Jahrgang 61 · Heft 6–2015

DER MATHEMATIK-UNTERRICHT

Beiträge zu seiner fachlichen und fachdidaktischen Gestaltung

Schwerpunkt **Philosophie der Mathematik**
Gregor Nickel

Adressen der Autoren

Stephan Berendonk
berendon@math.uni-bonn.de

Ralf Krömer
rkroemer@uni-wuppertal.de

Jörg Meyer
j.m.meyer@t-online.de

Gregor Nickel
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Martin Rathgeb
rathgeb@mathematik.uni-siegen.de

Shafie Shokrani
shokrani@mathematik.uni-siegen.de

Susanne Spies
spies@mathematik.uni-siegen.de

Matthias Wille
matthias.wille@uni-due.de

THEMENTEIL

GREGOR NICKEL

Facetten der Mathematikphilosophie

Es mag als unzeitgemäß erscheinen, das aktuelle Heft einer Zeitschrift für Mathematik-Unterricht philosophischen Grundfragen zu widmen. Ist doch die Aufmerksamkeit der meisten am Lehren und Lernen von Mathematik Interessierten noch immer nachhaltig geprägt durch den Einfluss großformatiger quantitativ-empirischer Tests und *rankings* sowie durch die Diskussion (mehr oder weniger überzeugender) Anwendungen der Mathematik. Vielleicht ist es aber gerade deswegen an der Zeit, einen Kontrapunkt zu setzen, die schlichte Frage: „Was ist das eigentlich – Mathematik?“ zu stellen und Antwortversuche zu diskutieren. Facetten davon sind u. a. Fragen zum ontologischen Status der mathematischen Gegenstände, zum epistemologischen Status mathematischer Argumentationen und zur Möglichkeit bzw. zu den Folgen einer „Anwendung“ der Mathematik in (Natur)wissenschaft und Gesellschaft. Wer eine Disziplin verantwortlich unterrichten will, darf sich solchen Fragen jedenfalls nicht grundsätzlich verschließen, die nicht nur für eine reichhaltige und angemessene Präsentation des Faches unverzichtbar sind, sondern auch für die Frage nach der Berechtigung, eine solche Disziplin überhaupt und in den jeweils ausgewählten Gegenständen zu unterrichten. Aber auch die Mathematik selbst weist immer wieder Phasen einer intensiven Diskussion solcher Grundfragen auf, zuletzt zu Beginn des 20. Jahrhunderts im sog. Grundlagenstreit. Hier ist es bemerkenswert, dass die zunächst genuin philosophische Frage nach den Gesetzen der Logik, nach zulässigen Beweisverfahren und Objekten der Mathematik im Rahmen der HILBERTschen Metamathematik, von Mengenlehre, Axiomatik und Beweistheorie (fast!) vollständig mathematisiert werden konnte. Waren die Debatten der 20er- und 30er-Jahre noch weitgehend von forschenden Mathematikern getragen, so findet später eine mehr oder minder scharfe Aufteilung statt: Der „*working mathematician*“ ist zur Tagesordnung übergegangen, weitgehend unberührt von den Spezialproblemen der „Grundlagenfächer“, diese bearbeiten mit mathematischer Methodik mathematische Probleme, die kaum noch ihren philosophischen Ausgangspunkt erkennen lassen, und die akademische Philosophie bildet eine Spezialdisziplin „Mathematikphilosophie“ heraus, die noch immer geprägt ist von Themen des Grundlagenstreits und die sich zwar in Bezug auf eine Imitation der formal(logisch)en Methode an der Mathematik orientiert, sich jedoch von einem mathematischen Erfahrungshintergrund in Geschichte und Gegenwart zunehmend entfernt. Inzwischen zeigen Titel wie „Towards a Philosophy of Real Mathematics“ [CORFIELD 2005] ein gewisses Unbehagen mit dem philosophischen Diskurs, wird neuerdings eine verstärkte Aufmerksamkeit der „real existierenden“ Mathematik und ihrer Geschichte geschenkt. Die vorliegenden Beiträge sind einer solchen Optik verpflichtet, wobei eine leichte Akzentverschiebung gestattet sein möge: „Towards a Real Philosophy of Mathematics“ könnte das Motto dieses Bandes sein, insofern ein weites Spektrum klassischer philosophischer Disziplinen den Rahmen für die einzelnen Blicke auf die Mathematik bietet: Eine Verhältnisbestimmung von (philosophischer) Logik und Mathematik unternimmt MARTIN RATHGEB. MATTHIAS WILLE ruft in Erinnerung, welche Rolle einer Metaphysik der Mathematik zukommt und er zeigt diese am Beispiel der (Nicht-)EUKLIDischen Geometrie(n) exemplarisch auf. Wechselseitige Beziehungen von

Ethik und Mathematik untersucht GREGOR NICKEL; SUSANNE SPIES beschreibt, wie sich Mathematik unter der (von Mathematikern häufig eingenommenen) Perspektive der Ästhetik zeigt. Annäherungen und Abgrenzungen von Religionsphilosophie und Mathematik diskutiert GREGOR NICKEL. Häufig wird in diesen Aufsätzen ein philosophiehistorischer Zugang gewählt; offenbar sind klassische Positionen nach wie vor von höchstem systematischem Interesse. Explizit nimmt RALF KRÖMER das Verhältnis von Geschichte und Mathematik in den Blick. In dem bereits erwähnten Sinne möchten alle genannten Beiträge ein inhaltlich fundiertes und reflektiertes Unterrichten der schulischen Mathematik unterstützen, auch wenn sie dieses nicht eigens thematisieren. Eine schlichte Indienstnahme der Philosophie für das Lehren und Lernen der Mathematik erscheint allerdings insofern problematisch, als Philosophieren nur selten den Zugang zu einer Fragestellung vereinfacht. Vermutlich gehört es geradezu zum Wesen des Philosophischen (scheinbar!), einfache Sachverhalte und Fragen als komplexer und schwieriger zu enthüllen, als der erste Blick zeigte. Bereits PLATON macht zurecht darauf aufmerksam, dass sich die „Diskursrichtung“ in Philosophie und Mathematik grundlegend unterscheidet (Politeia 510c – d). Der Mathematik kann es – im Gegensatz zur Philosophie – genügen, von „hinreichend“ geklärten Prinzipien (Definitionen, Axiomen, Beweisregeln etc.) auszugehen, die nicht weiter problematisiert werden, um konstruktiv Neues zu erarbeiten. Immerhin lassen sich dennoch Momente des Philosophischen durchaus für das Lehren und Lernen der Mathematik nutzen; so das **diskursive Moment** der Philosophie. Eine explizit aus diesem Kontext stammende Methode des gemeinschaftlichen Diskurses, das „Sokratische Gespräch“ und ihren neuzeitlichen Begründer LEONARD NELSON stellt SHAFIE SHOKRANI vor. Das **problematisierende Moment** der Philosophie kann für die Lehre auch ins Produktive gewendet werden, wenn es darum geht, die Legitimität mathematischer (Grund)begriffe und Argumentationsweisen gegen (scheinbar oder tatsächlich) berechtigte Kritik zu verteidigen. JÖRG MEYER diskutiert begriffliche Voraussetzungen und Probleme einer Anwendung der Mathematik auf lebensweltliche Situationen. Eine **reflexive** Facette dieses Momentes ist der Diskurs über die Standards des Diskurses – auf die Mathematik bezogen – über Methoden und Standards mathematischen Beweisens. STEPHAN BERENDONK analysiert auf den Spuren von IMRE LAKATOS die Rolle induktiven und deduktiven Schließens für Mathematik und Mathematikunterricht. Schließlich mag das „Staunen als Anfang der Philosophie“, ihr **fragendes Moment** auch die Motivation geben, Themen (etwa das Phänomen der Unendlichkeit) auf mathematischem Felde zu bearbeiten. In diesem Sinne hoffe ich, dass dieser Band für Leserinnen und Leser einiges Staunenswertes bietet und zum Weiterfragen motiviert. Ein herzlicher Dank gilt den Autoren für ihre Beiträge, KARL H. HOFMANN für das Titelbild, den MU-Herausgebern STEFAN DESCHAUER und HENNING KÖRNER für die Betreuung und nicht zuletzt dem Letzteren für den Anstoß, einen solchen Band zu gestalten.

