Für die Grenzwerte ergibt sich somit

$$\begin{aligned} x \notin \mathbb{Q} &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : y_k := k!x \notin \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(\pi y_k) \right)^n = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(k!\pi x) \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(\pi y_k) \right)^n = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : y_k := k!x \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \forall k \geq N : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(\pi y_k) \right)^n = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(k!\pi x) \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos^2(\pi y_k) \right)^n = 1. \end{aligned}$$

4. Man bestimme die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt x_0 für die folgenden Funktionen f :

- (a) $f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ni x \mapsto \frac{1}{x^2 + \frac{1}{4}} \in \mathbb{R} \quad , \quad x_0 := 0 \quad ,$
- (b) $f : (-1, 1) \ni x \mapsto \ln(1+x) \in \mathbb{R} \quad , \quad x_0 := 0 \quad ,$
- (c) $f : (-1, 1) \ni x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1-x} \in \mathbb{R} \quad , \quad x_0 := 0 \quad .$

(Hinweis: Cauchy-Produkt).

Lösung:

- (a) Mit der Substitution $y = -4x^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 1/4} &= \frac{4}{1-y} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} y^n \quad (|y| < 1) \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n} \quad (|x| < 1/2). \end{aligned}$$

Für die angegebenen x ist diese Reihe absolut konvergent.

Die Berechnung des Konvergenzradius r erfolgt mit Hilfe der Formel

$$r = \left(\limsup_m \sqrt[m]{|a_m|} \right)^{-1}.$$

Es ist

$$a_m = \begin{cases} (-4)^n & m = 2n \text{ gerade,} \\ 0 & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Damit erhält man für gerade $m = 2n$

$$\sqrt[m]{|a_m|} = \sqrt[2n]{4^n} = 2$$

und für ungerade m

$$\sqrt[m]{|a_m|} = 0.$$

Damit ist $\limsup_m \sqrt[m]{|a_m|} = 2$ und der Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{2}.$$

- (b) Wir beweisen mittels vollständiger Induktion die Behauptung

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}, \quad n \geq 1.$$

Induktionsanfang: ($n = 1$) Benutzung der Kettenregel liefert

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = (-1)^0 0! (1+x)^{-1}$$

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n+1$) Unter Verwendung der Induktionsbehauptung

für ein $n \geq 1$ erhalten wir für $n+1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) (1+x)^{-n-1} \\ &= (-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Mit $f(0) = \ln(1) = 0$ erhalten wir damit die Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Die Berechnung des Konvergenzradius r erfolgt mit Hilfe der Formel

$$r = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Mit $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ folgt

$$r = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1.$$

(c) Mit Hilfe der Ergebnisse aus (4b)

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$$

mit $a_0 = 0$ und der Darstellung der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1-x} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} x^m x^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{m} \right) x^n. \end{aligned}$$

Für das Cauchy-Produkt gilt $r \geq \min(r_a, r_b) = 1$ (vgl. Satz 7.12 der Vorlesung).

Übungen (2)

zur Vorlesung „Analysis II“

mit Lösungen

5. Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$?

Lösung:

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Für die zu untersuchende Reihe gilt für $|x| > 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k}{1-x^k} = -1,$$

d. h. die oben angegebene notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe ist verletzt, die Reihe ist also divergent für $|x| > 1$.

Für $|x| = 1$ ist die Reihe nicht definiert.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Reihe für $|x| \leq q_0 < 1$. Sei $a_k(x) := \frac{x^k}{1-x^k}$, dann ist

$$\left| \frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)} \right| = \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{1-x^{k+1}}}{\frac{x^k}{1-x^k}} \right| = \left| \frac{x(1-x^k)}{1-x^{k+1}} \right| = |x| \left| \frac{1-x^k}{1-x^{k+1}} \right|.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} |1-x^k| &\leq 1+|x|^k \leq 1+q_0^k \\ |1-x^{k+1}| &\geq |1-|x|^{k+1}| \geq 1-q_0^{k+1} \end{aligned}$$

und damit folgt für alle $|x| \leq q_0 (< 1)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)} \right| &\leq q_0 \underbrace{\frac{1+q_0^k}{1-q_0^{k+1}}}_{\rightarrow 1} \\ \Rightarrow \quad \exists K \forall k \geq K \forall |x| \leq q_0 : \left| \frac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)} \right| &\leq q \text{ für } q := \frac{1+q_0}{2} (< 1). \end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe somit für alle $|x| < 1$ absolut konvergent.

Mit $C := \frac{q_0}{1-q_0}$ gilt $|a_1(x)| \leq C$ und $|a_{k+1}(x)| \leq Cq^k, k = 0, 1, 2, \dots, |x| \leq q_0$. Somit erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \quad \forall |x| \leq q_0.$$

Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 14.5 der Vorlesung) konvergiert die Reihe der $a_k(x)$ also absolut und gleichmäßig für $|x| \leq q_0 < 1$.

6. Man bestimme die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{(n^\nu)} (\nu \in \mathbb{N}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right) x^n (a \in \mathbb{R}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a+n)x^n (a \in \mathbb{R}).$$

Lösung:

(a) Wir schreiben die Potenzreihe in der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} x^{\mu} \text{ mit } a_{\mu} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = n^{\nu}, \\ 0 & \text{für } \mu \neq n^{\nu}. \end{cases}$$

Damit ist nun

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|a_{\mu}|} = 1,$$

und für den Konvergenzradius der Reihe ergibt sich

$$r = \frac{1}{\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} \sqrt[\mu]{|a_{\mu}|}} = 1.$$

(b) Für den Konvergenzradius erhält man nach dem Quotientenkriterium

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a + \frac{1}{n}}{a + \frac{1}{n+1}} \right| = 1.$$

Dies gilt auch für $a = 0$.

(c) Wiederum liefert das Quotientenkriterium den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a+n}{a+n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1+a/n}{1+a/n+1/n} \right| = 1.$$

7. Die Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

haben die Konvergenzradien r_a bzw. r_b . Was läßt sich über Konvergenzradien von

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n$$

sagen (obere und untere Schranken?), wobei im letzten Fall $b_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, angenommen wird.

Lösung:

Sei r_c der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Für den Konvergenzradius gilt allgemein

$$r_c = \left(\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

mit den Konventionen $1/0 := \infty$ und $1/\infty = 0$.

(a) Wir betrachten zunächst die Potenzreihe mit $c_n = a_n \cdot b_n$.

1. Fall: $r_a = 0$ und $r_b = \infty$ oder $r_b = 0$ und $r_a = \infty$

In diesem Fall ist keine allgemeine Aussage möglich.

2. Fall: Andernfalls erhält man aus

$$\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|c_n|} \leq \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|b_n|}$$

die untere Schranke

$$r_c \geq r_a \cdot r_b$$

für den Konvergenzradius r_c .

(b) Seien nun die Koeffizienten in der Potenzreihe gegeben durch $c_n = a_n/b_n$. Falls die Grenzwerte

$$\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| (= r_a) \text{ und } \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| (= r_b)$$

existieren und außerdem $r_b \neq 0$ gilt, dann existiert auch

$$\lim_n \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{\lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}{\lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|},$$

und es ist

$$r_c = r_a / r_b.$$

8. (a) Man entscheide, ob eine Metrik auf $\mathbb{R}$ vorliegt:

i. $d(x, y) := |x - y|^{1/2} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad .$

ii. $d(x, y) := |x - 2y| \quad , \quad x, y \in \mathbb{R} \quad .$

(b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise:

$$|d(x, y) - d(u, v)| \leq d(x, u) + d(y, v) \quad , \quad x, y, u, v \in X \quad .$$

(c) Sei (X, d) metrischer Raum, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X , und sei

$$\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 : K_d(x, \varepsilon) \subset A\} \quad .$$

Zeige: $(X, \mathcal{T}_d)$ ist topologischer Raum.

Lösung:

(a) i. A. Definitheit

$$d(x, y) = |x - y|^{1/2} = 0 \Leftrightarrow x = y$$

B. Symmetrie

$$d(x, y) = |x - y|^{1/2} = |y - x|^{1/2} = d(y, x)$$

C. Dreiecksungleichung

Für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq a + b \Rightarrow \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Damit gilt nun aber für $x, y, z \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sqrt{|x - z|} \leq \sqrt{|x - y| + |y - z|} \\ &\leq \sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y - z|} = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

- ii. Die so definierte Funktion ist keine Metrik, weil z. B. die Eigenschaft der Definitheit nicht gegeben ist:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 2y \not\Leftrightarrow x = y.$$

- (b) Seien $x, y, u, v \in X$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $d(x, y) \geq d(u, v)$

$$\begin{aligned} d(x, y) - d(u, v) &\leq d(x, u) + d(u, y) - d(u, v) \\ &\leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) - d(u, v) \\ &= d(x, u) + d(v, y) \end{aligned}$$

2. Fall: Andernfalls vertauschen wir im ersten Fall x mit u und y mit v und nutzen die Symmetrieeigenschaft der Metrik aus.

- (c) Es soll hier gezeigt werden, daß jede Metrik auf natürliche Weise eine Topologie definiert.

i. Trivialerweise sind $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$.

- ii. Sei $A_\lambda \in \mathcal{T}_d, \lambda \in \Lambda$ ein System beliebig vieler Mengen aus $\mathcal{T}_d$. Es ist zu zeigen, daß die Vereinigung dieser beliebig vielen Mengen wieder in $\mathcal{T}_d$ liegt, d. h., daß gilt

$$A := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}_d.$$

Sicherlich ist $A \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $x \in A$ ein beliebiges Element der Vereinigung. Dann existiert ein $\lambda \in \Lambda$, so daß $x \in A_\lambda$, und es gilt, da $A_\lambda \in \mathcal{T}_d$ enthalten ist:

$$\exists \varepsilon = \varepsilon(x, \lambda) > 0 : K_d(x, \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A.$$

Also liegt auch A in $\mathcal{T}_d$.

- iii. Wir betrachten zwei Mengen $A, B \in \mathcal{T}_d$. Es ist zu zeigen, daß auch der Durchschnitt von A und B wieder in $\mathcal{T}_d$ liegt. Es gilt $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$.

Betrachten wir ein beliebiges $x \in A \cap B$. Da x sowohl in A als auch in B liegt, gilt nach Definition von $\mathcal{T}_d$:

$$(\exists \varepsilon_A > 0 : K_d(x, \varepsilon_A) \subset A) \quad \text{und} \quad (\exists \varepsilon_B > 0 : K_d(x, \varepsilon_B) \subset B).$$

Wähle $\varepsilon = \min(\varepsilon_A, \varepsilon_B)$. Dann gilt

$$K_d(x, \varepsilon) \subset A \quad \wedge \quad K_d(x, \varepsilon) \subset B$$

und damit auch

$$K_d(x, \varepsilon) \subset A \cap B.$$

Also gilt auch $A \cap B \in \mathcal{T}_d$.

Übungen (3) **zur Vorlesung „Analysis II“** mit Lösungen

9. Sei (X, T) topologischer Raum. Wir verwenden folgende Bezeichnungen ($A \subset X$):

$$\text{int}(A) := \bigcup \{B \mid B \subset A, B \text{ offen} \},$$

$$\text{cl}(A) := \bigcap \{B \mid A \subset B, B \text{ abgeschlossen} \},$$

$$\text{bd}(A) := \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A).$$

Zeige für $A, B \subset X$:

$$(a) \quad A \subset B \implies \text{int}(A) \subset \text{int}(B).$$

$$(b) \quad \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = \text{cl}(A \cup B).$$

Lösung:

(a) Jede offene Teilmenge C von A ist auch eine offene Teilmenge von B , da $A \subset B$.

Also kommt jede Menge C aus der Darstellung

$$\text{int}(A) = \bigcup \{C \mid C \subset A, C \text{ offen} \}$$

auch in

$$\text{int}(B) = \bigcup \{C \mid C \subset B, C \text{ offen} \}$$

vor und damit ist $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$.

(b) Es gilt

$$\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) = \bigcap \{C \cup D \mid A \subset C, B \subset D, C, D \text{ abgeschlossen} \}$$

$$\text{cl}(A \cup B) = \bigcap \{E \mid (A \cup B) \subset E, E \text{ abgeschlossen} \}$$

Setze

$$\mathcal{H} := \{C \cup D \mid A \subset C, B \subset D, C, D \text{ abgeschlossen} \}$$

$$\mathcal{K} := \{E \mid (A \cup B) \subset E, E \text{ abgeschlossen} \}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} cl(A) \cup cl(B) &= \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \\ cl(A \cup B) &= \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \end{aligned}$$

Sind nun C, D abgeschlossene Mengen mit $A \subset C, B \subset D$, also $H := C \cup D \in \mathcal{H}$, so folgt sofort, daß $(A \cup B) \subset C \cup D = H$ ist, also $H \in \mathcal{K}$ (da H wieder abgeschlossen ist).

Ist andererseits $K \in \mathcal{K}$, also K eine abgeschlossene Menge mit $(A \cup B) \subset K$, so gilt mit $C := D := K$ gerade $A \subset C$ und $B \subset D$. Somit ist $C \cup D = K \in \mathcal{H}$.

Wir haben damit gezeigt, daß $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Dann sind aber die Durchschnitte über beide Systeme ebenfalls gleich.

10. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 9 ist für $A, B \subset X$ folgendes zu zeigen:

- (a) $x \in bd(A) \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$
- (b) $bd(bd(A)) \subset bd(A).$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} x \notin bd(A) &\iff x \notin cl(A) \vee x \notin cl(X \setminus A) \\ &\iff (\exists B \text{ abgeschl.}, A \subset B : x \notin B) \vee (\exists B \text{ abgeschl.}, X \setminus A \subset B : x \notin B) \\ &\iff (\exists U \text{ offen}, U \cap A = \emptyset : x \in U) \vee (\exists U \text{ offen}, U \cap X \setminus A = \emptyset : x \in U) \\ &\iff \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset \vee U \cap (X \setminus A) = \emptyset \\ &\iff \neg(\forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \wedge U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset); \end{aligned}$$

Hierbei benutzt man, daß $X \setminus A \supset X \setminus B$, falls $A \subset B$, und daß $U = X \setminus B$ offen, falls B abgeschlossen ist.

- (b) $x \in bd(bd(A)) \iff x \in cl(bd(A)) \wedge x \in cl(X \setminus bd(A)) \Rightarrow x \in bd(A),$
denn da $bd(A)$ abgeschlossen ist, gilt $cl(bd(A)) = bd(A)$.

11. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume.

Zeige:

$$(a) \quad \text{Durch } \mathcal{T}_{X \times Y} := \left\{ S \subset X \times Y \left| \begin{array}{l} \text{Es existiert Indexmenge } I, \text{ und} \\ \text{es existieren } A_i \in \mathcal{T}_X, B_i \in \mathcal{T}_Y, \\ i \in I, \text{ mit } S = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \end{array} \right. \right\}$$

wird eine Topologie auf $X \times Y$ erklärt (*Produkttopologie*).

(b) $(X, \mathcal{T}_X)$ ist Hausdorff'sch genau dann, wenn

$$\Delta(X) := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\} \quad (\text{Diagonale von } X)$$

abgeschlossen bzgl. der Produkttopologie $\mathcal{T}_{X \times X}$ ist.

