Korrekturen und Ergänzungen zu „Arbeitsmaterialien Analysis I+II“ im WS 93/94 und SS 94

FB Mathematik

Universität Siegen

Korrekturen

Position	vorher (Fehler)	nachher (Korrektur)
S. 7, Satz 2	$\forall V \subset \mathbb{N}\ \exists \ldots$	$\forall V \subset \mathbb{N},\ V \neq \emptyset,\ \exists \ldots$
S. 17, (R9)	$x, y \neq 0$	$x, y > 0$
S. 33, Beispiel 6	$F_{n+1} := F_n + F_{n+1}$	$F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$
S. 54, Satz 6 (d)	$\lim\limits_{x \to 0} \ldots$	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \ldots$

Änderungen und Ergänzungen

Position	ggf. vorher	nachher (Änderung/Ergänzung)
S. 24, am Ende von 4.4		**Ergänzung:** Seien $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ mit $x^n = a$ (Bez.: $x = a^{1/n}$).
S. 37, vor Folg. 15	**Bemerkung:** Ein Häufungswert liegt genau dann vor, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder a_n in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.	[entfällt; steht schon auf S. 36]
S. 37, nach Folg. 16		**Folgerung 17** (s. Forster 1, Satz 9.4) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge. $a = \overline{\lim\limits_n}\, a_n$ dann und nur dann, wenn i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $a_n \leq a + \varepsilon$ ii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \geq n$: $a_m \geq a - \varepsilon$ Analog: $a = \underline{\lim\limits_n}\, a_n$ dann und nur dann, wenn i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $a_n \geq a - \varepsilon$ ii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \geq n$: $a_m \leq a + \varepsilon$
direkt im Anschluß		Wir geben noch folgende Charakterisierung von $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ an (vgl. Forster 1, §9): **Satz 18** (Charakterisierung von $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge, und $b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$ $c_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$ Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend bzw. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend und $\lim\limits_n b_n = \underline{\lim\limits_n}\, a_n, \qquad \lim\limits_n c_n = \overline{\lim\limits_n}\, a_n.$
S. 55, Folgerung 9		(d) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
S. 47, Beispiel 4		„ent“ für „entier“

<table>
<tr><th>Position</th><th>ggf. vorher</th><th>nachher (Änderung/Ergänzung)</th></tr>
<tr><td>S. 101, Folg. 13</td><td>(a) cl(A) ist abgeschlossen;
(b) int(A) ist offen.</td><td>(a) $X\setminus \mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(X\setminus A)$, $\mathrm{cl}(A) = X\setminus \mathrm{int}(X\setminus A)$
(b) cl(A) ist abgeschlossen;
(c) int(A) ist offen.</td></tr>
<tr><td>S. 103, Satz 18</td><td>(a) X ist kompakt genau dann, wenn X folgenkompakt ist.</td><td>(a) X ist kompakt genau dann, wenn X folgenkompakt ist (Satz von Heine-Borel)</td></tr>
<tr><td>S. 121, Bemerkung</td><td>Bemerkung: Für die Weglängenfunktion s_φ gilt:
$$s'_\varphi(t) = \|\dot\varphi(t)\|_2\,, \quad t\in[a,b]\,,$$ $$s'_\varphi(t)s''_\varphi(t) = <\dot\varphi(t),\ddot\varphi(t)>\,, \quad t\in[a,b]\,.$$ Weiterhin gilt:
$$s_\varphi(s) = s\,, \quad s\in[0,L(\varphi)]\,.$$ $$\|\dot\varphi(s)\|_2 = 1\,, \quad s\in[0,L(\varphi)]\,.$$ $$<\dot\varphi(s),\ddot\varphi(s)>=0\,, \quad s\in[0,L(\varphi)]\,.$$ Definition: $\|\ddot\varphi(s)\|_2$ heißt Krümmung im Punkt $\varphi(s)$, $\frac{1}{\|\ddot\varphi(s)\|_2}$ heißt Krümmungsradius in $\varphi(s)$, falls $\ddot\varphi(s)\neq 0$.</td><td>Bemerkung: Für die Weglängenfunktion s_φ gilt:
$$s'_\varphi(t) = \|\dot\varphi(t)\|_2\,, \quad t\in[a,b]\,,$$ $$s'_\varphi(t)s''_\varphi(t) = <\dot\varphi(t),\ddot\varphi(t)>\,, \quad t\in[a,b]\,.$$ Definition: $\|\ddot\varphi(s)\|_2$ heißt Krümmung im Punkt $\varphi(s)$, $\frac{1}{\|\ddot\varphi(s)\|_2}$ heißt Krümmungsradius in $\varphi(s)$, falls $\ddot\varphi(s)\neq 0$.
Weiterhin gilt für ψ mit $s_\psi(s) = s$ (vgl. Satz 12), daß
$$\|\dot\psi(s)\|_2 = 1\,, \quad s\in[0,L(\psi)]\,.$$ $$<\dot\psi(s),\ddot\psi(s)>=0\,, \quad s\in[0,L(\psi)]\,.$$</td></tr>
<tr><td>S. 127, Abschn. 18.3</td><td>Definition: Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen.
(a) $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ heißt vollständig (oder total) differenzierbar im Punkt $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)\in U$, wenn es Zahlen $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $r: K(0,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$ gibt mit
$$f(x^0+h) = f(x^0)+\alpha_1h_1+\dots+\alpha_nh_n+r(h) \quad \forall h: \|h\|<\delta\,,$$ wobei δ hinreichend klein ist, $K(x^0,\delta)\subset U$ und
$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = 0\,.$$</td><td>Definition: Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen.
(a) $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ heißt vollständig (oder total) differenzierbar im Punkt $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)\in U$, wenn es Zahlen $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ gibt, so daß die Funktion r durch
$$f(x^0+h) = f(x^0)+\alpha_1h_1+\dots+\alpha_nh_n+r(h) \quad \forall h: \|h\|<\delta\,,$$ für $\|h\|<\delta$ mit hinreichend kleinem $\delta>0$ erklärt ist, $K(x^0,\delta)\subset U$ und
$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = 0\,.$$</td></tr>
</table>