Literatur

[1] WILHELM BÜTTEMEYER (Hg.) (2003): Philosophie der Mathematik. Alber, Freiburg.
[2] DAVID CORFIELD (2005): Towards a Philosophy of Real Mathematics. CUP, Cambridge.
[3] THOMAS BEDÜRFTIG, ROMAN MURAWSKI (2015): Philosophie der Mathematik. De Gruyter, Berlin.
[4] BART VAN KERKHOVE, JEAN PAUL VAN ENDEGEM (Ed.) (2007): Perspectives On Mathematical Practices Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education. Springer, Dordrecht.
[5] GREGOR NICKEL (2015): Zur Rolle von Philosophie und Geschichte der Mathematik für die universitäre Lehrerbildung. In: J. Roth et al. (Hgg.): Übergänge konstruktiv gestalten. Springer Spektrum, Wiesbaden.
[6] KNUT RADBRUCH (1989): Mathematik in den Geistesgeswissenschaften. Vandenhoeck, Göttingen.
[7] STEWART SHAPIRO (2000): Thinking about Mathematics. Oxford University Press,NewYork.
[8] THOMAS TYMOCZKO (Ed.) (1998): New Directions in the Philosophy of Mathematics. PUP, Princeton.

MARTIN RATHGEB

Mathematik und Logik

1. Präliminarium: Sieben gleich drei plus vier

Die im Aufsatztitel genannten (Groß-)Begriffe *Mathematik* und *Logik* erfreuen sich beim Leser wohl beide einer gewissen, doch verschieden ausgeprägten Bekanntheit. Denn heutzutage ist Mathematik in Deutschland sowohl Schul- als auch Studienfach, Logik aber weder das eine noch – genauer: kaum – das andere. Letztere gehört nur noch im Philosophie- und Informatikstudium zum Pflichtprogramm; im Mathematikstudium allenfalls zum Kanon möglicher Vertiefung.[1] Dagegen zeigt ein Blick in die Geschichte eine lange gemeinsame Traditionslinie von Mathematik und Logik im Rahmen der *septem artes liberales*. Diese Sieben freien Künste/Wissenschaften – an mittelalterlichen Universitäten in der sog. *Artisten*fakultät institutionalisiert – sind von griechischer Herkunft mit lateinischer und christlicher Rezeption. In der Artistenfakultät wurde unterschieden zwischen den drei grundlegenden, *sprachwissenschaftlichen* Disziplinen des *Triviums*, das ist der Dreiweg der *artes sermonicales*: *Grammatik*, *Rhetorik* sowie *Dialektik* alias *Logik*, und den vier höheren, *mathematischen* Disziplinen des *Quadriviums*, das ist der Vierweg der *artes reales*: *Arithmetik*, *Harmonielehre*, *Geometrie* sowie *Astronomie*. Demnach gehörte Mathematik zum Quadrivium, Logik dagegen zum Trivium und beide zur Grundlage für ein Studium an einer der drei höheren Fakultäten, nämlich der theologischen, juristischen oder medizinischen. Lassen wir viele Entwicklungsstränge beiseite und dabei insbesondere außer Acht, dass „Logik" im Laufe der Zeit durchaus verschiedene Inhalts- und Methodenbereiche bezeichnet hat, so ist doch zu beachten, dass GOTTLOB FREGE (1809 – 1866) für den Wandel von *traditioneller* zu *moderner* Logik steht. Erstere enthält als wichtiges Teilgebiet die *Syllogistik*; letztere enthält insbesondere die *Aussagen*-, *Quantoren*- und *Prädikaten*-Logik in *klassischer* und in *nicht-klassischer* Fassung. Und beide enthalten *informelle* Logiken, also Argumentationstheorien.

Dabei ist für die Logik mit gleichem (*Un*-)Recht wie für die Mathematik zu behaupten, dass sie allgegenwärtig sei. Im letzteren Falle wird oftmals auf die Technik hingewiesen, welche ohne Mathematik nicht möglich sei; eine solch pauschale und unkritische Redeweise gilt gleichermaßen im ersteren Falle. So ist von Logik nämlich *de dicto* die Rede in begeisterten Ausrufen wie „Na klar, logisch!" bzw. kritischen Einwänden wie „Da stimmt doch die Logik nicht!" und *de re* gebrauchen wir Logik beim Verbinden von Sätzen durch – linguistisch betrachtet – Konjunktionen bzw. – logisch betrachtet – Junktoren, wie bspw. den oben verwendeten: *und*, *sowohl … als auch*, *aber*, *weder … noch* und *nicht*. Trotz dieser Vorkenntnisse des Lesers bzw. im vertrauensvollen Rückgriff auf seine Vororientierung sollen im Folgenden Mathematik und Logik einander mehrfach begegnen.

Das erste Wort erhält die *Mathematikdidaktik*; mit anderen Worten: Ich suche nach Spuren der Logik im Mathematikunterricht gemäß Bildungsstandards (und Kernlehrplan).

---

[1] Vgl. dazu die Stichworte „*Artes liberales*", „*Logik*", „*Quadrivium*" und „*Trivium*" in RITTER u. a. [1971 ff.].

2. Logik im Mathematikunterricht gemäß Bildungsstandards

Die Fachdidaktik gibt dem Mathematikunterricht folgenden bildungstheoretischen Auftrag:

> Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts sind der Allgemeinbildungsauftrag wie auch die Anwendungsorientierung des Unterrichtsfaches Mathematik. Demnach wird Mathematikunterricht durch drei *Grunderfahrungen* geprägt, die jeder Schülerin und jedem Schüler vermittelt werden müssen:
> - Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
> - Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,
> - Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten [KMK 2015, S. 11].

Diese Grunderfahrungen, die mehr oder minder auf HEINRICH WINTER (*1928) zurückgehen, firmieren unter den orientierenden Bezeichnungen: *Mathematik als Anwendung*, *Mathematik als Struktur*, *Mathematik als Problemlösefähigkeit*. Diese Grunderfahrungen gilt es also laut „Bildungsstandards“ zu vermitteln, auf dass Mathematik „in ihrer Reichhaltigkeit als kulturelles und gesellschaftliches Phänomen erfahren“ [KMK 2015, S. 11] wird. Sind diese Grunderfahrungen der Mathematik auch (Grund-)Erfahrungen der Logik? Diese Frage kann trivialerweise dreifach bejaht werden: Ja, da die in der dritten Grunderfahrung angesprochene Heuristik als *Logik der Erfindung* firmiert. Ja, da in der zweiten Grunderfahrung von deduktiver Ordnung die Rede ist und Logik als *Theorie des gültigen Schließens* firmiert. Ja, da das in der ersten Grunderfahrung thematisierte adäquate Erfassen der Welt das ursprüngliche Thema der Logik ist [vgl. STEKELER-WEITHOFER 2006, Kap. 6].