Lösung:

- (a) i. $X \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y}$ und $\emptyset \in \mathcal{T}_{X \times Y}$ ist trivial.
 ii. Seien $S_k \in \mathcal{T}_{X \times Y}$, $k \in K$ mit einer Indexmenge K . Dann läßt sich S_k schreiben als

$$S_k = \bigcup_{i \in I_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)}$$

mit einer Indexmenge I_k und $A_i^{(k)} \in \mathcal{T}_X, B_i^{(k)} \in \mathcal{T}_Y$. Setze

$$I = \bigcup_{k \in K} I_k$$

und für $k \in K, i \in I$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i^{(k)} &= \begin{cases} A_i^{(k)}, & i \in I_k \\ \emptyset, & i \notin I_k \end{cases} \\ \tilde{B}_i^{(k)} &= \begin{cases} B_i^{(k)}, & i \in I_k \\ \emptyset, & i \notin I_k \end{cases}. \end{aligned}$$

Für alle $k \in K$ und $i \in I$ ist dann $\tilde{A}_i^{(k)} \in \mathcal{T}_X$ und $\tilde{B}_i^{(k)} \in \mathcal{T}_Y$, und es gilt:

$$S_k = \bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i^{(k)} \times \tilde{B}_i^{(k)}.$$

Weil $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$ Topologien sind, gilt

$$\forall i \in I : \bigcup_{k \in K} \tilde{A}_i^{(k)} \in \mathcal{T}_X$$

und

$$\forall i \in I : \bigcup_{k \in K} \tilde{B}_i^{(k)} \in \mathcal{T}_Y.$$

Also folgt für die Vereinigung der S_k

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \in K} S_k &= \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i \in I_k} A_i^{(k)} \times B_i^{(k)} \right) \\ &= \bigcup_{k \in K} \left(\bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i^{(k)} \times \tilde{B}_i^{(k)} \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{k \in K} \tilde{A}_i^{(k)} \times \tilde{B}_i^{(k)} \right) \\ &= \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{k \in K} \tilde{A}_i^{(k)} \times \bigcup_{k \in K} \tilde{B}_i^{(k)} \right). \\ &\Rightarrow \bigcup_{k \in K} S_k \in \mathcal{T}_{X \times Y}. \end{aligned}$$

iii. Seien $U, V \in \mathcal{T}_{X \times Y}$. Dann gelten die Darstellungen

$$U = \bigcup_{i \in I_U} A_i \times B_i$$

und

$$V = \bigcup_{i \in I_V} C_i \times D_i$$

mit $A_i \in \mathcal{T}_X, B_i \in \mathcal{T}_Y, i \in I_U$ und $C_i \in \mathcal{T}_X, D_i \in \mathcal{T}_Y, i \in I_V$. Wir bilden wieder $I = I_U \cup I_V$ und analog zum ersten Teil der Aufgabe die Mengen $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i$ und $\tilde{D}_i$. Dann sind $\tilde{A}_i \in \mathcal{T}_X, \tilde{B}_i \in \mathcal{T}_Y, i \in I$ und $\tilde{C}_i \in \mathcal{T}_X, \tilde{D}_i \in \mathcal{T}_Y, i \in I$ und es gilt

$$\tilde{A}_i \cap \tilde{C}_i \in \mathcal{T}_X, i \in I$$

$$\tilde{B}_i \cap \tilde{D}_i \in \mathcal{T}_Y, i \in I$$

da $\mathcal{T}_X$ und $\mathcal{T}_Y$ Topologien sind. Also folgt

$$U \cap V = \bigcup_{i \in I} (\tilde{A}_i \cap \tilde{C}_i) \times (\tilde{B}_i \cap \tilde{D}_i) \in \mathcal{T}_{X \times Y}$$

- (b) Sei zunächst $(X, \mathcal{T}_X)$ hausdorffsch. Dann existieren zu verschiedenen Punkten $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen $U(x), V(y)$, d.h. zu $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta(X)$

gibt es eine offene Umgebung $W = U(x) \times V(y)$, die ganz in $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ liegt. Somit muß $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ offen und damit $\Delta(X)$ abgeschlossen sein.

Für die Umkehrung sei nun $\Delta(X)$ abgeschlossen in $(X \times X)$ und sei $x \neq y$. Dann ist $(X \times X) \setminus \Delta(X)$ offen und zu (x, y) gibt es eine offene Umgebung $W(x, y)$ mit $W(x, y) \subset (X \times X) \setminus \Delta(X)$. Schreiben wir nun

$$W(x, y) = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i,$$

so folgt $\exists i \in I : (x, y) \in A_i \times B_i$. Damit ist $A_i \times B_i \cap \Delta(X) = \emptyset$. Also müssen A_i und B_i disjunkt sein. Wegen $A_i \in \mathcal{T}_X$, $B_i \in \mathcal{T}_Y$ ist die Umkehrung bewiesen.

12. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, und sei $f : X \rightarrow Y$. Zeige die Äquivalenz von ($\mathcal{P}(Y)$ = Potenzmenge von Y) :

- (a) f ist stetig.
- (b) $\forall A \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(Y \setminus A)$ abgeschlossen.
- (c) $\forall B \in \mathcal{P}(Y) : cl(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(cl(B))$.

Lösung:

- (a) $((a) \iff (b))$: Sei $A \in \mathcal{T}_Y$, d.h. A offen. f ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist. Wegen

$$f^{-1}(A) \text{ offen} \iff X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \text{ abgeschlossen}$$

folgt die Äquivalenz von (a) und (b). [Nach Analysis I, Übung 5, Aufgabe 2 ist $f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))'$].

- (b) $((b) \Rightarrow (c))$: Sei $B \in \mathcal{P}(Y)$. Setze nun $A := Y \setminus cl(B)$. Dann ist $A \in \mathcal{T}_Y$ und $cl(B) = Y \setminus A$. Wegen (b) ist also $f^{-1}(cl(B))$ abgeschlossen. Weiter gilt wegen $B \subset cl(B)$ auch

$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(cl(B))$$

und mit der Definition des Abschlusses folgt insgesamt

$$cl\left(f^{-1}(B)\right) \subset f^{-1}(cl(B))$$

(c) $((c) \Rightarrow (b))$: Sei $A \in \mathcal{T}_Y$. Dann ist $B = Y \setminus A$ abgeschlossen und somit $cl(B) = B$.

Nach (c) folgt dann mit $B \in \mathcal{P}(Y)$ gerade

$$f^{-1}(B) \subset cl\left(f^{-1}(B)\right) \stackrel{(c)}{\subset} f^{-1}(cl(B)) = f^{-1}(B).$$

Somit ist $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(B) = cl(f^{-1}(B))$ abgeschlossen.

Übungen (4)

zur Vorlesung „Analysis II“

mit Lösungen

13. Sei $X := \mathbb{R}$ versehen mit der „euklidischen Metrik“ $d := |\cdot|$. Zeige:

- (a) Ist $A \subset X$, $\#A < \infty$ (A hat nur endlich viele Elemente), so ist A kompakt.
 - (b) Ist $A \subset X$ nach oben beschränkt und $A \neq \emptyset$, so gilt: $\sup A \in \text{cl}(A)$.
 - (c) Sind $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt ($A \cap B = \emptyset$), so gibt es offene Mengen $U, V \subset X$ mit: $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.
- (Hinweis: Betrachte die Distanzfunktion von A und B).

Lösung:

- (a) Da A nur endlich viele Elemente enthält, kann man A schreiben als

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \text{ mit } n := \#A.$$

Sei nun $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebige offene Überdeckung von A . Dann existiert zu jedem $a_j, j = 1, \dots, n$, ein $\lambda_j \in \Lambda$ mit der Eigenschaft $a_j \in U_{\lambda_j}$ und somit gilt

$$A = \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}.$$

Also ist $\{U_{\lambda_j}\}_{j=1, \dots, n}$ eine endliche offene Überdeckung von A . Damit ist gezeigt, daß A eine kompakte Menge ist, da sich aus jeder offenen Überdeckung eine endliche offene Überdeckung auswählen läßt.

- (b) $\text{cl}(A)$ ist nach Definition abgeschlossen, das heißt für jede konvergente Folge in $\text{cl}(A)$ liegt auch der Grenzwert in $\text{cl}(A)$ (vgl. Satz 15.14 der Vorlesung).

Da A beschränkt ist, existiert eine reelle Zahl c mit $c = \sup A$. Nach Definition des Supremums gibt es dann eine Folge $\{x_n\} \subset A$ mit $x_n \rightarrow \sup A \Rightarrow \sup A \in \text{cl}(A)$.

- (c) Zunächst gilt für jede Teilmenge C eines metrischen Raumes X , daß

$$x \in \text{cl}(C) \Leftrightarrow \text{dist}(x, C) = 0.$$

(Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Charakterisierung (b) von $\text{cl}(C)$ in Satz 15.14.)

Seien nun A, B zwei abgeschlossene disjunkte Mengen eines metrischen Raumes X mit Metrik d . Ist $x \in A$, so ist wegen $x \notin B = \text{cl}(B) : \text{dist}(x, B) > 0$; ebenso ist für jedes $y \in B$ auch $\text{dist}(y, A) > 0$. Wir können daher zu jedem $x \in A$ bzw. $y \in B$ eine Zahl $\varepsilon(x)$ bzw. $\varepsilon'(y)$ mit

$$0 < \varepsilon(x) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(x, B) \text{ bzw. } 0 < \varepsilon'(y) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(y, A)$$

wählen. Die Mengen

$$U := \bigcup_{x \in A} K_d(x, \varepsilon(x)) \text{ bzw. } V := \bigcup_{y \in B} K_d(y, \varepsilon'(y))$$

sind offen, und es gilt offenbar $A \subset U$ bzw. $B \subset V$.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß $U \cap V = \emptyset$. Nehmen wir an, es gäbe einen gemeinsamen Punkt z von U und V . Dann gäbe es Punkte $x \in A$ und $y \in B$ mit

$$\begin{aligned} z &\in K_d(x, \varepsilon(x)) \cap K_d(y, \varepsilon'(y)) \\ \Rightarrow \text{dist}(x, B) &\leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ &< \varepsilon(x) + \varepsilon'(y) \leq \frac{1}{2}(\text{dist}(x, B) + \text{dist}(y, A)), \end{aligned}$$

und analog

$$\text{dist}(y, A) < \frac{1}{2}(\text{dist}(x, B) + \text{dist}(y, A)).$$

Addition der beiden letzten Ungleichungen führt auf den Widerspruch

$$\text{dist}(x, B) + \text{dist}(y, A) < \text{dist}(x, B) + \text{dist}(y, A),$$

womit die Behauptung (13c) bewiesen ist.

Bem.: Eigenschaft (13c) heißt auch das *Tietzsche Trennungsaxiom*. Topologische Räume, in denen das Tietzsche Trennungsaxiom gilt und in denen jede endliche Menge abgeschlossen ist, heißen *normal*. Teilräume eines normalen topologischen Raumes sind im allgemeinen nicht wieder normal. Ist dies jedoch der Fall, so heißt der Raum

vollständig normal. Im obigen Beweis haben wir gezeigt, daß jeder metrische Raum vollständig normal ist. (Lit.: W. Rinow, Die innere Geometrie der metrischen Räume, Springer, 1961.)

14. Seien $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$, $(Z, \mathcal{T}_Z)$, topologische Räume und sei $X \times Y$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}_{X \times Y}$. Die Abbildungen

$$p_X : X \times Y \ni (x, y) \mapsto x \in X, \quad p_Y : X \times Y \ni (x, y) \mapsto y \in Y$$

heißen *kanonische Projektionen*. Zeige:

- (a) p_X, p_Y sind stetig.
- (b) p_X, p_Y sind offene Abbildungen, d. h. $p_X(S) \in \mathcal{T}_X$, $p_Y(S) \in \mathcal{T}_Y$ für alle $S \in \mathcal{T}_{X \times Y}$.

Lösung:

- (a) Für alle $U \in \mathcal{T}_X$ und $V \in \mathcal{T}_Y$ ist

$$\begin{aligned} p_X^{-1}(U) &= U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y} \\ p_Y^{-1}(V) &= X \times V \in \mathcal{T}_{X \times Y} \end{aligned}$$

Damit ist das Urbild jeder offenen Menge unter p_X bzw. p_Y offen, d.h. beide Abbildungen sind stetig.

- (b) Sei $S \in \mathcal{T}_{X \times Y}$. Nach Aufgabe 11 läßt sich S schreiben als

$$S = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i$$

mit $A_i \in \mathcal{T}_X$ und $B_i \in \mathcal{T}_Y$ für $i \in I$. Also folgt

$$\begin{aligned} p_X(S) &= \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_X \\ p_Y(S) &= \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}_Y. \end{aligned}$$

15. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Raum und sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X .

Wir setzen:

$$[x] := \{u \in X \mid u \sim x\}, \quad x \in X, \quad X/\sim := \{[x] \mid x \in X\} \quad (\text{Quotientenraum}).$$

Sei $\pi : X \ni x \mapsto [x] \in X/\sim$ die kanonische Abbildung.

Zeige, daß durch

$$\mathcal{T}_{X/\sim} := \{S \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X\}$$

eine Topologie auf $X/\sim$ definiert wird (Quotiententopologie).

Lösung:

(a) $\pi^{-1}(X/\sim) = X \in \mathcal{T}_X \Rightarrow (X/\sim) \in \mathcal{T}_{X/\sim}$.

$$\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}_X \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_{X/\sim}.$$

(b) Seien $S_1, S_2 \in \mathcal{T}_{X/\sim}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(S_i) &\in \mathcal{T}_X, i = 1, 2 \\ \Rightarrow \pi^{-1}(S_1 \cap S_2) &\stackrel{\text{Ana I, Aufg. 5(a)}}{=} \pi^{-1}(S_1) \cap \pi^{-1}(S_2) \in \mathcal{T}_X \\ \Rightarrow S_1 \cap S_2 &\in \mathcal{T}_{X/\sim}. \end{aligned}$$

(c) Seien $S_k \in \mathcal{T}_{X/\sim}$, $k \in K \Rightarrow \pi^{-1}(S_k) \in \mathcal{T}_X, \forall k \in K$.

$$\Rightarrow \pi^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} S_k\right) = \bigcup_{k \in K} \pi^{-1}(S_k) \in \mathcal{T}_X$$

analog zu Analysis I, Blatt 2, Aufgabe 5 a) zeigt man, daß

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{k \in K} S_k\right) = \bigcup_{k \in K} \pi^{-1}(S_k).$$

Als Vereinigung (beliebig vieler) offener Mengen ist also auch diese Menge ein Element aus $\mathcal{T}_X$ und damit

$$\bigcup_{k \in K} S_k \in \mathcal{T}_{X/\sim}.$$

16. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 15 sei nun $X := \mathbb{R}^2$ (versehen mit der euklidischen Metrik).

(a) Zeige, daß durch

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) : \Longleftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}, \quad x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

eine Äquivalenzrelation auf X erklärt wird.

(b) Finde eine Abbildung von $X/\sim$ auf die Oberfläche eines geeigneten „Fahrradschlauches“ ($X/\sim$ ist der *zweidimensionale Torus* und wird meist mit T^2 bezeichnet).

Lösung:

- (a) i. Reflexivität: $(x_1, y_1) \sim (x_1, y_1)$, da $0 \in \mathbb{Z}$.
 ii. Symmetrie: Wegen $x - y \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Symmetrie klar.
 iii. Transitivität: Ist $x - y \in \mathbb{Z}$ und $y - z \in \mathbb{Z}$, so folgt $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$. Hieraus folgt sofort die Transitivität.
- (b) Die Gleichung für die Oberfläche des „Fahrradschlauches“ oder mathematisch gesprochen für den *Torus* in $\mathbb{R}^3$ lautet

$$(x^2 + y^2) - 2(x^2 + y^2)(R^2 + r^2 - z^2) + (R^2 - r^2 + z^2) = 0.$$

Dabei ist $R > r > 0$.

Durch die Zuordnung

$$\mathbb{R}^2 \ni (\varphi, \theta) \mapsto ((R + r \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\varphi, (R + r \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\varphi, r \sin 2\pi\theta)$$

wird eine surjektive (aber nicht injektive) Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf den „Fahrradschlauch“ definiert. (Nachrechnen!)