Insofern Mathematikunterricht nicht nur als Ermöglichungsort für Grunderfahrungen spezifiziert wird, sondern zudem in Inhalt und Methodik durch *Kompetenzen* und *Leitideen* – so in den Bildungsstandards – bzw. durch *Kompetenzbereiche* und *Inhaltsfelder* – so bspw. in dem Kernlehrplan von NRW – ergibt sich ein weiterer Antwortansatz, nämlich als Beantwortung folgender Fragen: Werden in diesen Texten die Wörter „Logik“ bzw. „logisch“ verwendet? Ist Logik demgemäß ein explizites oder immerhin implizites Thema der Schulmathematik? Es zeigt sich im Hinblick auf inhaltsbezogene Kompetenzen: Von „Logik“ ist nicht als relevante bzw. eigene *Leitidee* und nicht als relevantes bzw. eigenes *Inhaltsfeld* der Mathematik die Rede. Doch zeigt sich im Hinblick auf prozessbezogene Kompetenzen: Von „logisch“ ist in der Explikation der Kompetenz *Mathematisch Argumentieren* bzw. des Kompetenzbereichs *Argumentieren* jeweils mehrfach die Rede. Die Bildungsstandards fordern für die Kompetenz Mathematisch Argumentieren „einfache rechnerische Begründungen geben oder einfache logische Schlussfolgerungen ziehen“ (Anforderungsbereich I) und „überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nachvollziehen, erläutern oder entwickeln“ (Anforderungsbereich II) zu können. Im Kernlehrplan von NRW wird der Kompetenzbereich Argumentieren nicht gleichermaßen bezüglich der „Anforderungsbereiche“ erläutert, sondern bezüglich dreier „Teilkompetenzen“, nämlich *Vermuten*, *Begründen* und *Beurteilen*. Gefordert ist demnach: *Vermutungen* „mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur“ zu präzisieren; für *Begründungen* „mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente“ zu nutzen und „vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen)“ berücksichtigen zu können; zudem sollen Argumentationsketten im Hinblick auf Lücken, Fehler, Reichweite und Verallgemeinerbarkeit *beurteilt* werden können. Fassen wir die Ergebnisse zusammen: Die Bildungsstandards und bspw. der Kernlehrplan von NRW erwähnen Logik zwar nicht *de dicto*, wohl aber *de re*. Das Argumentieren – vom Plausibilisieren bis zum Beweisen, vom Vermuten übers Begründen bis zum Beurteilen – ist der Deckmantel für die Logik, welcher vornehmlich ihre informelle Seite (Theorie des Argumentierens), aber auch Ansätze zu ihrer formalen Seite (Theorie des gültigen Schließens) kleidet. In seiner rein(st)en Form, dem – semantischen – deduktiven *Folgern* bzw. dem – syntaktischen – deduktiven *Ableiten*, tritt es wohl in Ansätzen im Zusammenhang mit der zweiten Grunderfahrung auf.

Das zweite Wort erhalten nun die *Fachmathematik* und *Mathematikphilosophie*.

3. Faszinierendes Verhältnis: Logik in Mathematik, Mathematik in Logik

RICHARD COURANT (1888 – 1972) und HERBERT ROBBINS (1915 – 2001) beantworten in ihrem Buch „Was ist Mathematik?“ die im Titel gestellte Frage vornehmlich, indem sie *Mathematik machen*. Die Einleitung allerdings beginnen Sie mit folgender euphorischen Paraphrase, in der sie *Mathematik beschreiben*. Demnach ist Mathematik ein genuines Vermögen des menschlichen Geistes und Logik *ein* Aspekt der Mathematik.

> *Die Mathematik ist tief im menschlichen Denken verankert. Betrachtender Verstand, unternehmender Wille, ästhetisches Gefühl finden in ihr den reinsten Ausdruck. Sie vereint Logik und Anschauung, Analyse und Konstruktion, Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen. Wenn auch Mode oder Tradition den einen oder anderen Gesichtspunkt betonen mögen, so beruht doch auf dem Zwischenspiel dieser Antithesen und dem Streben nach Synthese die Vitalität und der letzte Wert der mathematischen Wissenschaft. [COURANT/ROBBINS, 2010, S. XIX]*

Mathematik gründet also „tief im menschlichen Denken“. Bewirkt wird sie erst durch das Zusammenspiel widerstreitender Kräfte und *Logik* zusammen mit *Anschauung* sind solche antagonistischen Protagonisten für die Mathematik. Die Autoren deuten also zunächst an, dass „Mode und Tradition den einen oder anderen Gesichtspunkt betonen mögen“ und konkretisieren später folgende Mode einer *Unterschätzung der logischen Seite* im 17. – 18. Jhd.:

> *Logisch zwingende Beweise, scharfe Definitionen, klare Axiome erschienen den Pionieren der neuen Mathematik unwesentlich. Intuitives Gefühl für Zusammenhänge und […] gaben den Anstoß zu neuen Eroberungen. Jedoch allmählich wurde die Ekstase des Fortschritts durch einen neu erwachenden Sinn der Selbstkritik abgelöst. […] So wurde das 19. Jahrhundert nicht nur eine Periode neuer Fortschritte, sondern es war zugleich gekennzeichnet durch die erfolgreiche Besinnung auf das klassische Ideal der Präzision und der strengen Beweise. […] Mit der Zeit schlug das Pendel nach der Seite der reinen Logik und Abstraktion aus, und zwar so weit, daß eine gefährliche Trennung der „reinen“ Mathematik von lebenswichtigen Anwendungsgebieten entstand. [COURANT/ROBBINS, 2010, S. XX]*

Die beiden Mathematiker geben den Hinweis, dass „das Pendel nach der Seite der reinen Logik und Abstraktion aus[schlug]“. Sie deuten damit an, dass es insbesondere die *Grundlegung von Mathematik* betreffend verschiedene Reduktionsversuche gab. So firmiert als

Logizismus der Versuch von GOTTLOB FREGE, BERTRAND RUSSELL (1872 – 1970), ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861 – 1947) und Anderen, durch Ausweitung von Logik die Mathematik auf ihre *logische* Seite zu reduzieren [vgl. KÖRNER 1968, Kap. 2 f.].

Die Reduktion von Mathematik auf ihre logische Seite bedroht nach COURANT und ROBBINS die mathematische Schaffenskraft des „freien Geistes“:

> *Der Lebensnerv der mathematischen Wissenschaft ist bedroht durch die Behauptung, Mathematik sei nichts anderes als ein System von Schlüssen aus Definitionen und Annahmen, die zwar in sich widerspruchsfrei sein müssen, sonst aber von der Willkür des Mathematikers geschaffen werden. Wäre das wahr, dann würde die Mathematik keinen intelligenten Menschen anziehen. Sie wäre eine Spielerei mit Definitionen, Regeln und Syllogismen ohne Ziel und Sinn. […] Nur aus der Verantwortung gegen das organische Ganze, nur aus innerer Notwendigkeit heraus kann der freie Geist Ergebnisse von wissenschaftlichem Wert hervorbringen. [COURANT/ROBBINS, 2010, S. XXI]*

Damit wenden sich COURANT und ROBBINS allerdings nicht nur gegen die logizistische Reduktion, sondern auch gegen die *formalistische*. Dabei ist dem *Formalismus* von DAVID HILBERT (1862 – 1943) und Anderen nicht der Vorwurf zu machen, er unterschätze die Anschauung, denn Formalisten setzen bei den Zeichen und deren – der gemeinsamen Kontrolle zugänglichen – Gebrauch an. Der Formalismus überschätzt hingegen die *syntaktischen* Aspekte der Mathematik auf Kosten ihrer *semantischen* [vgl. KÖRNER 1968, Kap. 4 f.].