Wir konstruieren mit Hilfe dieser Abbildung nun eine Abbildung von $X/\sim$ auf den „Fahrradschlauch“. Sei dazu

$$[\varphi, \theta] := \{(\varphi', \theta') | (\varphi', \theta') \sim (\varphi, \theta)\}$$

ein Element aus $X/\sim$, also eine beliebige Äquivalenzklasse mit den Repräsentanten φ und θ . Wir definieren

$$\begin{aligned} t &: X/\sim \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &: [\varphi, \theta] \mapsto ((R + r \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\varphi, (R + r \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\varphi, r \sin 2\pi\theta). \end{aligned}$$

Diese Zuordnung ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der Äquivalenzklasse, denn für Repräsentanten $(\varphi', \theta') \in [\varphi, \theta]$ mit $\varphi' = \varphi + k, \theta' = \theta + \ell, k, \ell \in \mathbb{Z}$, erhält man

$$\begin{aligned} t([\varphi', \theta']) &= ((R + r \cos 2\pi\theta') \cos 2\pi\varphi', (R + r \cos 2\pi\theta') \sin 2\pi\varphi', r \sin 2\pi\theta') \\ &= ((R + r \cos 2\pi\theta) \cos 2\pi\varphi, (R + r \cos 2\pi\theta) \sin 2\pi\varphi, r \sin 2\pi\theta) \\ &= t([\varphi, \theta]), \end{aligned}$$

da $\sin$ und $\cos 2\pi$ -periodische Funktionen sind. Damit ist die gesuchte Abbildung gefunden. Diese Abbildung ist surjektiv und injektiv also bijektiv. Die Injektivität der Abbildung erhält man dadurch, daß man die Werte von φ und θ , für die die Abbildung gleiche Werte annimmt, zu Äquivalenzklassen zusammenfaßt und damit identifiziert.

Übungen (5)
zur Vorlesung „Analysis II“
mit Lösungen

Für die Lösung der folgenden Aufgaben benötigen wir den Begriff der *gleichgradig gleichmäßigen* Stetigkeit und den Satz von *Arzela–Ascoli*.

Definition: Seien (X, d_X) , (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ heißt *gleichgradig stetig*, falls gilt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in X \quad \forall f \in \mathcal{F} : d_X(x, x') < \delta \\ \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon . \end{aligned}$$

Satz von Arzela–Ascoli

Sei (X, d_X) kompakter metrischer Raum, sei (Y, d_Y) vollständiger metrischer Raum und sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\mathcal{F}$ ist relativ kompakte Teilmenge in $(\mathcal{C}(X, Y), d_\infty)$.
- (b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig und die Mengen

$$\mathcal{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} , \quad x \in X ,$$

sind relativ kompakte Teilmengen in (Y, d_Y) .

17. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Es gelte: $\exists c_1 \geq 0 \quad \forall t \in [-1, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(t)| \leq c_1$.

(a) Zusätzlich gelte: f_n ist differenzierbar in $(-1, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists c_2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in (-1, 1) : |f'_n(t)| \leq c_2.$$

Zeige: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

(b) Setze $F_n(t) := \int_{-1}^t f_n(s) ds$, $t \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$.

Zeige: $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Hinweis: Sie können hier den Satz von Arzela–Ascoli benutzen.

Lösung:

Für den Beweis der Behauptung verwenden wir den Satz von Arzela–Ascoli. Es ist:

- $X = [-1, 1]$ kompakter metrischer Raum mit Metrik $d_X(x, x') = |x - x'|$,
- $Y = \mathbb{R}$ vollständiger metrischer Raum mit Metrik $d_Y(y, y') = |y - y'|$.

(a) Betrachte $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.

Wir zeigen:

- $\mathcal{F}$ ist gleichgradig gleichmäßig stetig.
- $\mathcal{F}(x), x \in X$, sind relativ kompakte Mengen in $\mathbb{R}$.

Dies ist gerade die Aussage (b) des Satzes von Arzela–Ascoli. Es folgt also dann mit diesem Satz, daß $\mathcal{F}$ relativ kompakte Teilmenge von $(\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$, d.h. der Abschluß von $\mathcal{F}$ ist kompakt. Da $\mathcal{F}$ selbst eine Folge in $\text{cl}(\mathcal{F})$ ist, enthält $\mathcal{F}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Wir kommen nun zum Beweis der beiden Behauptungen:

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{c_2}$. Dann gilt für alle $x, x' \in [-1, 1]$ mit $|x - x'| < \delta$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f_n(x')| \stackrel{M.W.S.}{=} |f'_n(\xi)| \cdot |x - x'| < c_2 \cdot \delta = \varepsilon.$$

Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig gleichmäßig stetig (δ hängt weder von n noch von x ab).

- Da in $\mathbb{R}$ jede beschränkte Menge relativ kompakt ist, genügt es zu zeigen, daß die Mengen $\mathcal{F}(x), x \in X$, beschränkt sind.

Sei x fest vorgegeben. Dann gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x)| \leq c_1.$$

Diese Abschätzung gilt gleichmäßig bezüglich n und sogar bezüglich x . Die Mengen $\mathcal{F}(x), x \in X$, sind demzufolge beschränkt in $\mathbb{R}$ und somit nach dem oben gesagten relativ kompakt.

(b) Betrachte $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Wir weisen nach, daß $F_n, n \in \mathbb{N}$, die gleichen Eigenschaften besitzt wie f_n im vorangegangenen Aufgabenteil.

i. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $t \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} |F_n(t)| &= \left| \int_{-1}^t f_n(s) ds \right| \leq 2 \cdot \max_{s \in [-1, 1]} |f_n(s)| \\ &\leq 2 \cdot c_1 =: \tilde{c}_1, \end{aligned}$$

d.h. der Betrag der Funktionswerte ist gleichmäßig bezüglich n und t beschränkt.

ii. F_n ist diffbar in $(-1, 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es gilt:

$$|F'_n(t)| = |f_n(t)| \leq c_1 =: \tilde{c}_2.$$

Die Beträge der Funktionswerte der Ableitungen der F_n sind gleichmäßig bezüglich n und t beschränkt.

Die weitere Schlußweise ist dann analog zu der im ersten Aufgabenteil.

18. Sei $X := \mathcal{C}_1([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig differenzierbar}\}$, und sei $\|\cdot\|_1 : X \ni f \mapsto |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| \in \mathbb{R}$.

(a) Verifiziere, daß $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf X ist.

(b) Zeige: $(X, \|\cdot\|_1)$ ist Banachraum.

(c) Sei $A := \left\{f \in X \mid \|f\|_1 \leq 1\right\}$. Zeige: A ist relativ kompakte Teilmenge von $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Hinweis: In (c) ist wieder der Satz von Arzela–Ascoli oder das Ergebnis von Aufgabe 17 zu benutzen.

Lösung:

Die Menge $X = \mathcal{C}_1([0, 1], \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, dem Raum der stetigen Funktionen. Der wesentliche Grund hierfür ist Tatsache, daß die Summe zweier stetig differenzierbarer Funktionen bzw. das skalare Vielfache einer stetig differenzierbaren Funktion wieder stetig differenzierbar ist.

(a) Wir beweisen nun, daß die Abbildung $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf X definiert. Dabei nutzen wir beim Beweis der Homogenität und der Dreiecksungleichung wesentlich aus, daß die Ableitung eine lineare Abbildung von X nach $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ist.

i. Definitheit: $\|f\|_1 \geq 0$ sowie $f = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0$ ist klar.

$$\begin{aligned} \|f\|_1 = 0 &\Rightarrow |f(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \wedge f'(t) = 0, \forall t \in [0, 1] \\ &\Rightarrow f(t) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^t \underbrace{f'(s)}_{=0} ds = 0 \quad \forall t \in [0, 1] \\ &\Rightarrow f \equiv 0 \end{aligned}$$

ii. Homogenität: $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$ ist klar.

iii. Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= |f(0) + g(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t) + g'(t)| \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{t \in [0, 1]} |f'(t)| + \sup_{t \in [0, 1]} |g'(t)| = \|f\|_1 + \|g\|_1 \end{aligned}$$

(b) Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X .

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : \|f_m - f_n\|_1 = |f_m(0) - f_n(0)| + \|f'_m - f'_n\|_\infty < \varepsilon$$

Hieraus folgt sofort, daß sowohl $\{f_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im vollständigen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ als auch $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im vollständigen Raum $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bildet. Da in vollständigen Räumen jede Cauchy-Folge konvergiert, gilt also:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = c$$

und

$$\exists g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g.$$

Die Konvergenz ist dabei im Sinne der jeweiligen Norm auf den betrachteten Räumen zu verstehen.

Setze nun

$$f(t) := c + \int_0^t g(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $f \in X$ mit $f(0) = c$ und $f' = g$, und es gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1 &= |f(0) - f_n(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t) - f'_n(t)| \\ &= \underbrace{|c - f_n(0)|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|g - f'_n\|_\infty}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also konvergiert die Cauchy-Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $(X, \|\cdot\|_1)$ gegen $f \in X$. Somit ist $(X, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum.

(c) Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\|f_n\|_1 \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= \left\| f_n(0) + \int_0^{\cdot} f'_n(s) ds \right\|_\infty \leq \|f_n(0)\|_\infty + \left\| \int_0^{\cdot} f'_n(s) ds \right\|_\infty \\ &\leq |f_n(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'_n(t)| \leq 1. \end{aligned}$$

Die Folgen $\{f_n(0)\}$ und $\left\{ \int_0^{\cdot} f'_n(s) ds \right\}$ sind also beschränkt. Mit Aufgabe 17 und dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt, daß beide konvergente Teilfolgen besitzen. Also gibt es auch eine konvergente Teilfolge von $\{f_n\}$.

Eine andere Möglichkeit des Beweises besteht darin, den Satz von Arzela-Ascoli direkt anzuwenden. Es ist

- $X' = [0, 1]$ kompakter metrischer Raum mit Metrik $d_{X'}(x, x') = |x - x'|$,
- $Y = \mathbb{R}$ vollständiger metrischer Raum mit Metrik $d_Y(y, y') = |y - y'|$,
- $\mathcal{F} = A = \{f \in X \mid \|f\|_1 \leq 1\} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Wir beweisen nun:

- i. A ist gleichgradig gleichmäßig stetig.
- ii. $A(x), x \in X'$, sind relativ kompakte Teilmengen in $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$.

- i. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta := \varepsilon$. Dann gilt für alle $f \in A$ und alle $x, x' \in [0, 1]$ mit $|x - x'| < \delta$:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - x'| < \|f\|_1 \cdot \delta \leq \varepsilon.$$

A ist also gleichgradig gleichmäßig stetig.

- ii. Wir zeigen wieder, daß $A(x), x \in [0, 1]$, beschränkt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(0) + \int_0^x f'(s) ds \right| \leq |f(0)| + x \cdot \sup_{s \in [0, 1]} |f'(s)| \\ &\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = \|f\|_1 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $A(x), x \in X$, beschränkte und somit relativ kompakte Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist.

Satz $\Rightarrow$ A.-A. A ist relativ kompakte Teilmenge von $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$.

19. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und Z ein abgeschlossener linearer Teilraum von X .

- (a) Zeige: Durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in Z$$

wird auf X eine Äquivalenzrelation definiert.

- (b) Durch $\|\cdot\|_\sim : X/\sim \ni [x] \mapsto \inf \left\{ \|x + z\| \mid z \in Z \right\} \in \mathbb{R}$ wird eine Norm auf $X/\sim$ definiert.

Lösung:

- (a) i. Reflexivität:

$$x \sim x \iff x - x = 0 \in Z \quad \checkmark \text{ (da } Z \text{ ein linearer Teilraum)}$$

- ii. Symmetrie:

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff x - y \in Z \stackrel{Z \text{ Teilraum}}{\implies} y - x \in Z \\ &\iff y \sim x. \end{aligned}$$

iii. Transitivität:

$$\begin{aligned}
 x \sim y, y \sim z &\iff x - y =: z_1 \in Z, y - z =: z_2 \in Z \\
 &\implies x - z = (x - y) + (y - z) = z_1 + z_2 \in Z \\
 &\iff x \sim z.
 \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen ist:

- i. $X/\sim$ ist ein Vektorraum.
- ii. Die Abbildung $\|\cdot\|_\sim : X/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ ist wohldefiniert.
- iii. $\|\cdot\|_\sim$ definiert eine Norm auf $X/\sim$.

i. $X/\sim$ ist ein Vektorraum bez. der Addition

$$+ : [x] + [y] := [x + y]$$

und der skalaren Multiplikation

$$\cdot : \alpha \cdot [x] := [\alpha \cdot x].$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildungen ist gegeben, da für beliebige $z \in Z$ gilt: $[x + z] = [x]$.

Die Vektorraumgesetze verifiziert man anhand der Gültigkeit der Gesetze auf dem Vektorraum X . Es ist

$[0]$ das Neutralelement,

$[-x]$ das inverse Element zu $[x]$.

ii. Sei $x' \sim x$, d.h. $\exists \tilde{z} \in Z : x' - x = \tilde{z}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 \|[x']\|_\sim &= \inf \{\|x' + z\| \mid z \in Z\} \\
 &= \inf \{\|x + \tilde{z} + z\| \mid z \in Z\} \\
 &\stackrel{Z \text{ lin.}}{=} \inf \{\|x + w\| \mid w \in Z\} \\
 &= \|[x]\|_\sim.
 \end{aligned}$$

iii. **Definitheit:**

$$\|[x]\|_\sim \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\|[0]\|_\sim = \inf \{\|z\| \mid z \in Z\} = 0, \text{ da } 0 \in Z.$$

Sei nun $[x] \in X/\sim$ mit $\|[x]\|_\sim = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \inf \{ \|x + z\| \mid z \in Z \} = 0 \\ \Rightarrow & \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Z : \|x - (-z_n)\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \\ \Longleftrightarrow & \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Z : \lim_{n \rightarrow \infty} (-z_n) = x \\ \stackrel{Z \text{ abgeschl.}}{\Rightarrow} & x \in Z \\ \Rightarrow & [x] = [0]. \end{aligned}$$

Homogenität: Sei $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_\sim &= \inf \{ \|\alpha x + z\| \mid z \in Z \} \\ &= \inf \left\{ \left\| \alpha \left(x + \frac{z}{\alpha} \right) \right\| \mid z \in Z \right\} \\ &= |\alpha| \inf \{ \|x + \tilde{z}\| \mid \tilde{z} \in Z \} \\ &= |\alpha| \|[x]\|_\sim. \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in X$. Nach der Definition des Infimums existieren zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon \in Z$ mit:

$$\|x + z_1^\varepsilon\| \leq \|[x]\|_\sim + \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|y + z_2^\varepsilon\| \leq \|[y]\|_\sim + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\|_\sim &= \|[x + y]\|_\sim = \inf \{ \|x + y + z\| \mid z \in Z \} \\ &\leq \|x + y + z_1^\varepsilon + z_2^\varepsilon\| \leq \|x + z_1^\varepsilon\| + \|y + z_2^\varepsilon\| \\ &\leq \|[x]\|_\sim + \|[y]\|_\sim + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

20. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 19 zeige:

- (a) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so ist auch $(X/\sim, \|\cdot\|_\sim)$ ein Banachraum.
- (b) Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ stimmt mit der Topologie, definiert durch $d := d_{\|\cdot\|_\sim}$ überein.

Lösung:

- (a) (Vgl. J. Wloka: Funktionalanalysis und Anwendungen, 8.2)

Hier ist $[x] = \{u \in X \mid u - x \in Z\} = \{u \in X \mid \exists z \in Z : u = x + z\}$. Wir beweisen zunächst drei Behauptungen, die wir für den Beweis benötigen.

Beh. 1: Zu $[x], [y] \in X / \sim$ und $x \in [x]$ existiert ein $\tilde{y} \in [y]$ mit

$$\|x - \tilde{y}\| \leq 2\|[x] - [y]\|_{\sim}.$$

Beweis: Nach Definition des Infimums gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in X \exists z \in Z : \|x - y + z\| \leq \|[x] - [y]\|_{\sim} + \varepsilon.$$

Zu $x \in X$ setze $\tilde{y} := y - z$, dann ist $\tilde{y} \in [y]$ (da $-z \in Z$). Falls $\|[x] - [y]\|_{\sim} > 0$, wähle $\varepsilon = \|[x] - [y]\|_{\sim}$; falls $\|[x] - [y]\|_{\sim} = 0$, dann ist $[x] = [y]$ und man kann $\tilde{y} = x \in [y] = [x]$ wählen.

Beh. 2: Sei $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem normierten Raum Y , dann existiert eine Teilfolge $\mathbb{N}' = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\| < \infty.$$

Beweis: Da $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, hat man folgendes:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists N_k \forall m, n \geq N_k : \|y_m - y_n\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Wähle $n_1 = N_1, n_2 = \max\{N_2, n_1 + 1\}, \dots, n_{k+1} = \max\{N_{k+1}, n_k + 1\}$; dann ist $n_{k+1} > n_k$ und $\|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n_k} - y_{n_{k+1}}\|.$$

Beh. 3: Ist $\{[x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $X / \sim$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n] - [x_{n+1}]\|_{\sim} < \infty$, dann existiert ein Limes $[x_0]$ in $X / \sim$, d.h. $\|[x_n] - [x_0]\|_{\sim} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis: Sei x_1 beliebig aus $[x_1]$, dann gibt es nach Beh. 1 ein $x_2 \in [x_2]$ mit

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|[x_1] - [x_2]\|_{\sim}; \text{ für beliebiges } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:}$$

$$\exists x_{n+1} \in [x_{n+1}] : \|x_n - x_{n+1}\| \leq 2\|[x_n] - [x_{n+1}]\|_{\sim}, n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x_{n+1}\|,$$

und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in X , da

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_k - x_{k+1}\|, \quad m > n.$$

Da X ein Banachraum ist, konvergiert die Folge der $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert x_0 , und für die zugehörige Äquivalenzklasse $[x_0]$ folgt:

$$\|[x_n] - [x_0]\|_{\sim} = \|[x_n - x_0]\|_{\sim} \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Nach diesen Vorarbeiten kommen wir nun zum Beweis der **Behauptung**, daß auch $X/\sim$ ein Banachraum ist.

Sei dazu $\{[x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $X/\sim$. Dann existiert (nach Beh. 2) eine Teilfolge $\mathbb{N}' = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß $\{[x_{n_k}]\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und daß $\sum_{k=1}^{\infty} \|[x_{n_k}] - [x_{n_{k+1}}]\|_{\sim} < \infty$.

$$\stackrel{\text{Beh. 3}}{\Rightarrow} \exists [x_0] \in X/\sim: \|[x_{n_k}] - [x_0]\|_{\sim} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \|[x_n] - [x_0]\|_{\sim} \leq \|[x_n] - [x_{n_k}]\|_{\sim} + \|[x_{n_k}] - [x_0]\|_{\sim} \rightarrow 0 \quad \left(\begin{matrix} n \rightarrow \infty, \\ k \rightarrow \infty \end{matrix} \right).$$

Damit ist gezeigt, daß die Folge $\{[x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den (eindeutigen) Limes $[x_0]$ konvergiert.

(b) Nach Definition gilt für die Quotiententopologie

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{X/\sim} &= \left\{ S \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(S) \in \mathcal{T}_X \right\} \\ &= \left\{ S \subset X/\sim \mid \forall x \in \pi^{-1}(S) \exists \delta > 0 : K_{d_X}(x, \delta) \subset \pi^{-1}(S) \right\} \\ &= \left\{ S \subset X/\sim \mid \forall [x] \in S \exists \delta > 0 : \pi(K_{d_X}(x, \delta)) \subset S \right\} \end{aligned}$$

und für die Normtopologie

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{\sim}} = \left\{ S \subset X/\sim \mid \forall [x] \in S \exists \delta > 0 : K_{d_{X/\sim}}([x], \delta) \subset S \right\}.$$

Wir zeigen:

$$\pi(K_{d_X}(x, \delta)) = K_{d_{X/\sim}}([x], \delta).$$

Es gilt zunächst

$$\pi(K_{d_X}(x, \delta)) = \{[y] \in X/\sim \mid \exists \hat{y} \in [y] : \|\hat{y} - x\| < \delta\}.$$

„ $\subset$ “: Sei $[y] \in X/\sim$ mit der Eigenschaft, daß ein $\hat{y} \in [y]$ existiert mit $\|\hat{y} - x\| < \delta$. Dann gilt:

$$\|[y] - [x]\|_{\sim} = \|\hat{y} - [x]\|_{\sim} = \|\hat{y} - x\|_{\sim} \leq \|\hat{y} - x\| < \delta$$

$$\Rightarrow [y] \in K_{d_{X/\sim}}([x], \delta).$$

„ $\supset$ “: Sei $[y] \in X/\sim$ mit $\|[y] - [x]\|_{\sim} = \|[y - x]\|_{\sim} < \delta$. Dann existiert zu jedem ε ein $z \in Z$ mit $\|y - x + z\| < \|[y] - [x]\|_{\sim} + \varepsilon$. Wir wählen ε so, daß $\|[y] - [x]\|_{\sim} + \varepsilon < \delta$. Setzen wir nun $\hat{y} := y + z$, so ist $\hat{y} \in [y]$, und es gilt:

$$\|\hat{y} - x\| = \|y - x + z\| < \|[y] - [x]\|_{\sim} + \varepsilon < \delta$$

$$\Rightarrow [y] \in \pi(K_{d_X}(x, \delta)).$$

Übungen (6)

zur Vorlesung „Analysis II“

mit Lösungen

21. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum. Wir definieren:

X heißt *bogenweise zusammenhängend*

$$:\Leftrightarrow \forall x, y \in X \exists \varphi \in \mathcal{C}([0, 1]; X) \text{ mit } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y.$$

X heißt *zusammenhängend*

$$:\Leftrightarrow (A \subset X \text{ offen und abgeschlossen} \implies A \in \{\emptyset, X\}).$$

Zeige:

Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, und sei X bogenweise zusammenhängend bzw. zusammenhängend. Zeige: $f(X)$ ist bogenweise zusammenhängend bzw. zusammenhängend.

Lösung:

(a) Sei X zunächst bogenweise zusammenhängend. Zu zeigen ist: $f(X)$ ist bogenweise zusammenhängend.

Es seien $a = f(x), b = f(y) \in f(X)$. Dann existiert eine stetige Funktion

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow X \text{ mit } \varphi(0) = x, \varphi(1) = y.$$

Definiere $\gamma := f \circ \varphi, \gamma : [0, 1] \rightarrow f(X)$. γ ist als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig mit

$$\gamma(0) = f \circ \varphi(0) = f(x) \text{ und } \gamma(1) = f \circ \varphi(1) = f(y).$$

Also ist $f(X)$ bogenweise zusammenhängend.

(b) Sei X nun zusammenhängend. Zu zeigen ist: $f(X)$ ist zusammenhängend.

Sei $B \subset f(X)$ offen und abgeschlossen. Da f stetig ist, gilt (vgl. Satz 15.8 und Aufgabe 12):

$$f^{-1}(B) \text{ offen und abgeschlossen in } X$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B) = \emptyset \text{ oder } f^{-1}(B) = X$$

$$\Rightarrow B \in \{\emptyset, f(X)\}.$$

22. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 21, zeige:

Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ zusammenhängender topologischer Raum und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeige für $x, y \in X$:

$$[f(x), f(y)] \subset f(X), \quad \text{falls } f(x) \leq f(y),$$

$$[f(y), f(x)] \subset f(X), \quad \text{falls } f(y) \leq f(x).$$

Lösung:

Der Beweis erfolgt in drei Teilen.

(a) Zunächst weisen wir nach, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

i. X ist zusammenhängend.

ii. Es gilt nicht:

$$\exists A, B \subset X, A, B \text{ offen und nichtleer mit } A \cap B = \emptyset \text{ und } A \cup B = X.$$

Beweis:

$\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$: Angenommen (ii) gilt nicht, d.h.

$$\exists A, B \subset X, A, B \text{ offen und nichtleer mit } A \cap B = \emptyset \text{ und } A \cup B = X.$$

Es ist

$$\begin{aligned} X \setminus A &= (A \cup B) \setminus A \\ &= B \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{=\emptyset} \\ &= B \text{ offen und nichtleer.} \end{aligned}$$

Also ist A offen und abgeschlossen und $A \neq \emptyset$ und $A \neq X$, d.h. es gilt nicht (i).

$\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$: Angenommen (i) gilt nicht, d.h.

$$\exists A \subset X \text{ offen und abgeschl. mit } A \notin \{\emptyset, X\}.$$

A ist also insbesondere offen und nichtleer.

Setze nun $B := X \setminus A$. Dann ist B offen, da A abgeschlossen ist, und nichtleer, da $A \neq X$, und es gilt:

$$A \cap B = \emptyset \text{ und } A \cup B = X.$$

Dies bedeutet aber, daß (ii) nicht gilt.

Mit diesem Begriff des Zusammenhangs von Mengen läßt sich beweisen (s. Heuser, Lehrbuch der Analysis 2, Satz 160.1)

(b) *Die mehrpunktigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle.*

(c) Wir kommen nun zum Beweis der in der Aufgabe aufgestellten Behauptung.

Sei dazu o.B.d.A. angenommen, daß $f(x) \leq f(y)$ (andernfalls vertausche x und y).

1. Fall: $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow [f(x), f(y)] = \{f(x)\} \subset f(X).$$

2. Fall: $f(x) < f(y)$

Nach Aufgabe 21 ist $f(X)$ als Bild eines zusammenhängenden topologischen Raums unter einer stetigen Funktion wieder zusammenhängend und somit in diesem Fall zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$, die wegen $f(x) \neq f(y)$ auch mehrpunktig ist. Nach (22b) existiert dann ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $f(X) = I$. Wegen $f(x), f(y) \in I = f(X)$ folgt dann aber auch

$$[f(x), f(y)] \subset f(X).$$

23. Sei $\ell_p(\mathbb{C}) := \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$.

Zeige für $p \in [1, \infty)$:

- (a) $\ell_p(\mathbb{C})$ ist Vektorraum über $\mathbb{C}$.
- (b) Durch $\|\cdot\|_p : \ell_p(\mathbb{C}) \ni \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p)^{1/p} \in \mathbb{R}$ wird eine Norm auf $\ell_p(\mathbb{C})$ definiert.
- (c) $(\ell_p(\mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ ist Banachraum.

Lösung:

- (a) Wir definieren zunächst eine Addition auf $\ell_p(\mathbb{C}) \times \ell_p(\mathbb{C})$ und eine skalare Multiplikation auf $\mathbb{C} \times \ell_p(\mathbb{C})$.

Seien dazu $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} + & : x + y := \{x_n + y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \\ \cdot & : \alpha \cdot x := \{\alpha x_n\}_{n \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst, daß $\ell_p(\mathbb{C})$ bezüglich der so definierten Operationen abgeschlossen ist, d.h., daß $x + y, \alpha x \in \ell_p(\mathbb{C})$.

$$x, y \in \ell_p(\mathbb{C}) \Rightarrow \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow x + y \in \ell_p(\mathbb{C})$$

(siehe nächster Aufgabenteil). Ebenso gilt

$$x \in \ell_p(\mathbb{C}), \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \|\alpha x\|_p = |\alpha| \|x\|_p \Rightarrow \alpha x \in \ell_p(\mathbb{C}).$$

Man rechnet nun leicht nach, daß $\ell_p(\mathbb{C})$ mit den so definierten Operationen einen $\mathbb{C}$ -Vektorraum bildet.

Das neutrale Element ist $0 = \{0\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. Das inverse Element zu $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ ist $-x := \{-x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze und $1 \cdot x = x$, $x \in \ell_p(\mathbb{C})$ gelten aufgrund der entsprechenden Gesetze für komplexe Zahlen und weil die Verknüpfungen auf Folgen gliedweise definiert sind.

- (b) i. $\|x\|_p \geq 0$ ist klar.
ii.

$$\begin{aligned} x = 0 & \Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} = 0 \\ \|x\|_p = 0 & \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p = 0 \Rightarrow x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

$$\text{iii. } \|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in \ell_p(\mathbb{C}).$$

iv. Für $x, y \in \ell_p(\mathbb{C})$ gilt mit der Minkowskischen Ungleichung (vgl. Satz 17.3):

$$\left(\sum_{i=0}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^n |y_i|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Da die rechte Seite der Gleichung unabhängig von n ist, bleibt die Ungleichung richtig, wenn wir links zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ übergehen. Damit erhalten wir

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Damit ist gezeigt, daß $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\ell_p(\mathbb{C})$ definiert.

(c) Wir haben bereits gezeigt, daß $(\ell_p(\mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum ist. Es bleibt also nur noch die Vollständigkeit nachzuweisen. Sei dazu $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell_p(\mathbb{C})$, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N.$$

Für festes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt also

$$|x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon, \quad \forall m, n \geq N,$$

also ist für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ die Folge $\{x_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und konvergiert somit gegen ein $x_i \in \mathbb{C}$. Die Folge $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also komponentenweise gegen eine komplexe Zahlenfolge $x = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$. Bleibt noch zu zeigen, daß $\|x - x^{(n)}\|_p \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ gilt.

Für beliebiges $M \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\left(\sum_{i=0}^M |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad m, n \geq N$$

Gehen wir in dieser Ungleichung zum Grenzwert ($m \rightarrow \infty$) über, so ergibt sich

$$\left(\sum_{i=0}^M |x_i - x_i^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da dies für beliebiges $M \in \mathbb{N}$ richtig ist, folgt

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Wir sehen, daß die Folge $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ in der $\ell_p(\mathbb{C})$ -Norm gegen den Grenzwert x konvergiert. Außerdem ist $x - x^{(n)} \in \ell_p(\mathbb{C})$ und $x^{(n)} \in \ell_p(\mathbb{C})$. Da $\ell_p(\mathbb{C})$ ein Vektorraum ist, folgt $x \in \ell_p(\mathbb{C})$ und damit die Behauptung.

24. Seien X, Y, Z metrische Räume und sei Y kompakt. Sei $f : X \rightarrow Y$, $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, g injektiv. Zeige:

- (a) Ist $g \circ f$ stetig, so ist f stetig.
- (b) Ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Lösung:

Nach dem Lemma von Tikhonov (Lemma 17.13 der Vorlesung) ist die Funktion $g^{-1} : g(Y) \rightarrow Y$ stetig. Auf Grund der Stetigkeit von g ist der Definitionsbereich $g(Y)$ von g^{-1} kompakt, da auch Y kompakt ist. Dann ist g^{-1} aber sogar gleichmäßig stetig (s. Satz 16.2). Hieraus folgt:

- (a) Ist $g \circ f$ stetig, so ist auch $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ stetig, da die Komposition stetiger Funktionen wieder stetig ist.
- (b) Ist $g \circ f$ gleichmäßig stetig, so ist auch $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ gleichmäßig stetig, da die Komposition gleichmäßig stetiger Funktionen wieder gleichmäßig stetig ist.