> *Indem ich diesen Standpunkt einnehme, sind mir – im genauen Gegensatz zu FREGE und DEDEKIND – die Gegenstände der Zahlentheorie die Zeichen selbst, deren Gestalt unabhängig von Ort und Zeit und von den besonderen Bedingungen der Herstellung des Zeichens sowie von den geringfügigen Unterschieden in der Ausführung sich von uns allgemein und sicher wiedererkennen läßt. Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik – wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen – für erforderlich halte:* am Anfang *– so heißt es hier –* ist das Zeichen. *[HILBERT; zitiert nach: BÜTTEMEYER 2003, S. 138]*

Im Hinblick auf das Thema dieses Aufsatzes mit dem Philosophen PIRMIN STEKELER-WEITHOFER nochmals vor einer logizistischen Überschätzung der Logik warnen: Denn es sind die Techniken der (formalen) Logik sind „keine Techniken des Denkens“, sondern nur – in der Mathematik exzessiv genutzte – Techniken der Sprache, nämlich der exakten Artikulation und schematischen Modifikation von Begriffen und Aussagen.

> *Das sogenannte logische Denken im Sinne des deduktiven Rechnens mit Definitionen ähnelt […] der Verwandlung von Stenographie in Langschrift, so wie das Rechnen eines Computers eben auch immer als schematische Umcodierung zu begreifen ist. Dabei soll nicht geleugnet werden, dass derartige Codetechniken wichtig sind. […] Aber ihre Beherrschung reicht nicht aus, nicht einmal für das mathematische Denken. [STEKELER-WEITHOFER 2012, S. 55]*

Wohlgemerkt stehen Mathematik und Logik in einem *faszinierenden Verhältnis*, insofern einerseits formale Logiken *mathematische Strukturen* sind und andererseits in der Mathematik *logisch argumentiert* wird: So ist einerseits die Aussagenlogik zwar *das*, aber lediglich *ein* Modell der Axiomatik BOOLEscher Algebren [vgl. COURANT/ROBBINS 2010, S. 86 – 92], andererseits gehen Argumentationen in der Mathematik mit der Aussagenlogik konform.

Der Mathematiker GEORGE SPENCER-BROWN (*1923) konzipiert in seinem proto-mathematischen sowie proto-logischen Buch „Laws of Form“ (1969) auf faszinierende Weise, nämlich durch die Unterscheidung zweier Formen des Wiederholens, einen eleganten, doch ungewöhnlichen *mathematischen Kalkül*, der als Axiomatik BOOLEscher Algebren, also insbesondere als *Kalkül für die klassische Aussagenlogik* gelesen und zur *Behandlung von Syllogismen* genutzt werden kann [vgl. SPENCER-BROWN 1969; RATHGEB 2016].

Das dritte Wort erhalten die Mathematik- und Logikgeschichte.

4. BOOLEs (schul-)mathematische Analyse der Logik

Mitte des 19. Jahrhunderts unterzog der Mathematiker GEORGE BOOLE (1815 – 1864) die Logik, genauer: die zeitgenössische Fassung der kategorischen Syllogistik, einer mathematischen Analyse. In seinem Buch „The mathematical analysis of logic. Being an essay towards a calculus of deductive reasoning“ (1847) untersucht er einen Teilbereich der traditionellen Logik mittels der aktuellen Mathematik seiner Zeit. Für seine mathematische Analyse der Logik stellt er logische Aussagen – in Abkehr von der Tradition – als mathematische Gleichungen dar und zwar so, dass das logische Folgern als mathematisches Rechnen erscheint. Dieserart ist die Konklusion eines Syllogismus die gemeinsame Lösung der Prämissengleichungen. In seinem zweiten und eigentlichen logischen Hauptwerk „An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities“ (1854) führt er diesen Ansatz nochmals gründlicher und weitreichender aus. Und doch bleibt sein Ansatz im Wesentlichen der gleiche und ist mittels der Schulmathematik nachzuvollziehen: Logische Aussagen werden zu Gleichungen, logische Folgerungen werden zu Rechnungen. Dabei sind die Rechnungen Kurzfassungen von logisch-mathematischen Argumentationen über logische Argumente. Die Syllogistik ist demnach ein Ort für die zweite Wintersche Grunderfahrung. Betrachten wir hierfür ein konkretes Beispiel, den *modus barbara* der klassischen Syllogistik, nämlich zunächst die beiden Prämissen „Alle Menschen sind Lebewesen“, nach BOOLE symbolisiert durch $M = ML$, und „Alle Lebewesen sind sterbliche Wesen“, $L = LS$. Die gemäß der Syllogistik gültige Konklusion lautet dann: „Alle Menschen sind sterbliche Wesen“, $M = MS$. Diese logische Schlussfolgerung kann mit Blick auf die darstellenden Gleichungen durch eine simple Rechnung im Stile der Schulalgebra gerechtfertigt werden, nämlich: $M = ML = M(LS) = (ML)S = MS$. Es wird also M gemäß erster Gleichung ersetzt, L gemäß zweiter Gleichung in die erste eingesetzt; danach wird umgeklammert und gemäß erster Gleichung ersetzt. Die „gekürzte“ Gleichungskette, $M = MS$, stellt tatsächlich die gültige Konklusion dar.

Der Mathematiker und Logiker STANLEY BURRIS hat in seinem Aufsatz „A Fragment of Boole’s Algebraic Logic Suitable for Traditional Syllogistic Logic“ die BOOLEschen Darstellungsformen der vier interessierenden Aussagen nochmals leicht geändert und damit die Möglichkeit geschaffen, Syllogismen mittels der schulischen Algebra zu berechnen. In diesem Gewande können Schüler durch die Manipulation algebraischer Gleichungen Syllogismen rechnen. Sie können demnach an gehaltvollen Gleichungen das Umformen von Termen erlernen, die deduktive Ordnung erfahren und syllogistische Argumentationen reflektieren.

Eine spielerische Behandlung syllogistischer Schlüsse legt der Literat, Logiker und Mathematiker LEWIS CARROLL (1832 – 1898) in seinem Büchlein „Das Spiel der Logik“ vor. Zudem zeigt er in einem ausgesprochen originellen, nach wie vor systematisch bedeutsamen und auch im Mathematikunterricht durchaus lesbaren Aufsatz „What the Toirtoise Said to Achilles“ [1895], dass in einem prototypischen logischen Schluss (modus ponendo ponens) eine bedeutsame Lücke klafft. Sie zu schließen, kann die Logik selbst nicht erzwingen. Sie muss vielmehr auf die Bereitschaft und das (Ein-)Verständnis der Dialogpartner zählen.

Logik zählt heutzutage – eigentlich – zur *mathematischen Grundbildung*. Dabei ist sie zwar keine *explizite* Leitidee bzw. inhaltsbezogene Kompetenz, doch ist sie als allgemeine mathematische, als prozessbezogene Kompetenz – eigentlich – *implizit* anerkannt. Eine echte Wertschätzung von Logik im Mathematikunterricht wäre nicht nur Selbstzweck, sondern zudem ein Gewinn *für* und *an* Mathematik, denn schon COURANT und ROBBINS warnten davor, dass mit der Logik auch die Mathematik verlorengeht, denn an einer Missachtung der Logik leidet letztlich die mathematische Schaffenskraft des „freien Geistes“.