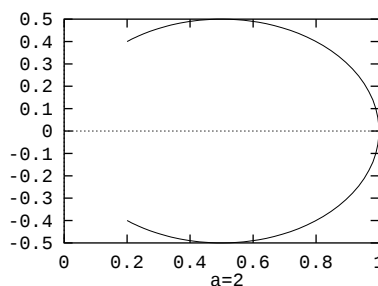
Übungen (7) zur Vorlesung „Analysis II“ mit Lösungen

25. Sei $a > 0$.

Berechne die Länge von

$$\varphi : [-a, a] \ni t \mapsto \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

Lösung:



Es ist

$$\begin{aligned}\varphi'_1(t) &= \frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ \varphi'_2(t) &= \frac{1}{1+t^2} - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}(\varphi'_1(t))^2 &= \frac{4t^2}{(1+t^2)^4} \\ (\varphi'_2(t))^2 &= \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{(1+t^2)^4}.\end{aligned}$$

Für die Länge von φ ergibt sich also

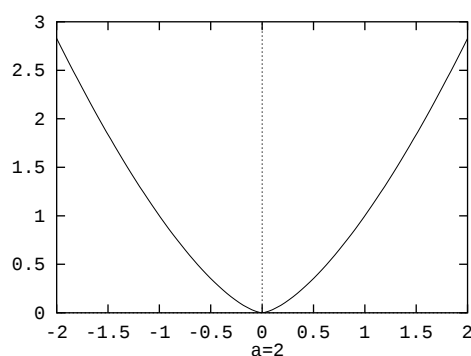
$$\begin{aligned}L(\varphi) &= \int_{-a}^a \sqrt{\frac{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}{(1+t^2)^4}} dt \\ &= \int_{-a}^a \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan a - \arctan(-a) = 2 \arctan a.\end{aligned}$$

26. Sei $a > 0$.

Berechne die Länge von

$$\psi : [-a, a] \ni t \mapsto (t, |t|^{3/2}) \in \mathbb{R}^2.$$

Lösung:



Es ist

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) &= 1 \\ \psi'_2(t) &= \begin{cases} \frac{3}{2}t^{1/2} & , \quad t > 0 \\ -\frac{3}{2}(-t)^{1/2} & , \quad t < 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\psi'_1(t))^2 &= 1 \\ (\psi'_2(t))^2 &= \frac{9}{4}|t|. \end{aligned}$$

Man erhält damit

$$\begin{aligned} L(\psi) &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{9}{4}|t|} \, dt = 2 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} \, dt \\ &= 2 \int_1^{1+\frac{9}{4}a} \frac{4}{9} \sqrt{u} \, du = \frac{8}{9} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^{1+\frac{9}{4}a} \\ &= \frac{16}{27} \left(\left(1 + \frac{9}{4}a \right)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned}$$

27. Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt *bogenweise zusammenhängend*, wenn es zu allen Punkten $x, y \in M$ einen Weg $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit:

$$Bi(\varphi) \subset M, \quad \varphi(0) = x, \quad \varphi(1) = y.$$

Sind der Kreis mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

und die Hyperbel mit der Gleichung

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

bogenweise zusammenhängend?

Hierbei bezeichnet $Bi(\varphi) = \varphi([0, 1])$ das *Bild* von φ im $\mathbb{R}^n$, $Bi(\varphi) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0, 1] : \varphi(t) = x \right\}$.

Lösung:

(a) Kreis:

- i. Zunächst wird gezeigt, daß durch

$$\varphi : [0, 2\pi) \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in K = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

ein Jordan-Weg erklärt wird mit zugehöriger Kurve $\Gamma_\varphi = K$. φ ist offensichtlich stetig. Sei nun $\varphi(t) = \varphi(s)$; o.B.d.A. $t \geq s$. D.h. $\cos t = \cos s$, $\sin t = \sin s$.

$$\Rightarrow \cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s = 1$$

also $t - s = 0$ da $t - s \in [0, 2\pi)$.

- ii. Nach obiger Überlegung gilt:

$$\forall (x_i, y_i) \in K, i = 1, 2 \exists! a_i \in [0, 2\pi) : \varphi(a_i) = (x_i, y_i), i = 1, 2.$$

Setze $a = a_1$, $b = a_2 - a_1$ und $\gamma(t) := (\cos(a + bt), \sin(a + bt))$. Dann ist γ ein Weg, $\Gamma_\gamma \subset K$ und

$$\gamma(0) = \varphi(a) = (x_1, y_1), \quad \gamma(1) = \varphi(a+b) = \varphi(a_2) = (x_2, y_2)$$

(b) Hyperbel: Die Hyperbel H besteht aus den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$x = \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Für alle diese Punkte gilt also $|x| \geq 1$. Betrachte nun die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$, die beide auf der Hyperbel liegen. Ein stetiger Weg γ mit $\gamma(0) = (-1, 0)$ und $\gamma(1) = (1, 0)$ ist insbesondere komponentenweise stetig und die erste Komponentenfunktion γ_1 erfüllt $\gamma_1(0) = -1$ und $\gamma_1(1) = 1$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $\gamma_1(t_0) = 0$. Dann ist aber $\gamma(t_0) \notin H$, denn $|\gamma_1(t_0)| < 1$. Es kann also keinen stetigen Weg γ mit $\gamma(0) = (-1, 0)$, $\gamma(1) = (1, 0)$ und $\Gamma_\gamma \subset H$ geben.

28. Zeige mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 27:

Es gibt keine stetige, bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(*Hinweis:* Betrachte Mengen $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$, $z \in \mathbb{R}^2$).

Lösung:

Angenommen, es gibt eine stetige, bijektive Abbildung f von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Dann ist $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. Nach Aufgabe 21 bildet f bogenweise zusammenhängende Mengen auf bogenweise zusammenhängende Mengen ab. Betrachte nun die bogenweise zusammenhängende Menge $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Da f bijektiv ist, gilt mit $a = f(0, 0) \in \mathbb{R}$ gerade $f(M) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ist jedoch nicht bogenweise zusammenhängend (siehe unten), also erhalten wir einen Widerspruch. Es gibt also keine stetige, bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Menge $A = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ nicht bogenweise zusammenhängend ist. Seien dazu $b, c \in A$ mit $b < a < c$. Wäre A bogenweise zusammenhängend, so gäbe es einen Weg $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(0) = b$, $\varphi(1) = c$ und $\varphi([0, 1]) \subset A$. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es dann aber ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $\varphi(t_0) = a \notin A \Rightarrow \varphi([0, 1]) \not\subset A$, was einen Widerspruch darstellt.

Übungen (8)
zur Vorlesung „Analysis II“
mit Lösungen

29. Sei $\|\cdot\|$ eine der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$.

Sei $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 4\}$. Zeige:

- (a) $\alpha := \inf \{\|v\| \mid v \in K\} \leq 4$.
- (b) Es gibt ein $u \in K$ mit $\|u\| = \alpha$.
- (c) Berechne ein u mit $\|u\| = \alpha$.

Lösung:

Die Menge K läßt sich auch schreiben als die Menge

$$\{(x, x-4) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Wähle $v = (4, 0) \in K$. Dann ist:

$$\|v\|_\infty = \max\{|4|, |0|\} = 4,$$

$$\|v\|_1 = |4| + |0| = 4,$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4.$$

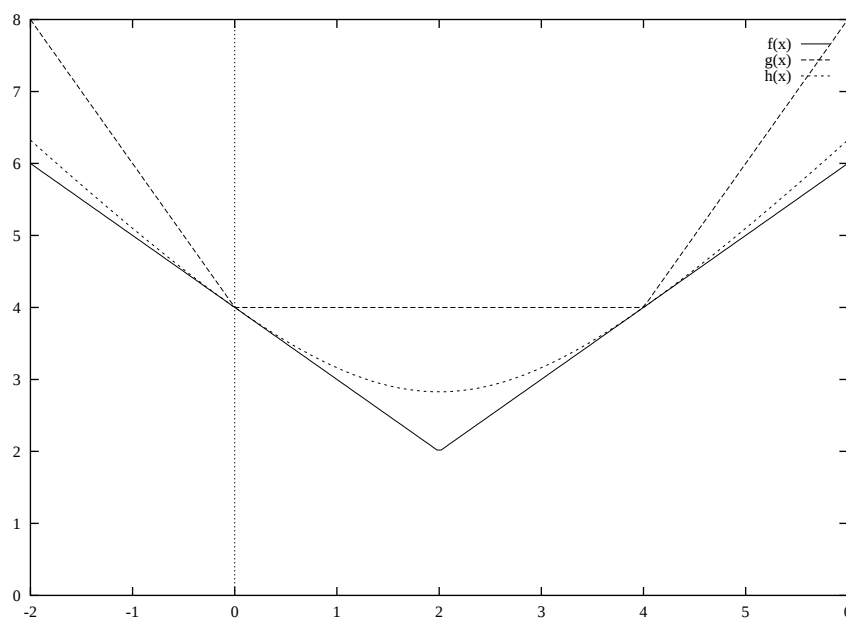
Dann muß aber für das Infimum gelten:

$$\inf \{\|v\| \mid v \in K\} \leq 4.$$

- (b) Allgemein erhalten wir für die Normen von Elementen aus K :

$$\begin{aligned} f(x) &= \|(x, x-4)\|_\infty = \max\{|x|, |x-4|\} \\ &= \begin{cases} \max\{(-x), (-x+4)\} = 4-x, & x \leq 0, \\ \max\{x, (-x+4)\} = \begin{cases} 4-x, & 0 < x \leq 2, \\ x, & 2 < x < 4, \end{cases} & 0 < x < 4, \\ \max\{x, x-4\} = x, & 4 \leq x. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \|(x, x-4)\|_1 = |x| + |x-4| \\
&= \begin{cases} -x + (-x+4) = 4-2x, & x \leq 0, \\ x + (-x+4) = 4, & 0 < x < 4, \\ x + x-4 = 2x-4, & 4 \leq x. \end{cases} \\
h(x) &= \|(x, x-4)\|_2 = \sqrt{x^2 + (x-4)^2} \\
&= (2x^2 - 8x + 16)^{1/2} = (2((x-2)^2 + 4))^{1/2}.
\end{aligned}$$



Da alle drei Funktionen ihr Minimum auf dem kompakten Intervall $[-1, 5]$ annehmen, existieren auf Grund der Stetigkeit der Funktionen Elemente $u \in K$, bei denen der minimale Abstand zum Nullpunkt angenommen wird.

- (c) Wie man aus der Darstellung der Funktionen sofort entnimmt, wird das jeweilige Minimum im Punkt $(2, -2)$ angenommen. Im Fall der Maximum-Norm ist dieser Minimalpunkt nicht eindeutig.

$$30. \text{ Sei } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \longmapsto \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

- (a) Ist f stetig in $x^0 := (0, 0)$?
- (b) Zeige: f ist konstant auf jeder Geraden durch den Nullpunkt (ohne den Nullpunkt selbst), und es gilt:

$$f(\mathbb{R}^2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

- (c) Wie sehen die „Niveaulinien“

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = c \right\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

aus?

Lösung:

- (a) f ist nicht stetig in $(0, 0)$. Betrachte zum Beispiel die Nullfolge $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Es ist

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

- (b) Wir betrachten zunächst Geraden durch den Nullpunkt der Form

$$x_2 = m \cdot x_1,$$

wobei m die Steigung der Geraden angibt. Die Punkte der Geraden sind dann durch (x_1, mx_1) gegeben, und wir erhalten für $x_1 \neq 0$:

$$f(x_1, mx_1) = \frac{mx_1^2}{x_1^2 + m^2 x_1^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Für die Gerade, die durch $x_1 = 0$ gegeben ist, gilt:

$$f(0, x_2) = 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion ist also konstant auf allen Geraden durch den Ursprung (, wenn man den Ursprung selbst ausschließt). Außerdem gilt

$$|f(x_1, x_2)| = \left| \frac{x_1 \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

da $|x_1 \cdot x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ (vgl. Lemma 17.1(b) der Vorlesung mit $a = x_1^2, b = x_2^2, \alpha = \beta = \frac{1}{2}$). Damit haben wir gezeigt, daß

$$f(\mathbb{R}) \subset [-1/2, 1/2].$$

Daß jeder Wert in diesem Intervall wirklich angenommen wird, d.h. f surjektiv ist, zeigen wir in Aufgabenteil (c).

(c) **1. Fall:** $c \notin [-1/2, 1/2]$

In diesem Fall sind die Niveaulinien leer.

2. Fall: $c \in [-1/2, 1/2]$

In Aufgabenteil (b) haben wir gezeigt, daß die Gerade(n) durch den Ursprung (den Ursprung ausgenommen), deren Steigung m für $c \neq 0$ die Bedingung

$$c = \frac{m}{1+m^2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2c} \left(1 \pm \sqrt{1-4c^2} \right)$$

erfüllt, in der Menge der Niveaulinien zum Wert c liegt.

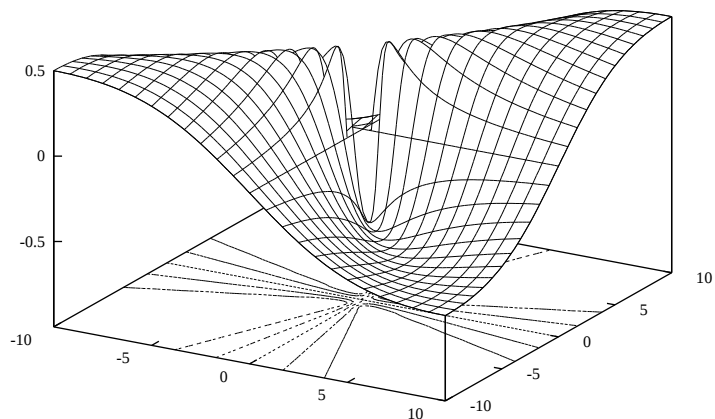
Für $c = 0$ liegen die Geraden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ in der Menge der Niveaulinien. Wir müssen nun noch nachrechnen, daß dadurch die Mengen der Niveaulinien bereits vollständig beschrieben werden.

Man rechnet leicht nach, daß für $c \neq 0$ und $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ gilt:

$$f(x_1, x_2) = c \Leftrightarrow x_1 = \underbrace{\frac{1}{2c} \left(1 \pm \sqrt{1-4c^2} \right)}_{=m} \cdot x_2,$$

also genau dann, wenn (x_1, x_2) auf einer der oben beschriebenen Geraden liegt.

Der Fall $c = 0$ impliziert $x_1 \cdot x_2 = 0$. Diese Bedingung wird nur auf den Geraden $x_1 = 0, x_2 = 0$ erfüllt.



31. Sei $m_n : \mathbb{R} \ni t \mapsto t^n \in \mathbb{R}$ das Monom n -ten Grades, $n \in \mathbb{N}_0$, sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum über $\mathbb{R}$, der von $m_0, \dots, m_n$ aufgespannt wird, $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{P}_n$. Zeige:

X ist Vektorraum über $\mathbb{R}$ und durch

$$\|p\| := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|, \quad \text{falls } p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \quad t \in \mathbb{R},$$

wird eine Norm auf X definiert.

Lösung:

- (a) X ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. (Nachrechnen!)

Man nutzt hier aus, daß zu $p \in X$ bzw. zu $p, q \in X$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert, so daß $p \in \mathcal{P}_m$ bzw. $p, q \in \mathcal{P}_m$ und daß $\mathcal{P}_m$ ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist.

- (b) Die Abbildung $\|\cdot\|$ definiert eine Norm auf X , denn es gilt:

Definitheit: Sei $p \in X$. Es gilt sicherlich:

$$\|p\| = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| \geq 0.$$

Außerdem erhält man

$$\|p\| = 0 \Leftrightarrow \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, i = 1, \dots, n \Leftrightarrow p = 0.$$

Homogenität: Sei $p \in X, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist:

$$\|\alpha p\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\alpha a_i| = |\alpha| \|p\|.$$

Dreiecksungleichung: Seien $p, q \in X$. Es ist:

$$\begin{aligned} \|p + q\| &= \max_{0 \leq i \leq n} |a_i + b_i| \leq \max_{0 \leq i \leq n} (|a_i| + |b_i|) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| + \max_{0 \leq j \leq n} |b_j| \\ &= \|p\| + \|q\|. \end{aligned}$$

32. Zeige mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 31:

(a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X, \\ Tp(t) &:= a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} t^i, \quad \text{falls } p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \end{aligned}$$

ist linear und stetig.

(b) T ist bijektiv.

(c) $T^{-1} : X \longrightarrow X$ ist nicht stetig.

Hinweis: Sie können in (b) benutzen, daß $\{1, t, \dots, t^n\}$ ein System linear unabhängiger Funktionen ist.

Lösung:

(a) **Linearität:** Es gilt für $p, q \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= (\alpha a_0 + \beta b_0)m_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha a_i + \beta b_i}{i} m_i \\ &= \alpha \left(a_0 m_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} m_i \right) + \beta \left(b_0 m_0 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{i} m_i \right) \\ &= \alpha Tp + \beta Tq. \end{aligned}$$

Stetigkeit: Es ist:

$$\|Tp - Tq\| = \max \left\{ |a_0 - b_0|, \left| \frac{a_i - b_i}{i} \right|, i = 1, \dots, n \right\}$$

$$\leq \max_{0 \leq i \leq n} |a_i - b_i| = \|p - q\|.$$

Daraus folgt aber sofort die Stetigkeit von T .

(b) Wir zeigen nun, daß T bijektiv ist.

Injektivität: Da T linear ist, genügt es zu zeigen, daß $Tp = 0$ bereits $p = 0$ impliziert. Sei also $p \in X$ mit $Tp = 0$ vorgegeben, d.h.

$$a_0 m_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} m_i = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Monome $m_i, i = 0, \dots, n$, folgt für die Koeffizienten

$$a_0 = 0, \frac{a_i}{i} = 0, i = 1, \dots, n \Rightarrow a_i = 0, i = 0, \dots, n.$$

Dann ist aber auch $p = 0$.

Surjektivität: Sei $p \in X$ vorgegeben. Gesucht ist ein $q \in X$ mit $Tq = p$.

Wählen wir

$$q = a_0 m_0 + \sum_{i=1}^n i a_i m_i,$$

dann ist $Tq = p$.

(c) Da T bijektiv ist, existiert T^{-1} . Nach (b) gilt:

$$T^{-1}p = a_0 m_0 + \sum_{i=1}^n i a_i m_i.$$

Wir wählen nun die Folge von Polynomen

$$p_n = m_n.$$

Dann gilt $\|p_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber:

$$\|T^{-1}p_n\| = n.$$

T^{-1} ist also unbeschränkt und somit nicht stetig.

Alternativer Lösungsvorschlag:

Nach der ε - δ Definition der Stetigkeit ist zu zeigen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \exists p_0 \in X : \exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \exists p_n \in X : \\ \|p_0 - p_n\| < \frac{1}{n} \wedge \|T^{-1}p_0 - T^{-1}p_n\| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir wählen $p_0 = 0$, $\varepsilon = 1/4$ und $p_n = \frac{1}{n+1} m_n$. Dann ist

$$\|p_n\| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

aber aus $T^{-1}p_n = \frac{n}{n+1}m_n$ folgt

$$\|T^{-1}p_n\| = \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Übungen (9)
zur Vorlesung „Analysis II“
mit Lösungen

33. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

- (a) Berechne $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) Sind $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig?

Lösung:

- (a) Partielle Ableitungen für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{x_1^4 + 3x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{-x_1^3 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen in $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) &= \lim_{x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_1, 0) - f(0, 0)}{x_1} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) &= \lim_{x_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, x_2) - f(0, 0)}{x_2} = 0 \end{aligned}$$

- (b) Zur Stetigkeit der Partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, x_2) &= 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) \quad (x_2 \neq 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(1/n, 1/n) &= \frac{-2/n^4}{4/n^4} = -1/2 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) \end{aligned}$$

34. Es gelten die Bezeichnungen von Aufgabe 33.

- (a) Existiert die Richtungsableitung von f in $(0, 0)$ in Richtung $e := \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$?
- (b) Zeige, daß f in $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Lösung:

(a) Diese Richtungsableitung existiert, denn es gilt

$$\frac{f(h e)}{h \|e\|} = \frac{1}{h \|e\|} \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^3}{h^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad h \neq 0,$$

denn $\|e\| = \|e\|_2 = 1$. Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial e} f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h e)}{h \|e\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Wir nehmen an, daß f in $(0,0)$ differenzierbar ist. Wegen $f(0,0) = 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(h) &= \langle \text{grad } f(0), h \rangle + r(h) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} &= 0. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\text{grad } f(0,0) = (1,0)$ (siehe Aufgabe 33) ist aber

$$r(h) = f(h) - \langle \text{grad } f(0), h \rangle = \frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2} - h_1,$$

mit $h = (h_1, h_2)$. Setze nun $h^* = (h_1, h_1)$. Dann gilt

$$\lim_{h^* \rightarrow 0} \frac{r(h^*)}{\|h^*\|} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} -\frac{h_1}{2 \|(h_1, h_1)\|} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|(1,1)\|} \neq 0$$

und wir erhalten einen Widerspruch.

Einfacherer Beweis: Wäre f in $(0,0)$ differenzierbar, so müßte für alle Richtungen $u \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\frac{\partial}{\partial u} f(0) = \langle \text{grad } f(0), u \rangle.$$

35. Berechne die Gradienten der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) &:=& \quad x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) &:=& \quad e^{x_1} \cos x_2 + \ln(1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) &= 3x_1^2 - 3x_2^2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) &= -6x_1x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left(3(x_1^2 - x_2^2), -6x_1x_2 \right).$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2) &= e^{x_1} \cos x_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2) &= -e^{x_1} \sin x_2 + \frac{2x_2}{1+x_2^2} \\ \Rightarrow \operatorname{grad} g(x_1, x_2) &= \left(e^{x_1} \cos x_2, -e^{x_1} \sin x_2 + \frac{2x_2}{1+x_2^2} \right). \end{aligned}$$

36. Die stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

Die Niveaulinien sind

$$N_\omega := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \omega \right\}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Sei $\varphi: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbarer Weg mit $Bi(\varphi) \subset N_\omega$ für ein $\omega \in \mathbb{R}$.

Zeige:

$$\langle \operatorname{grad} f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle = 0, \quad t \in (a, b).$$

(Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien!)

Lösung:

Betrachte die Funktion

$$h := (f \circ \varphi): [a, b] \ni t \mapsto f(\varphi(t)) \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für alle $t \in [a, b]$:

$$h(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\underbrace{\varphi(t)}_{\in N_\omega}) = \omega.$$

und damit ist h diffbar in (a, b) mit Ableitung

$$h'(t) = 0 \quad \forall t \in (a, b).$$

Andererseits gilt für die Ableitung von h nach der Kettenregel:

$$h'(t) = Df(\varphi(t)) \circ D\varphi(t) = \langle \operatorname{grad} f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle$$

und somit die Behauptung.

Übungen (10)
zur Vorlesung „Analysis II“
mit Lösungen

37. (a) Sind $\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ offen bzw. abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$?

(b) Eine abgeschlossene Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ heißt *diskret*, wenn gilt:

$$\forall x \in M \exists r > 0 : K(x, r) \cap M = \{x\}.$$

Zeige: Ist M diskret und beschränkt, so ist M eine endliche Menge.

($\mathbb{R}^n$ sei stets mit der euklidischen Metrik versehen!).

Lösung:

(a) • $\mathbb{Z}^n$ ist nicht offen, da $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ nicht abgeschlossen ist.

Betrachte, um dies einzusehen, z.B. die Folge

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n \ni \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \in \mathbb{Z}^n.$$

• $\mathbb{Z}^n$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, da $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ offen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ mit

$$\begin{aligned} x_i &= [x_i] + (x_i - [x_i]) \\ &= z_i + r_i, \quad z_i \in \mathbb{Z}, r_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(Dabei ist $[\cdot]$ die Gauß-Klammer.)

Dann liegt $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ und x in dem Würfel mit den Ecken $z \pm e_i, i = 1, \dots, n$, wobei $e_i, i = 1, \dots, n$, die kanonischen Einheitsvektoren sind. Da nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ ist, gilt ($e_0 = 0$):

$$r_0 := \min_{i=0, \dots, n} \|x - (z \pm e_i)\| > 0.$$

Dann gilt für alle $y \in K_{\|\cdot\|}(x, r_0/2)$ und alle $\tilde{z} \in \{z \pm e_i | i = 0, \dots, n\}$:

$$r_0 \leq \|x - \tilde{z}\| \leq \|x - y\| + \|y - \tilde{z}\| \leq r_0/2 + \|y - \tilde{z}\|$$

$$\Rightarrow \|y - \tilde{z}\| \geq r_0/2 > 0$$

$$\Rightarrow K_{\|\cdot\|}(x, r_0/2) \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n.$$

- $\mathbb{Q}^n$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Um dies einzusehen, betrachtet man z.B. die Folge

$$\mathbb{Q} \ni q_\ell := \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} e \notin \mathbb{Q}.$$

für $n = 1$ oder allgemeiner

$$\mathbb{Q}^n \ni (q_\ell, \dots, q_\ell) \rightarrow (e, \dots, e) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n \quad (\ell \rightarrow \infty).$$

(Vgl. dazu auch Analysis I, 7.3 und Aufgabe 36(b).)

Wenn $\mathbb{Q}^n$ nicht abgeschlossen ist, kann $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ aber auch nicht offen sein.

- $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ ist aber auch nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, da z.B.

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n \ni \left(\frac{\sqrt{2}}{n}, \dots, \frac{\sqrt{2}}{n} \right) \rightarrow 0 \in \mathbb{Q}.$$

Also ist $\mathbb{Q}^n$ nicht offen in $\mathbb{R}^n$.

- (b) Angenommen M ist nicht endlich. Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $x_{n+1} \notin \{x_j, j = 1, \dots, n\} \forall n \in \mathbb{N}$. Da M abgeschlossen und beschränkt ist, ist M als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auch kompakt. Es existiert also eine konvergente Teilfolge $\{x_{n'}\}_{n' \in \mathbb{N}'}, \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ mit Grenzwert $x \in M$. Dann muß aber gelten:

$$\forall r > 0 : \exists N' \in \mathbb{N}' : \forall n' \geq N' : \|x - x_{n'}\| < r, x_{n'} \neq x,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung „ M ist diskret“ steht, da in jeder Umgebung von x noch ein Element $x_{n'} \in M, x_{n'} \neq x$ liegt.

M muß also endlich sein.

38. Sei X normierter Raum und sei $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ($[a, b] \times X$ ist metrischer Raum bzgl. $d((t, x), (s, u)) := |t - s| + \|x - u\|_X$).

Zeige: Die Abbildung

$$g : X \ni x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt \in \mathbb{R}^m$$

ist stetig.

Lösung:

Wir betrachten zunächst ein festes $x \in X$. Da f stetig ist, ist auch die Funktion

$$h : [a, b] \ni t \mapsto f(t, x) \in \mathbb{R}^n$$

stetig und damit integrierbar. Die Definition von g ist also sinnvoll.

Sei $x_0 \in X$, und $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. Für ein beliebiges $t_0 \in [a, b]$ folgt dann aus der Stetigkeit von f :

$$(*) \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, x_0) > 0 \forall (t, x) \in [a, b] \times X : \\ d((t, x), (t_0, x_0)) < \delta \Rightarrow \|f(t, x) - f(t_0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Mit diesen $\delta(t_0) = \delta(\varepsilon, t_0, x_0)$ erhalten wir eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a, b]$ mit Kugeln $K_{\delta(t_0)/2}(t_0), t_0 \in [a, b]$, aus der sich eine endliche offene Überdeckung des Intervalls auswählen läßt mit

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^n K_{\delta_j/2}(t_j) \cap [a, b], \quad \delta_j = \delta(t_j).$$

Wählen wir nun

$$\delta(\varepsilon, x_0) := \min_{j=1, \dots, n} \{\delta_j/2\},$$

dann hängt dieses $\delta := \delta(\varepsilon, x_0)$ nur von ε und x_0 ab, und es gilt für alle $x \in X$ mit $\|x - x_0\|_X < \delta$ und für alle $t \in [a, b]$:

$$\|f(t, x) - f(t, x_0)\|_X < \frac{\varepsilon}{(b-a)},$$

denn zu jedem $t \in [a, b]$ existiert ein $t_j, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|t - t_j| < \delta_j/2$, und somit gilt:

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, x_0)\|_X &\leq \|f(t, x) - f(t_j, x_0)\|_X + \|f(t_j, x_0) - f(t, x_0)\|_X \\ &< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)}. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt aus der Stetigkeit von f (Gleichung $(*)$ mit t_j statt t_0) und gilt, da

$$d((t, x), (t_j, x_0)) = |t - t_j| + \|x - x_0\|_X < \frac{\delta_j}{2} + \frac{\delta(x_0)}{2} \leq \delta_j$$

und

$$d((t_j, x_0), (t, x_0)) = |t_j - t| < \delta_j/2 < \delta_j.$$

Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(x_0)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \int_a^b f(t, x) dt - \int_a^b f(t, x_0) dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \left\| \int_a^b f(t, x) - f(t, x_0) dt \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\stackrel{\text{Satz 18.16}}{\leq} \int_a^b \|f(t, x) - f(t, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_a^b dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

und somit die Stetigkeit von g in x_0 .

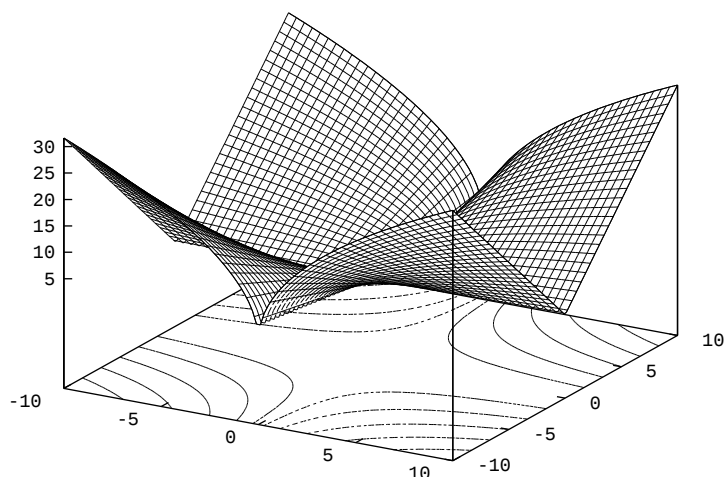
39. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := (|x|y^2)^{1/2}$.

- (a) Zeige: f ist in $(0, 0)$ differenzierbar.
- (b) Ist f in $(0, 1)$ und $(1, 0)$ differenzierbar?
- (c) Man gebe eine Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ an mit

$$x_n \cdot y_n > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lim_n x_n = \lim_n y_n = 0, \quad \lim_n \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

Lösung:

Die hier betrachtete Funktion liefert ein Beispiel für eine Funktion, die an der Stelle $(0, 0)$ differenzierbar ist (vgl. (a)), deren partielle Ableitung nach x an dieser Stelle aber nicht stetig ist (vgl. (c)). Es liegt auch keine globale Differenzierbarkeit vor (vgl. (b)).



(a) Um zu zeigen, daß f in $(0,0)$ differenzierbar ist, muß man die Beziehung

$$f(x, y) = f(0, 0) + \langle \text{grad } f(0, 0), (x, y) \rangle + r(x, y)$$

mit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

nachweisen. Betrachtet man die Differenzenquotienten zur Berechnung der partiellen Ableitungen in $(0,0)$, so sieht man sofort, daß gilt

$$\text{grad } f(0,0) = (0,0).$$

Also müssen wir zeigen, daß

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y)}{\|(x, y)\|_2} &= \frac{(|x|y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \frac{|x|^{1/2}}{\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^{1/2}} \rightarrow 0, \quad ((x, y) \rightarrow 0). \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten die Differenzenquotienten. Für $x > 0$ gilt

$$\frac{f(x, 1) - f(0, 1)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty (x \rightarrow 0),$$

und

$$\frac{f(1, y) - f(1, 0)}{y} = \frac{|y|}{y} = \begin{cases} +1 & \text{für } y > 0 \\ -1 & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Also ist f in beiden Punkten nicht partiell differenzierbar und damit auch nicht total differenzierbar.

(c) Setze $(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0). \end{aligned}$$

40. Berechnen Sie sämtliche partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 von $f(x, y) = x^y$ und diskutieren Sie deren Stetigkeit.

Lösung:

Es gilt für $x \in \mathbb{R}, x > 0$ und beliebige $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= yx^{y-1} \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \ln x \cdot x^y, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= y(y-1)x^{y-2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= (\ln x)^2 x^y, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = x^{y-1} + y \ln x \cdot x^{y-1}. \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen existieren und sind im angegebenen Definitionsbereich stetig.