Literatur

[1] BERKEL, KAREL & KREISER, LOTHAR (1971): Logik-Texte. Berlin: Akad.-Verl.
[2] BOOLE, GEORGE (2001): The mathematical analysis of logic/Die mathematische Analyse der Logik. Halle: Hallescher
[3] BURRIS, STANLEY (k.A.): A Fragment of Boole’s Algebraic Logic Suitable for Traditional Syllogistic Logic. Verfügbar unter: http://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/MYWORKS/SYLL/syll.pdf [28.05.2014].
[4] BÜTTEMEYER, WILHELM (2003): Philosophie der Mathematik. Freiburg: Alber.
[5] CARROLL, LEWIS (1895): What the Tortoise Said to Achilles. In: *Mind*: New Series, 4(1895)14, 278 – 280.
[6] CARROLL, LEWIS (1999): Das Spiel der Logik. Köln: Tropen.
[7] COURANT, RICARD & ROBBINS, HERBERT (2010): Was ist Mathematik? Berlin: Springer.
[8] FUCHS, WALTER (1970 ff.): Eltern entdecken die neue Mathematik. München: Droemer-Knaur.
[9] INHETVEEN, RÜDIGER (2003): Logik. Eine dialog-orientierte Einführung. Leipzig: Ed. am Gutenbergplatz.
[10] HASENJAEGER, GISBERT (1962): Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik. Freiburg: Alber.
[11] KÖRNER, STEPHAN (1968): Philosophie der Mathematik. Eine Einführung. München: Nymphenburger Verlagshandlung.
[12] KNEALE, WILLIAM & KNEALE, MARTHA (1962): The development of logic. Oxford: Clarendon Pr.
[13] MEIXNER, UWE (2003): Philosophie der Logik. Freiburg: Alber.
[14] MINISTERIUM FÜR SCHULE UND WEITERBILDUNG DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (Hg.) (2014): Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen: Mathematik. Düsseldorf.
[15] NICKEL, GREGOR & RATHGEB, MARTIN (2014): Umnutzungen in der Mathematik. In: Habscheid, Stephan et al. (Hg.): Umnutzung. Alte Sachen, neue Zwecke. Siegen: V&R unipress.
[16] RATHGEB, MATIN (2013): Zur Kritik an George Booles mathematischer Analyse der Logik. In: Rathgeb, Martin et al. (Hg.): Mathematik im Prozess. Wiesbaden: Springer.
[17] RATHGEB, MATIN (2016): George Spencer Browns Laws of Form zwischen Mathematik und Philosophie. Erscheint in: Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: universi.
[18] RITTER, JOACHIM u. a. (Hg.) (1971 ff.): Historisches Wörterbuch der Philosophie. Basel: Schwabe.
[19] SAINSBURY, RICHARD (2010): Paradoxien. Stuttgart: Reclam.
[20] SCHOLZ, HEINRICH (1959): Abriss der Geschichte der Logik. Freiburg: Alber.
[21] SPENCER-BROWN, GEORGE (1969): Laws of Form. London: George Allen and Unwin Ltd.
[22] SEKRETARIAT DER STÄNDIGEN KONFERENZ DER KULTUSMINISTER DER LÄNDER IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND (KMK) (Hg.) (2015): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Köln: Link.
[23] STEKELER-WEITHOFER, PIRMIN (1986): Grundprobleme der Logik. Berlin: de Gruyter.
[24] STEKELER-WEITHOFER, PIRMIN (2006): Philosophiegeschichte. Berlin: de Gruyter.
[25] STEKELER-WEITHOFER, PIRMIN (2012): Denken. Tübingen: Mohr Siebeck.
[26] VON KUTSCHERA, FRANZ & BREITKOPF, ALFRED (2007): Einführung in die moderne Logik. Freiburg: Karl Alber.
[27] WOLFF, MICHAEL (2006): Einführung in die Logik. München: Beck.
[28] WOLFF, MICHAEL (2009): Abhandlung über die Prinzipien der Logik. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

MATTHIAS WILLE

Die Metaphysik der Mathematik. Mathematische Modellbildung und metaphysische Spekulation

Es gab einmal eine Zeit, in der bezeichnete man mit „Metamathematik“ etwas anderes als Beweistheorie. Es war die Zeit, in der man unter „Metamathematik“ die Metaphysik der Mathematik verstand.[1] DAVID HILBERT war ein junger Student und das Antinomienproblem lag noch in ferner Zukunft. In dieser Zeit waren die nicht-EUKLIDischen Geometrien zu einem seriösen Gegenstand der Wissenschaft gereift und bildeten einen unerwartet harten Prüfstein für prominente philosophische Thesen. Auf der Grundlage präziser mathematischer Modellbildungen sollte so mancher metamathematischer Spekulation Einhalt geboten werden. Doch am Ende zeigte sich, dass selbst die moderne mathematische Vernunft mit der Rigorosität des metaphysischen Hinterfragens überfordert war. In Auszügen soll davon nachfolgend berichtet werden.

1. Was ist Metaphysik der Mathematik?

Kaum ein anderer Ausdruck der abendländischen Philosophie fasziniert mit seiner schillernden Bedeutungsvielfalt und verunsichert durch die sie begleitenden Abgründe der Sinnlosigkeit wie „Metaphysik“. Ebenso wie Metaphysik im guten Sinne auf beeindruckende Weise die intellektuelle Reichweite menschlicher Vernunft repräsentiert, dokumentiert sie im schlechten Sinne die katastrophale Fehlbarkeit derselben. Es gehört zum Mythos der Metaphysik, dass ihre größten Erfolge zugleich auch als ihre größten Fehlschläge beurteilt wurden, und es gehört ebenso zu ihrem Mythos, dass der begriffsgeschichtliche Ursprung ihrer Biographie zwischen der Editionspragmatik eines ANDRONIKOS VON RHODOS (1. Jh. v. Ch.)[2] und der strikten Verweigerung einer derart banalen Wortschöpfung mehr als 1800 Jahre später durch IMMANUEL KANT (1724 – 1804) oszilliert. Unstrittig ist indes, dass Letztgenannter im post-aristotelischen Gebrauch den wohl einflussreichsten Ausdrucksgebrauch geprägt hat, dessen epistemologische Rigorosität erst durch MARTIN HEIDEGGER (1889 – 1976) nochmals radikalisiert wurde.

---

1 Umfassend hierzu WILLE [2011], [2008, S. 19 – 28].

2 ANDRONIKOS gilt (trotz philologischer Bedenken) als erster seriöser Herausgeber der aristotelischen Schriften, der um 70 v. Ch. nicht zuletzt durch seine editorische Organisation einzelner Texte dem heutigen Corpus Aristotelicum seine entscheidenden Grundzüge verliehen hat. Vor allem wird ihm nachgesagt, mehrere, thematisch miteinander verwandte Bücher zu einer großen Schrift zusammengefasst zu haben, die aufgrund ihrer Werkstellung als „die Bücher nach der Physik“ (τὰ μετὰ τὰ φυσικά), als *Metaphysik*, bezeichnet wurden. Aus der bibliothekarischen Kennzeichnung „die Gruppe von Büchern, welche in der Zählung der aristotelischen Werke auf die Bücher der Natur folgen“ wurde mit der Zeit die verkürzte Kennzeichnung *Metaphysik*, die nunmehr auch zum Buchtitel der besagten Bücher gereift war und schließlich im Neuplatonismus bereits wieder als disziplinäre Bezeichnung für jene wissenschaftliche Untersuchungen auserkoren wurde, die über den Gegenstand der Physik hinausreichten.

Das metaphysische Fragen ist gekennzeichnet durch eine unbedingte Haltung des kritischen Hinterfragens. Es zielt ab auf die von allen kontingenten Zutaten bereinigte Offenlegung der Ermöglichungsbedingungen für Erfahrung überhaupt und fragt damit nach den fundamentalen Strukturmerkmalen des Erfahrungswirklichen, nicht zuletzt nach den alternativlosen Geltungsbedingungen des metaphysischen Fragens selbst. Alternativlos sind jene Bedingungen, deren Nichtbestehen nur bei Strafe der Sinnlosigkeit erwogen werden kann. Damit dieses kontrafaktische Räsonieren nicht zu einem unkontrollierbaren Spekulieren verkommt, bedarf es der strikten Verpflichtung der metaphysischen Untersuchung auf die grundlegenden Sinnbedingungen der philosophischen Rede. Erwogen kann nur werden, was nicht gegen die Möglichkeit dieses Erwägens verstößt. Der semantische Gehalt der philosophischen Erwägung darf also nicht im Widerspruch stehen zu den Bedingungen des pragmatischen Erwägungsvollzugs. So ist etwa die Proposition, dass das Behaupten nicht möglich ist, keine falsche These, sondern eine sinnlose Äußerung, weil der Gehalt behauptend in Abrede stellt, dass es sich um behauptende Rede handelt.

Als mächtige Argumentationsfigur wurde dies bereits von ARISTOTELES (384 – 322 v. Ch.) sowohl in der *Metaphysik* wie auch im *Protreptikos* (einer für die Öffentlichkeit bestimmten Werbeschrift für das Erfordernis der Philosophie) benutzt, wahrscheinlich erstmals in der abendländischen Wissenschaftsgeschichte. Das philosophische Vernunftgeschäft muss sich stets selbst kontrollieren und seit der klassischen Antike verfügt es dafür auch über einschlägige Argumentationsmittel, die vor allem durch die Nachdrücklichkeit der ihnen inhärenten selbstreflexiven Bezugsmöglichkeit bestechen: Aus dem retorsiven Argumentieren eines ARISTOTELES entwickelte sich mehr als zwei Jahrtausende später das transzendentale Philosophieren KANTs und schließlich die fundamental-ontologische Analyse HEIDEGGERS. Dort, wo die Vernunft sich selbst nicht mehr kontrolliert zu reflektieren vermag, gerät sie in den dialektischen Schein und leere Vernünfteleien. Es kommt nicht von ungefähr, dass bereits KANT einen erheblichen Teil seiner Transzendentalphilosophie auf die Analyse der daraus resultierenden philosophischen Scheinprobleme sowie den therapeutischen Umgang mit ihnen verwendet hat. Die Kritik der reinen Vernunft ist somit immer auch eine Kritik durch die reine Vernunft.

Wird ein so verstandener metaphysischer Fragemodus auf die Mathematik bezogen, so überrascht es freilich nicht, dass die Metaphysik der Mathematik nicht verwechselt werden sollte mit der Wissenschaftstheorie der Mathematik oder den mathematikphilosophischen Fragen im engeren Sinne.[3] Im Kontext der Mathematikphilosophie im engeren Sinne erörtern wir traditionell die Semantik mathematischer Grundbegriffe sowie den erkenntnistheoretischen Status der mathematischen Objekte wie etwa: Was sind Zahlen und in welcher Weise gibt es sie? Zum Kernbestand der Wissenschaftstheorie der Mathematik gehören indes technische Rekonstruktionsanliegen, die im Besonderen die finite, konstruktive oder prädikative Geltung mathematischer Theoriebestandteile betreffen wie etwa: Lässt sich metrische Vollständigkeit rein prädikativ definieren und was unterscheidet einen konstruktiven reellen Zahlkörper vom klassischen (imprädikativ definierten)? Die Wissenschafts-

[3] Präzise betrachtet zählen sowohl die Wissenschaftstheorie der Mathematik wie auch die Metaphysik der Mathematik zur Philosophie der Mathematik, denn sowohl die Wissenschaftstheorie als auch die Metaphysik repräsentieren Teildisziplinen der Philosophie. Da die jeweils verfolgten geltungstheoretischen Klärungsanliegen jedoch hinreichend verschiedenen sind, sollte eine Abgrenzung hin zu den mathematikphilosophischen Fragen im engeren Sinne zulässig sein.

theorie der Mathematik setzt sich komplementär und ergänzend zur modernen Beweistheorie mit geltungstheoretischen Fragen zu formalen Herausforderungen einzelner mathematischer Theorien auseinander. Die Vielfalt der wissenschaftstheoretischen und philosophischen Aufgaben die Mathematik betreffend ist unüberschaubar groß und aufgrund der mehr als zweieinhalbtausendjährigen Wechselwirkungen zwischen diesen beiden abendländischen Gründungswissenschaften unbeschreiblich reich an Antwortmöglichkeiten. Doch alle diese Fragen, Probleme und Aufgaben eint das Selbstverständnis, dass das Betreiben von Mathematik möglich ist. Wissenschaftstheorie und Philosophie der Mathematik gibt es, weil es mathematische Handlungsvollzüge gibt. Punkt. Die Wirklichkeit und damit die Möglichkeit von Mathematik ist das unhinterfragte Faktum.

Für eine Vielzahl der oben angesprochenen Fragen ist die unausgesprochene Bezugnahme auf dieses Argumentationsfundament auch vollkommen ausreichend. Nicht jede philosophische Frage muss in ihrer Klärungsabsicht bis an den Ursprung des sinnhaften Fragens zurückreichen, weil wir andernfalls kaum eine Frage jemals zufriedenstellend beantworten könnten. Allerdings muss auch die radikalere Form des Zurückfragens zugelassen sein. Sie muss im Besonderen dort zulässig sein, wo das besagte Argumentationsfundament selbst zum Gegenstand des philosophischen Interesses geworden ist. Gerade weil wir um die Möglichkeit von mathematischen Handlungsvollzügen wissen, entsteht durch Neugier allererst die Frage, was das Betreiben von Mathematik möglich macht? Wissenschaftshistorisch war die Genesis dieser Neugier mehr als naheliegend, denn je präsenter das Faktum des Mathematischen wurde, umso deutlicher musste sich irgendwann einmal die Frage stellen, ob dieses Faktum ein kontingentes oder notwendiges ist. Was ist es, das uns den Vollzug mathematischen Handelns möglich macht? Ist die Weise, wie wir Mathematik betreiben, etwas rein Zufälliges, das auch beliebig viele andere Formen hätte annehmen können? Ist die Verfügbarkeit von Mathematik möglicherweise selbst ein kultureller Zufall? Hätte die Geschichte der Mathematik kategorial anders verlaufen können? Sind die uns bekannten Anfänge der Mathematikgeschichte historische Unfälle oder empirische Manifestationen einer rationalen Genese? Ist es denkbar, dass eine heutige Fundamentaldisziplin wie die Mengentheorie zugleich eine historische Ursprungsdisziplin hätte sein können? Könnte es sein, dass es überhaupt keine Mathematik gibt oder dass die Gesetze der Mathematik gänzlich andere wären als die uns bekannten? Lässt sich ein Erfahrungsbegriff denken, welcher die Möglichkeit mathematischer Handlungsvollzüge prinzipiell ausschließt? Können wir uns eine Erfahrungswelt vorstellen, in welcher die betriebene Mathematik von der unsrigen vollständig verschieden ist und die für uns auch nicht als Mathematik intelligibel gemacht werden kann? Und schließlich: Ist Mathematik überhaupt möglich?

Bei all diesen Fragen geht es nicht darum, ob das durch sie gegebenenfalls Angefragte plausibel oder naheliegend ist. Diese Fragen zielen darauf ab, mögliche Antworten auf die sie begleitenden, aber versteckten Hintergrundannahmen abzuprüfen. Ihr Zweck besteht in nichts anderem als der dezidierten Offenlegung sämtlicher Argumentationspräsuppositionen, um die Grenzen der sinnvollen Artikulierbarkeit auszuloten. Wem das konventionelle philosophische Fragen bereits sonderbar erscheint, dem werden diese Fragen eventuell sogar als abwegig entgegentreten, doch es sind Fragen dieses Typs, die zur Metaphysik der Mathematik gerechnet werden können. Es ist kennzeichnend für diesen Fragentyp, dass er das vermeintlich Selbstverständliche unnachgiebig hinterfragt und das außerwissenschaftliche Sinnesfundament der Mathematik problematisiert. Damit dies in der Sphäre seriösen wissenschaftlichen Argumentierens verbleibt und nicht zur schlechten Science Fiction verkommt, bedarf es selbstverständlich der Verständigung über die begründungstheoretischen Gelingensbedingungen. Diese können weder ungeprüft noch vollständig aus den angestammten Bereichen der Wissenschaftstheorie oder Philosophie der Mathematik übernommen werden, weil deren Mittelbestände im Idealfall eine zufriedenstellende Antwort auf die metaphysische Frage nach den Bedingungen der Möglichkeit des Betreibens von Mathematik voraussetzen. Eine methodische Affinität besitzt die Metaphysik der Mathematik daher eher mit der allgemeinen Metaphysik bzw. der theoretischen Transzendentalphilosophie und weniger mit der Mathematikphilosophie.