Übungen (11)

zur Vorlesung „Analysis II“

mit Lösungen

41. Sei X ein Banachraum, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $T : A \longrightarrow A$ *expandierend*, d. h. es gibt $q > 1$ mit

$$\|T(x) - T(y)\| \geq q\|x - y\|, \quad x, y \in A.$$

Sei $B := T(A)$ abgeschlossen. Zeige die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

- (a) T hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt $x \in A$ mit $T(x) = x$.
- (b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(A) \neq \emptyset$ ($T^1 := T$, $T^{n+1} := T \circ T^n$).
- (c) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_n \|x_n - T(x_n)\| = 0$.

Lösung:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $x \in A$ Fixpunkt von T , dann gilt $x \in T^n(A) \forall n \in \mathbb{N}$ und damit die Behauptung.

(b) $\Rightarrow$ (c): Aus T expandierend folgt offensichtlich T injektiv und damit $T : A \rightarrow T(A)$ bijektiv.

Sei $x \in \bigcap T^n(A) \Rightarrow x \in T^n(A) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_n \in A$ mit $x = T^n(x_n)$.

Damit folgt

$$T^n(x_n) = T^{n+1}(x_{n+1}) \iff T(T^{n-1}x_n) = T(T^n x_{n+1}) \Rightarrow T^{n-1}(x_n) = T^n(x_{n+1}),$$

da T injektiv ist. Durch sukzessive Anwendung dieses Arguments folgt

$$x_n = T x_{n+1} \Leftrightarrow T^{-1} x_n = x_{n+1}.$$

Aus der letzten Äquivalenz und der Expansionseigenschaft folgt

$$\|x_{n+1} - T x_{n+1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|T^{-1}x_n - x_n\| \leq \frac{1}{q}\|x_n - Tx_n\| \\
&= \|T^{-1}x_{n-1} - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{q^2}\|x_{n-1} - Tx_{n-1}\| \\
&= \cdots \leq \frac{1}{q^n}\|x_1 - Tx_1\|,
\end{aligned}$$

also

$$\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \leq \frac{1}{q^n}\|x_1 - Tx_1\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

da $q > 1$.

(c)⇒(a): Wir zeigen, daß $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{1}{q}\|Tx_n - Tx_m\| \\
&\leq \frac{1}{q}(\|Tx_n - x_n\| + \|x_n - x_m\| + \|x_m - Tx_m\|)
\end{aligned}$$

und diese Abschätzung liefert

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{q-1}(\|Tx_n - x_n\| + \|x_m - Tx_m\|) \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

Da X ein Banachraum ist, konvergiert die Cauchy-Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein Element $x \in X$.

Aus der Ungleichung

$$\|x - Tx_m\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - Tx_m\| \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

und der Abgeschlossenheit von $T(A)$ folgt $x \in T(A)$.

Wir können daher $\|T^{-1}x - x\|$ betrachten und die Expansionseigenschaft ausnutzen und erhalten

$$\begin{aligned}
&\|T^{-1}x - x\| \\
&\leq \|T^{-1}x - T^{-1}x_n\| + \|T^{-1}x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \frac{1}{q}\|x - x_n\| + \frac{1}{q}\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Damit gilt $T^{-1}x = x \iff x = Tx$. x ist also ein Fixpunkt von T .

42. Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. In einem Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^3$ gelte:

$$\prod_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \neq 0.$$

g_i sei eine lokale Auflösung der Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = f(x^0)$ nach x_i , $i = 1, 2, 3$.

Zeige:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = -1,$$

wobei $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ ist.

Lösung:

g_1 ist eine lokale Auflösung der Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x^0),$$

d.h. für alle $x = (x_1, x_2, x_3)$ in einer Umgebung von $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ gilt

$$f(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3) = f(x^0).$$

Differentiation dieser Gleichung nach x_2 ergibt nach der Kettenregel

$$f_{x_1}(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_2, x_3) + f_{x_2}(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3) = 0.$$

Wegen $g_1(x_2^0, x_3^0) = x_1^0$ und $f_{x_1}(x^0) \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_2^0, x_3^0) = -\frac{f_{x_2}(x^0)}{f_{x_1}(x^0)}.$$

Völlig analog beweist man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} g_2(x_1^0, x_3^0) &= -\frac{f_{x_3}(x^0)}{f_{x_2}(x^0)}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_3(x_1^0, x_2^0) &= -\frac{f_{x_1}(x^0)}{f_{x_3}(x^0)}. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun alle drei Gleichungen miteinander, so ergibt sich gerade

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = -1$$

43. Man zeige, daß die Gleichung

$$y^2 + xz + z^2 - e^{xz} - 1 = 0$$

in einer Umgebung von $(x, y, z) := (0, -1, 1)$ eindeutig nach z durch eine Abbildung g auflösbar ist und berechne die Taylorentwicklung von g im Punkt $(0, -1)$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung.

Lösung:

Wir setzen

$$F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^{xz} - 1.$$

Dann ist die Funktion F beliebig oft stetig differenzierbar mit den partiellen Ableitungen (bis zur Ordnung 2):

$$F_x(x, y, z) = z - ze^{xz},$$

$$F_y(x, y, z) = 2y,$$

$$F_z(x, y, z) = x + 2z - xe^{xz},$$

$$F_{xx}(x, y, z) = -z^2 e^{xz},$$

$$F_{xy}(x, y, z) = 0,$$

$$F_{xz}(x, y, z) = 1 - e^{xz} - ze^{xz},$$

$$F_{yy}(x, y, z) = 2,$$

$$F_{yz}(x, y, z) = 0,$$

$$F_{zz}(x, y, z) = 2 - x^2 e^{xz}.$$

Es gilt darüber hinaus:

$$F(0, -1, 1) = 0$$

und

$$F_z(0, -1, 1) = 2.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren dann aber eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, -1)$ und eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von 1 und eine beliebig oft stetig diffbare Funktion $g : U \rightarrow V$ mit den Eigenschaften:

$$g(0, -1) = 1 \text{ und } F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Für die partiellen Ableitungen (bis zur Ordnung 2) erhält man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(F(x, y, g(x, y))) &= F_x + F_z g_x, \\ \frac{\partial}{\partial y}(F(x, y, g(x, y))) &= F_y + F_z g_y, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F(x, y, g(x, y))) &= F_{xx} + F_{xz} g_x + \{F_{zx} + F_{zz} g_x\} g_x + F_z g_{xx}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F(x, y, g(x, y))) &= F_{yx} + F_{yz} g_x + \{F_{zx} + F_{zz} g_x\} g_y + F_z g_{yx}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F(x, y, g(x, y))) &= F_{yy} + F_{yz} g_y + \{F_{zy} + F_{zz} g_y\} g_y + F_z g_{yy}. \end{aligned}$$

Dabei ist als Argument der partiellen Ableitungen von F jeweils $(x, y, g(x, y))$ und als Argument der partiellen Ableitungen von g jeweils (x, y) mit $(x, y) \in U$ zu setzen.

Die linken Seiten der Gleichungen sind aber nun jeweils gleich Null, da $F(x, y, g(x, y))$ in ganz U verschwindet, und damit erhält man durch Einsetzen von $(x, y) = (0, -1)$ (unter Berücksichtigung von $g(0, -1) = 1$) und Auflösen der Gleichungen nach den partiellen Ableitungen von g die Werte dieser partiellen Ableitungen im Punkt $(0, -1)$. Es ist:

$$\begin{aligned} F_x(0, -1, 1) &= 0, \\ F_y(0, -1, 1) &= -2, \\ F_z(0, -1, 1) &= 2, \\ F_{xx}(0, -1, 1) &= -1, \end{aligned}$$

$$F_{xy}(0, -1, 1) = 0,$$

$$F_{xz}(0, -1, 1) = 0,$$

$$F_{yy}(0, -1, 1) = 2,$$

$$F_{yz}(0, -1, 1) = 0,$$

$$F_{zz}(0, -1, 1) = 2$$

und somit

$$g_x(0, -1) = 0,$$

$$g_y(0, -1) = 1,$$

$$g_{xx}(0, -1) = 1/2,$$

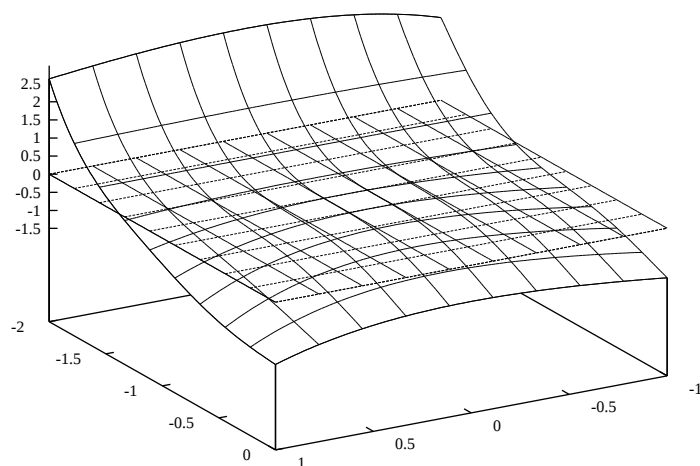
$$g_{yx}(0, -1) = 0,$$

$$g_{yy}(0, -1) = -2.$$

Für das Taylor-Polynom zweiten Grades von g im Punkte $(0, -1)$ erhalten wir also:

$$\begin{aligned} P_{2,g,(0,-1)}(x, y) &= 1 + (x - 0) \cdot 0 + (y - (-1)) \cdot 1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (x - 0)^2 \cdot 1/2 + 2(x - 0)(y - (-1)) \cdot 0 + (y - (-1))^2 \cdot (-2) \right\} \\ &= 1 + (y + 1) + 1/4 \cdot x^2 - (y + 1)^2. \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung erhält man, indem man $f(x, y) = F(x, y, P_{2,g,(0,-1)}(x, y))$ und die Nullebene darstellt. Dabei faßt man das Taylor-Polynom von g als Näherung für g auf. Man sieht, daß f in einer Umgebung der Stelle $(0, -1)$ nahezu Null ist.



44. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$, A eine quadratische (n, n) -Matrix und

$$\|A\|_{\text{nat}} := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Man zeige:

- (a) Durch $\|A\|_{\text{nat}}$ wird eine Matrizenorm erklärt ($\|A\|_{\text{nat}}$ heißt die durch $\|\cdot\|$ induzierte *natürliche Matrizenorm*).
- (b) Für jede invertierbare Matrix A gilt

$$\text{cond}(A) := \|A\|_{\text{nat}} \|A^{-1}\|_{\text{nat}} = \frac{\sup \left(\|Ax\| \mid \|x\| = 1 \right)}{\inf \left(\|Ax\| \mid \|x\| = 1 \right)}.$$

Lösung:

Es gilt (siehe Teil (b)):

$$\|A\|_{\text{nat}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Da $\|\cdot\|$ und A stetige Abbildungen sind, ist auch $\phi(x) := \|Ax\|$ eine stetige Abbildung und als solche auf kompakten Teilmengen beschränkt. Damit ist

$$0 < \|A\|_{nat} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

Für die Abbildung $\|\cdot\|_{nat}$ gilt ($x \neq 0$):

$$\|Ax\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \|x\| \leq \left(\sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right) \cdot \|x\| = \|A\|_{nat} \cdot \|x\|.$$

Diese Ungleichung gilt natürlich auch für $x = 0$.

Wenn wir also zeigen können, daß $\|\cdot\|_{nat}$ eine Matrizenorm definiert, dann ist diese eine mit $\|\cdot\|$ verträgliche Matrizenorm.

(a) i. Definitheit:

$$A = 0 \Rightarrow \forall x \in X : Ax = 0 \Rightarrow \|A\|_{nat} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0.$$

$$\begin{aligned} \|A\|_{nat} = 0 &\Rightarrow \forall x \in X : \|Ax\| \leq \|A\|_{nat} \|x\| = 0 \Rightarrow \forall x \in X : Ax = 0 \\ &\Rightarrow A = 0. \end{aligned}$$

ii. Homogenität:

$$\|\alpha A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(\alpha A)x\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\alpha| \|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \cdot \|A\|_{nat}$$

iii. Dreiecksungleichung:

$$\|A + B\|_{nat} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(A + B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\|_{nat} + \|B\|_{nat}$$

(b) Sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist auf Grund der Injektivität mit $x \neq 0$ auch $Ax \neq 0$. Wir zeigen zunächst:

$$\sup_{x' \neq 0} \frac{\|A^{-1}x'\|}{\|x'\|} = \left(\inf_{y' \neq 0} \frac{\|Ay'\|}{\|y'\|} \right)^{-1}.$$

Sei zunächst $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ beliebig und $y = A^{-1}x$ also $Ay = x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} &= \frac{\|x\|}{\|A^{-1}x\|} = \frac{1}{\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}} \geq \frac{1}{\sup_{x' \neq 0} \frac{\|A^{-1}x'\|}{\|x'\|}} \\ \Rightarrow \inf_{y' \neq 0} \frac{\|Ay'\|}{\|y'\|} &\geq \frac{1}{\sup_{x' \neq 0} \frac{\|A^{-1}x'\|}{\|x'\|}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} &= \frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \frac{1}{\frac{\|Ay\|}{\|y\|}} \leq \frac{1}{\inf_{y' \neq 0} \frac{\|Ay'\|}{\|y'\|}} \\ \Rightarrow \sup_{x' \neq 0} \frac{\|A^{-1}x'\|}{\|x'\|} &\leq \frac{1}{\inf_{y' \neq 0} \frac{\|Ay'\|}{\|y'\|}}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\sup_{x' \neq 0} \frac{\|A^{-1}x'\|}{\|x'\|} = \left(\inf_{y' \neq 0} \frac{\|Ay'\|}{\|y'\|} \right)^{-1}.$$

Wir zeigen nun, daß

$$\sup_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} = \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\|$$

und

$$\inf_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} = \inf_{\|x'\|=1} \|Ax'\|.$$

Es gilt auf Grund der Homogenität der Norm und der Linearität von A für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} &= \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\| \\ \Rightarrow \sup_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} &\leq \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\| \end{aligned}$$

und für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \left\| A \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} \\ \Rightarrow \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\| &\leq \sup_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|}. \end{aligned}$$

und somit die Gleichheit

$$\sup_{x' \neq 0} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} = \sup_{\|x'\|=1} \|Ax'\|.$$

Analog zeigt man die Gleichheit für die Infima.

Nach dem oben Bewiesenen folgt dann aber auch sofort

$$\|A\|_{nat} = \sup \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \}$$

und

$$\|A^{-1}\|_{nat} = \frac{1}{\inf \{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}}$$

und damit die Behauptung über die Darstellung der Konditionszahl $\text{cond}(A)$.