Historisch betrachtet wurden die oben aufgeführten Fragen bis dato in unterschiedlicher Ausführlichkeit behandelt, einige etwas gründlicher als andere, manche indes gar nicht. Jene Frage, welche wissenschaftsgeschichtlich die mit Abstand größte Aufmerksamkeit erfahren hat, wurde noch gar nicht namentlich aufgeführt: Ist das historisch primäre Aufkommen der EUKLIDischen Geometrie ein kulturgeschichtlicher Zufall, welcher eventuell der Einfachheit geschuldet ist, oder setzt die Beherrschung nicht-EUKLIDischer Geometrien die Verfügbarkeit der EUKLIDischen notwendigerweise voraus? Unstrittig ist auch hier das historische Faktum, dass die EUKLIDische Geometrie zuerst verfügbar war. Die metaphysische Frage zielt darauf ab, ob es hierfür einen tieferliegenden Vernunftgrund gibt. Dieser Frage gehen wir nunmehr in rhapsodischen Sequenzen nach.

2. Ist die EUKLIDizität des Erfahrungsraums transzendental notwendig?

Um sogleich mit dem Wichtigsten zu beginnen: Die titelgebende Frage zu diesem Abschnitt wird hier nicht beantwortet. In ihr kondensiert sich aber ein Erkenntnisproblem, das Mathematik und Philosophie in der Form der Statusbestimmung des Parallelenpostulats bereits seit der Antike implizit beschäftigt hat, welches im Kontext der Parallellinientheorie für gut 2000 Jahre unausgesprochen und doch präsent blieb, schließlich von KANT propositional klar gefasst wurde und für welches wiederum gut ein Jahrhundert später beeindruckende Argumente pro wie contra vorgetragen wurden: Ist die EUKLIDische Struktur unseres Erfahrungsraums eine erfahrungsermöglichende Bedingung oder eine empirische Besonderheit? Wenn unser Erfahrungsraum notwendigerweise EUKLIDisch organisiert sein muss, damit das Machen von Erfahrung überhaupt möglich ist, wie kann das gezeigt werden und wie ist mit der Möglichkeit der nicht-EUKLIDischen Geometrien zu verfahren?

2.1 KANT: nur der EUKLIDische Raum ist vorstellbar

Nach KANT bestimmt die EUKLIDische Geometrie mit apodiktischer Gewissheit die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori.[4] Ausgehend von einer überzeugenden Argumentation dafür, dass der Raum kein empirischer Begriff ist, sondern eine reine Anschauung und notwendige Vorstellung a priori sein muss,[5] wird geschlussfolgert, dass die Geltung der geometrischen Grundsätze „aus der Anschauung und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit abgeleitet“[6] wird. Das heißt, die geometrische Struktur eines jeden möglichen Erfahrungsraumes ist transzendental notwendig EUKLIDisch. Etwas anderes zu erwä-

4 Vgl. KANT, [1911b, B S. 40].
5 Vgl. vor allem KANT [1911a, A S. 24].
6 A. a. O., S. B 39.

gen ist nicht bloß falsch, sondern geradewegs sinnlos, weil die Vernunft mit sich selbst in Widerspruch geraten würde, wenn wir annähmen, etwas apodiktisch Gewisses sei nicht der Fall. Die Annahme der Möglichkeit eines Erfahrungsraumes, der nicht über die Charakteristika der EUKLIDizität verfügt, kann damit nicht intelligibel gemacht werden, denn es kann nicht widerspruchsfrei gedacht werden, was nicht präsuppositional konsistent artikuliert werden kann.

Obwohl bereits seine Zeitgenossen die Abwesenheit überzeugender Argumente in KANTs transzendentaler Ästhetik anmahnten, so wurde es für diesen Abschnitt der *Kritik der reinen Vernunft* erstmals prekär, als knapp ein halbes Jahrhundert später gezeigt wurde, dass sich die absolute Geometrie konsistent um Negationen des Parallelenpostulats erweitern lässt. Die damit ermöglichte Fundamentalkritik blieb jedoch aus, weil zum einen die bahnbrechenden Arbeiten von BOLYAI und LOBATSCHEWSKI dann doch noch nicht über den Reifegrad verfügten, um für ein größeres Publikum problemlos verständlich zu sein. Zum anderen stand das deutschsprachige Wissenschaftssystem unter dem prägenden Einfluss des Deutschen Idealismus, für den die kritische Philosophie KANTs der intellektuelle Ausgangspunkt repräsentierte. Dies änderte sich in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts als sich eine junge Generation von Naturwissenschaftlern enttäuscht von den überzogenen Erklärungsansprüchen der Philosophie, im Besonderen der HEGELschen, abwandte, um selbst philosophisch tätig zu werden. Der Prototyp dieser neuen Generation war zugleich der Protagonist im weiteren Verlauf der mathematisch-metaphysischen Erörterung über den erkenntnistheoretischen Status der verschiedenen Geometrien: HERMANN VON HELMHOLTZ (1821 – 1894).[7]

2.2 VON HELMHOLTZ: auch nicht-EUKLIDische Räume sind vorstellbar

Knapp ein Jahrhundert, nachdem KANT die EUKLIDizität der reinen Anschauungsform des Raumes behauptet, aber nicht gezeigt hatte, bemühte sich sein Verehrer VON HELMHOLTZ um eine Versöhnung zwischen den kantischen Erkenntnisansprüchen und der jüngeren mathematischen Forschung, indem er die reine Anschauungsform des Raumes als a priori erhalten wollte, während die tatsächliche Raumgeometrie empirisch zu bestimmen ist: Die Form gibt es unabhängig von Erfahrung, ihr Inhalt kann indes erst durch die Erfahrung bestimmt werden. Es zählt in diesem Kontext zu VON HELMHOLTZ' ganz großen Verdiensten, dass er nicht nur über die erforderliche Doppelkompetenz verfügte, sondern darüber hinaus über die didaktische Brillanz, den technisch anspruchsvollen und philosophisch komplexen Stoff für eine breitere Hörer- und Leserschaft aufzubereiten. Bei einer Vielzahl von Gelegenheiten und in einer Vielzahl von (inzwischen klassisch gewordenen) Publikationen[8] entwarf VON HELMHOLTZ bestens verständliche nicht-EUKLIDische Modelle, um das Begründungsdefizit KANTs deutlich herauszustellen. Es waren vor allem diese detailreichen Gedankenexperimente für nicht-EUKLIDische Erfahrungswelten, welche die Kritik an KANT zur bestmöglichen Explizitheit brachten und zugleich vorbildhaft auf die Konstruktionsmethode für spätere mathematische Gedankenexperimente wirkte. Das VON HELMHOLTZsche Gegenargument lautet:

1. Wenn die Sätze der Geometrie a priori gelten, dann lassen sich keine anderen als EUKLIDische Erfahrungsräume vorstellen.

[7] Ausführlicher hierzu WILLE [2012, S. 513 – 536].

[8] Vgl. vor allem V. HELMHOLTZ [1866], [1868], [1876], [1878a], [1878b].

2. Nicht-EUKLIDische Erfahrungsräume sind vorstellbar.
3. Also können die Sätze der Geometrie nicht a priori gelten. (= Die geometrischen Axiome beanspruchen eine lediglich empirische Geltung.)