Index

- Abbildung, 2, 30
 - identische, 5, 60
 - inverse, 146
 - kontrahierende, 142
 - lineare, 77
- abgeschlossen, 97, 101–103, 110
- Abgeschlossene Hülle, 101
- Ableitung, 57, 58, 92, 128, 132
 - Fréchet, 141
 - höhere, 65
 - partielle, 125, 126, 133
- Ableitung k -ter Ordnung, 65
- absolut konvergent, 40–42
- Absolutbetrag, 95
- Abstandsfunktion, 95
- abzählbar unendlich, 7, 8
- Addition, 11, 12, 15, 27
- Äquivalenzklasse, 10–12, 14
- Äquivalenzrelation, 10, 14
- affin, 130
- Algebraische Verknüpfungen, 47
- analytisch, 94
- Anfangspunkt, 112
- Anfangswert, 143
- Anfangswertaufgabe, 143, 151
- Anordnung, 11, 15
- Anordnungsaxiom, 22
- archimedisches angeordnet, 18
- Assoziativgesetz, 1, 5, 11, 13, 15
- Auflösbarkeit, 149, 151
- Banachraum, 107, 109
- Basis, 45
- bedingt konvergent, 43
- Berührungspunkt, 68
- beschränkt, 21, 31, 35, 38, 52, 74, 104, 105, 110
 - nach oben, 20
 - nach unten, 21
 - total, 104
- Betrag, 19, 28
- Betragsfunktion, 19, 23, 28, 47, 49
- Beweisverfahren, indirektes, 1
- Bijektion, 7, 8, 43
- bijektiv, 4, 18, 118
- Bild, 3
- Bildbereich, 2
- Binomialkoeffizient, 24, 25
- Binomischer Lehrsatz, 26
- Bisektionsverfahren, 51
- Brennpunkte, 113
- Bruch, 14
 - systematischer, 46
- Cartesisches Produkt, 2
- Cauchy-Folge, 35, 103
- Cauchy-Kriterium
 - für gleichm. Konvergenz, 87
 - für Reihen, 89
- Cauchy-Produkt, 44, 93
- Cauchysches Konvergenzkriterium, 35, 39
- Cosinus, 69
- Cosinus hyperbolicus, 54
- Cosinus-Funktion, 69

- Cotangens hyperbolicus, 54
- Cotangens-Funktion, 70
- Definitheit, 19, 29, 95, 106
- Definitionsbereich, 2
- Dezimalbruch, 45
- Dezimalzahlen, 46
- Diffeomorphismus
 - C^1 -, 146, 148
 - C^r -, 146
- Differentialoperator, 138
- Differentialquotient, 58
- Differentiation, gliedweise, 91
- Differentiationsregeln, 131
- differenzierbar, 58–61, 63–66, 68, 81, 119, 124, 129
 - partiell, 124, 125, 129
 - total, 127, 129
 - vollständig, 127–129
- Differenzierbarkeit, vollständige, 128
- Diskriminante, 152
- Distanzfunktion, 101
- Distributivgesetz, 2, 11, 13, 15
- divergent, 31, 32, 37, 38, 41, 67
- Dreiecksungleichung, 19, 29, 95, 106
- Dualzahlen, 46
- Durchmesser, 104
- Durchschnitt, 1
- Einheit, imaginäre, 27
- Einheitsvektor, 112
- Einselement, 14, 22, 27
- Element
 - inverses, 13
 - neutrales, 13
- Ellipse, 113, 115, 120, 136
- Endpunkt, 112
- Entwicklungspunkt, 66, 67, 91, 92
- Euklidischer Algorithmus, 85
- Eulersche Zahl, 34
- Exponentenbereich, 46
- Exponentialfunktion, 42, 44, 47, 49, 53–55, 61, 65, 66
 - Funktionalgleichung der, 44
- Extremum, 152, 153
 - lokales, 63, 67, 151, 154, 155, 159, 160
 - mit Nebenbedingung, 153
- Exzentrizität, lineare, 113, 114
- Faktorisierung in Primzahlen, 9
- Fakultät, 9
- Fehlerabschätzung, 41, 42
- Feinheit, 80
- Feinheitsmaß, 80
- Fibonacci-Zahlen, 30, 33
- Fixpunkt, 141–143
- Flächeninhalt, 72
- Folge, 30
 - beschränkte, 30, 31, 36
 - Glieder der, 30
 - konstante, 30
- folgenkompakt, 103
- folgenstetig, 100
- Fundamentalsatz der Algebra, 85
- Funktion, 2
 - C^1 -, 129
 - C^k -, 126
 - gerade, 69

- gleichmäßig stetige, 53
- identische, 47, 49
- integrierbare, 78
- konstante, 47, 49
- partielle, 125
- periodische, 71
- rationale, 84
- Signum-, 47
- stetige, 49
- ungerade, 69
- Funktionalmatrix, 130, 146, 157
 - Adjungierte der, 158
- Funktionen, trigonometrische, 69
- g-adische Entwicklung, 45, 46
- g-adische Ziffern, 45
- Ganghöhe, 113
- Ganze Zahlen, 10
- Gaußsche Klammer, 47
- Gebiet, 134
- Genauigkeit, 46
- gleichgradig stetig, 105, 106
- Gleichheit, 1
- gleichmäßig konvergent, 88–91
- gleichmäßig stetig, 52, 53, 104
- Gleitkommazahl, 46
- Gradient, 127, 134
- Graph, 2, 57, 82, 123
- Grenze
 - obere, 21
 - untere, 21
- Grenzwert, 31, 48
- Gruppe, symmetrische, 8
- Häufungspunkt, 57–61
- Häufungswert, 36, 37
- Höldersche Ungleichung, 109
- Halbwertszeit, 55
- Hauptsatz, 82, 135, 143
- Hessematrix, 140, 152, 160
- Hexadezimalzahlen, 46
- Hintereinanderausführung, 5, 47
- Homogenität, 19, 29, 106
- Homomorphismus, 17, 18, 23
 - bijektiver, 18
- Hyperbel, 114, 115
- Hyperbelfunktionen, 54
- Hyperebene, 123
- Imaginärteil, 28
- implizit definiert, 149
- indefinit, 152
- Induktion, vollständige, 6
- Induktionsbehauptung, 6
- Induktionsverankerung, 6
- Induktionsvoraussetzung, 6
- Infimum, 21, 22
- injektiv, 4, 15
- Integral, 73, 76, 120
 - oberes, 75
 - unbestimmtes, 82
 - unteres, 75
 - vollständiges elliptisches, 121
- Integralbegriff
 - Lebesguescher, 78
 - Riemannscher, 76
- Integralgleichung, 143
- Integrand, 76

- Integration, gliedweise, 90
- Integrationsvariable, 76
- integrierbar, 76–78, 90, 135
- Intervall, 19, 23
 - abgeschlossenes, 19
 - halboffenes, 19
 - offenes, 19
- Intervallschachtelungsverfahren, 51
- Inverses, 16, 22, 27
- invertierbar, 145

- Jacobimatrix, 130
- Jordan–Kurve, 118, 119
- Jordan–Weg, 112, 113, 118–120
 - geschlossener, 112
 - rektifizierbarer, 118

- Kegel positiver Elemente, 16
- Kettenregel, 60, 131, 146
- Koeffizienten, 85, 91, 92
- Koeffizientenvergleich, 85
- Körper, 12, 15, 17, 20, 27, 28
 - angeordneter, 16, 18, 20
 - archimedisch angeordneter, 18, 23
 - der rationalen Zahlen, 12
 - der reellen Zahlen, 22
- Kommutativgesetz, 2, 11, 13, 15
- kompakt, 102–104, 110, 118
 - relativ, 104–106
- Komplement, 1
- Komponente, 129
- Komposition, 47
- konstant, 130
- Kontraktion, 142

- konvergent, 31–33, 35, 36, 38, 67
- Konvergenz, 92, 100
 - absolute, 44
 - gleichmäßige, 87, 108
 - punktweise, 87, 107
- Konvergenzradius, 91, 92
- konvex, 136, 160
- Koordinatenabbildung, 112
- Koordinatenfunktion, 116, 119
- Krümmung, 121
- Krümmungsradius, 121
- Kreis, 115, 136
- Kugel, 97, 136
 - abgeschlossene, 97
 - offene, 97
- Kugeln, 109
- Kurve, 112
- Kurvenlänge, 119

- Länge, 116
- Lagrange–Funktion, 154, 158
- Lagrange–Multiplikator, 155, 157, 159
- Lagrangesche Darstellung, 66
- Lagrangesche Multiplikatorenregel, 156
- Lebesgue, 78
- Leibniz–Kriterium, 40–42
- Limes, 31, 89, 124
- Limes inferior, 37
- Limes superior, 37
- linear, 130
- linear unabhängig, 157
- Lipschitzkonstante, 142
- Lipschitzstetig, 142
- Logarithmus, 56

- Funktionalgleichung des, 56
- natürlicher, 55
- Majorante, 89, 90
- Majoranten-Kriterium, 40
- Mantissenstellenzahl, 46
- Matrix, 130, 145
 - adjungierte, 156, 157
 - Inverse einer, 146
 - symmetrische, 152
 - transponierte, 156
- Matrizennorm, 136, 145
 - verträgliche, 136, 137, 145
- Maximum, 52, 152
 - lokales, 62, 63, 68, 151, 160
- Menge, 1
 - offene, 97
 - unendliche, 7
- Metrik, 95, 96, 98, 105, 106
 - diskrete, 96
- Metriken, äquivalente, 97, 98
- Minimum, 52, 152
 - lokales, 62, 63, 68, 151, 154, 155, 160
- Minkowskische Ungleichung, 109
- Mittelpunktregel, 81
- Mittelwertsatz, 134, 135, 137
 - der Differentialrechnung, 63
 - der Integralrechnung, 79
 - erweiterter, 64
- monoton fallend, 34, 50
- monoton wachsend, 34, 38, 50
- Multiindex, 138
- Multiplikation, 11, 12, 15, 27
- Nabla-Operator, 127
- Natürliche Zahlen, 5
- Nebenbedingung, 154, 156
- negativ definit, 152
- negativ semidefinit, 152
- Negatives, 12, 16, 22
- neutrales Element der Addition, 11, 15
- neutrales Element der Multiplikation, 11, 15
- Newton-Verfahren, 62
- Norm, 106, 107
- Normen, äquivalente, 109
- normiert, 106
- Nullelement, 14, 22, 27
- Nullfolge, 31–33, 108
- Nullfunktion, 73
- Nullstelle, 51
- Numerische Integration, 81
- obere Grenze, 76
- Oberintegral, 75
- offen, 97, 98, 102
- Offener Kern, 101
- Oktalzahlen, 46
- Optimierungsaufgabe, 153, 155, 159
- orthogonal, 111
- Parabel, 115
- Parallelogrammidentität, 111
- parametrisieren, 154
- Partialbruchzerlegung, 85
- Partialsomme, 38, 39
- Partielle Integration, 83
- Peano-Axiome, 5
- Periode, 71

- Permutation, 24
- Picard–Lindelöf, 145
- Polarkoordinaten, 114, 147
- Polygonzug, 115
 - Länge des –s, 115
- Polynom, 27, 48, 51, 60, 85
- Populationsmodell, 64
 - verbessertes, 65
 - von Volterra–Lotka, 144
- positiv definit, 152
- positiv semidefinit, 152
- Potenzmenge, 2, 8
- Potenzreihe, 91, 92
- Potenzsumme, 32
- Primzahl, 9, 14
- Produkt, 25
- Projektion, kanonische, 125
- Punkt, stationärer, 152, 154, 156, 158
- Quadratsummennorm, 137
- Quadratwurzel, 24
- Quantoren, 4
- Quotientenkriterium, 41, 42, 69
- Rationale Zahlen, 2
- Raum
 - euklidischer, 111
 - Hausdorffscher, 98, 102
 - metrischer, 95–98, 103
 - normierter, 106
 - separierter, 98
 - topologischer, 97–99, 102
 - vollständiger metrischer, 105
- Realteil, 28
- Rechteck, 136
- Rechteckregel, 81
- Reelle Zahlen, 22
- Reflexivität, 10
- Regel von de l’Hospital, 68
- regulär, 157–160
- Reihe, 38
 - alternierende, 40
 - alternierende harmonische, 40
 - Funktionen–Reihe, 88
 - geometrische, 34, 39, 88
 - harmonische, 39
 - konvergente, 90
- rektifizierbar, 116–120
- relativ kompakt, 104–106
- Rest, 89
- Restglied, 66, 138
 - Integraldarstellung, 140
 - Integralform, 84, 138
 - Lagrange–Darstellung, 138, 140
- Restgliedabschätzung, 66, 139
- Richtungsableitung, 133, 134
- Riemann–Integral, 76, 135
- Riemann–integrierbar, 76, 77, 135
- Ring
 - kommutativer, 12
- Sandwich–Theorem, 33
- Satz
 - über die inverse Abbildung, 145
 - über implizite Funktionen, 148
 - Banachscher Fixpunktsatz, 141
 - Fermatsches Kriterium, 151
 - Identitätssatz für Potenzreihen, 93

- Kontraktionssatz, 141
- MWS für reellw. Funktionen, 134
- MWS für vektorw. Funktionen, 137
- Umordnungssatz, 44
- Vertauschungssatz, 89
- von Archimedes, 23
- von Arzela-Ascoli, 105
- von Bolzano-Weierstrass, 35
- von Cauchy-Hadamard, 91
- von Dini, 108
- von H. A. Schwarz, 126, 140
- von Pythagoras, 112
- von Rolle, 63
- von Taylor, 138
- Wohlordnungssatz, 6
- Zwischenwertsatz, 51
- Schranke, 21
 - obere, 21
 - untere, 21, 22
- Schraubenlinie, 113
- Schrittweite, 81
- Sehne, 57
- senkrecht, 111
- Sinus, 69
- Sinus hyperbolicus, 54
- Sinus-Funktion, 69
- Skalarprodukt, euklidisches, 111
- Spaltensumme, maximale, 137
- Spirale
 - Archimedische, 115, 121
 - Logarithmische, 115
- Stützstelle, 80
- Stammfunktion, 81, 82
- Steigung, 57
- stetig, 49–52, 55, 59, 60, 63, 64, 99–101, 118, 126
 - gleichgradig, 105, 106
- stetig differenzierbar, 65–67, 83
- streng monoton, 118
- streng monoton fallend, 34, 50, 71
- streng monoton wachsend, 34, 50, 51, 53, 55, 60, 71
- Submultiplikativität, 145
- Substitutionsregel, 83
- Summe, 25, 38, 89
 - der Wege, 117
 - Riemannsche, 80, 81
- Supremum, 21, 22, 24, 52
- surjektiv, 4, 55
- Symmetrie, 10, 95
- symmetrisch, 140
- Tangens, 145
- Tangens hyperbolicus, 54
- Tangens-Funktion, 70
- Tangente, 57
- Tangentenebene, 159
- Tangententrapezformel, 81
- Taylor-Formel, 138–140
- Taylor-Polynom, 66, 139, 140
- Taylor-Reihe, 67
- Taylorentwicklung, 84
- Taylorreihe, 93, 94
 - Entwicklung, 93
- Taylorische Formel, 66
- Teilfolge, 34, 35
- Teilmenge, 1

- Teleskopprodukt, 26
- Teleskopsumme, 26
- Tikhonov, Lemma von, 118
- Topologie, 96, 97, 99, 100
 - erzeugte, 97
 - feinere, 99
 - feinste, 99
 - gröbere, 99
 - gröbste, 99
 - induzierte, 99, 102
- total beschränkt, 103, 104
- Totalvariation, 116
- Transitivität, 1, 10
- Treppenfunktion, 72, 73, 76
- Trichotomiegesetz, 11, 15

- Überdeckung, 102
- Umgebung, 98
- Umkehrabbildung, 5
- Umkehrfunktion, 55, 56, 61, 71
- Umordnung, 43, 44
- unbedingt konvergent, 43
- unendlich, 7
- untere Grenze, 76
- Unterintegral, 75
- Unterkörper, 17, 18
- Urbild, 3

- Variation, beschränkte, 116
- Vektorraum, 28, 77, 107, 108
- Verbindungsstrecke, 136
- Vereinigung, 1
- Verfeinerung, gemeinsame, 72
- Vertauschung von Grenzprozessen, 88

- vollständig, 103, 104, 107
- Vollständigkeitsaxiom, 22, 35

- Wahrscheinlichkeit, 26
- Weg
 - differenzierbarer, 136
 - stetig differenzierbarer, 144
- Weglängenfunktion, 118, 119
- Weierstraßsches Majorantenkriterium, 89
- Winkel, 111
- wohlbestimmt, 4
- wohldefiniert, 4
- wohlgeordnet, 7
- Wurzel, 62
- Wurzelkriterium, 41, 42

- Zahl
 - Eulersche, 34
 - konjugiert komplexe, 28
 - zusammengesetzte, 9
- Zahlen
 - ganze, 10
 - natürliche, 5, 12
 - negative, 12
 - rationale, 12, 14
 - reelle, 22, 27
- Zahlenfolge
 - komplexe, 30
 - reelle, 30
- Zahlenfolgen, komplexe, 38
- Zeilensumme, maximale, 137
- Zerlegung, 72, 73, 80, 115
 - äquidistante, 81