Mit dem Konditional der ersten Prämisse wird der kantische Anspruch zum Ausdruck gebracht, dass ein Wissen, das mit apodiktischer Gewissheit gilt, unter keinen denkmöglichen Umständen falsch sein kann. Da mit der zweiten Prämisse pointiert auf all jene Modellbildungen und Gedankenexperimente Bezug genommen wird, die uns unleugbar die Möglichkeit nicht-EUKLIDischer Räume darlegen, wird mittels Kontraposition auf die Falschheit von KANTs These geschlossen. Das Argument ist bestechend einfach.

Für die metaphysische Befassung mit der Mathematik hatte dies weitreichende Konsequenzen. Ausgehend vom Nachweis der logischen Möglichkeit nicht-EUKLIDischer Geometrien durch BOLYAI und LOBATSCHEWSKI war man nunmehr im Besitz eines philosophischen Arguments, das die epistemologisch ausgezeichnete Stellung der EUKLIDischen Geometrie in Zweifel zog. Die EUKLIDische blieb zwar in den Geschichtsbüchern die historisch erste Geometrie. Da nunmehr aber gezeigt schien, dass sie sich in ihrer prinzipiellen Geltung nicht mehr hinreichend von der Vielzahl ihrer Alternativen transzendentalphilosophisch unterscheiden ließ, konnte vollkommen zu Recht erwogen werden, dass die historisch erste Geometrie auch durchaus eine andere hätte sein können. Unstrittig schien indes, dass sich problemlos Erfahrungswelten intelligibel machen lassen, in denen definitiv eine nicht-EUKLIDische Raumgeometrie vorherrscht. EUKLIDizität wäre demnach gegebenenfalls in unserer, aber nicht in jeder möglichen Erwahrungswelt gegeben.

2.3 Neukantianer: nicht-EUKLIDische Räume sind nur EUKLIDisch vorstellbar

Es brauchte nicht lange, bis von philosophischer Seite Kritik an der VON HELMHOLTZschen Argumentationsstrategie formuliert wurde. Diese Form der Kritik war nicht die Trotzreaktion dogmatischer KANTianer (obgleich es auch solche gab), sondern sachlich durchaus berechtigt. VON HELMHOLTZ' Gegenargument benutzt die unausgesprochene Voraussetzung, dass der Ausdruck „vorstellen" in beiden Prämissen dasselbe besagt. Doch bereits die erste Erwiderung von JAN PIETER NICOLAAS LAND (1834–1897)[9] benutzte den Einwand, dass hier ein Quaternio-Terminorum-Fehlschluss vorliegt, d.h. mit dem Ausdruck „vorstellen" wird in beiden Prämissen jeweils ein anderer Begriff in Anspruch genommen. Während in der zweiten Prämisse „vorstellen" so viel besagt wie „sich durch eine mentale Repräsentation vergegenwärtigen" oder „imaginieren", bezieht sich der Ausdruck in der ersten Prämisse auf das „sich intelligibel machen", d.h. hier geht es um eine rein propositional geleitete Sachverhaltsdarstellung unter Wahrung aller Sinnbedingungen der philosophischen Rede. Das „nicht vorstellen können" im transzendentalphilosophischen Gebrauch bezieht sich auf die Unmöglichkeit, den sich zu vergegenwärtigenden Sachverhalt nicht präsuppositional konsistent fassen zu können. Das „nicht vorstellen können" im empirischen Verständnis bezieht sich auf das Unvermögen, etwas Bestimmtes nicht vermittels der Einbildungs- oder Vorstellungskraft vor das innere Auge zu rufen.

Dass beide Verwendungsweisen nicht zusammenfallen, zeigen umgehend die vermeintlichen Gegenbeispiele. Es stellte sich heraus, dass die metaphysisch relevante Frage nicht darin besteht, ob nicht-EUKLIDische Geometrien mathematisch modellierbar sind, sondern ob diese Modelle auch mit einem ausschließlich nicht-EUKLIDischen Wissensbestand ent-

9 LAND [1877].

worfen und entsprechend verstanden werden können. Für die didaktisch brillanten VON HELMHOLTZschen Gedankenexperimente gilt dies keineswegs. Ausnahmslos alle Modelle für nicht-EUKLIDische Geometrien, die wir in seinen Vorträgen und Veröffentlichungen antreffen, werden durchweg mit EUKLIDischen Mitteln beschrieben. So werden etwa positiv gekrümmte sphärische Welten als solche verständlich, weil wir sie als Oberflächen EUKLIDischer Kugeln betrachten. Ebenso wird das charakteristische Phänomen des sphärischen Exzesses klassisch über die Kreiszahl eingeführt, die es jedoch in Geometrien, in denen Umfang und Durchmesser eines Kreises in keinem konstanten Verhältnis zueinander stehen, nicht gibt. Die zweidimensionalen Welten sind jeweils als nicht-EUKLIDisch im dreidimensionalen EUKLIDischen Raum zu verstehen. Doch VON HELMHOLTZ modelliert damit keineswegs alternative nicht-EUKLIDische Erfahrungsräume, sondern er beschreibt Gegenstände nicht-EUKLIDisch in *unserem* Erfahrungsraum. Hier liegt eine „Verwechslung des Raumes mit Gebilden im Raume“[10] vor, es wird im konventionellen Raum ein Raumausschnitt mit nicht-konventionellen Mitteln beschrieben. Der Entwurf und die Verständigung nicht-EUKLIDischer Erfahrungswelten erfolgt bei VON HELMHOLTZ durchweg unter Inanspruchnahme illegitimer Mittel, denn um die metaphysische These von der EUKLIDizität eines jeden möglichen Erfahrungsraumes widerlegen zu können, dürfen im Besonderen keine EUKLIDischen Mittel zur Bereitstellung der Gegenbeispiele verwendet werden. Für die formale Betrachtung sind die Mittel zulässig, für die metaphysische Analyse indes nicht.

Die mathematische Modellbildung verfehlt als philosophisches Argumentationsmittel damit die erforderliche Begründungsrigorosität der metaphysischen Fragestellung. Der Gehalt der zu begründenden These, nicht-EUKLIDische Erfahrungswelten sind möglich, gerät in Widerspruch zu ihrem Begründungsvollzug, dass zur Konstruktion nicht-EUKLIDischer Modelle auf ein EUKLIDisches Hintergrundwissen zurückgegriffen werden muss. Logische Konsistenz und mathematische Modellierbarkeit reichen nicht aus, um zugleich epistemologische Möglichkeit im Sinne alternativer Erfahrungswelten zu gewährleisten. Für dieses Beweisziel wäre es erforderlich, die Besonderheiten der EUKLIDischen Geometrie einer Epoché zu unterwerfen, d.h. man müsste sich auf einen Argumentationsrahmen zurückziehen, dessen Wissensbestände die Geltung des Parallelenpostulats nachweislich weder voraussetzen noch implizieren. Erst der Nachweis einer theoretischen Einklammerung dieser Geltungsfrage bei gleichzeitigem Aufbau einer nicht-EUKLIDischen Erfahrungswelt würde ein potentielles Gegenbeispiel stiften. Doch dieser rein propositional geleitete Entwurf einer nicht-EUKLIDischen Welt müsste in Übereinstimmung mit den anspruchsvollen Gelingensbedingungen philosophischen Gedankenexperimentierens erfolgen. Die begriffliche Explikation müsste durchweg beschreibungskonsistent wie beschreibungsimmanent erfolgen, also ausschließlich mit nicht-EUKLIDischen Mitteln, die aus der Binnenperspektive des alternativen Szenarios verfügbar gemacht werden können. Keine der heutzutage verfügbaren nicht-EUKLIDischen Modellbildungen erfüllt diese Anforderungen. Allerdings wurden die meisten dieser auch nicht für erkenntnistheoretische Kontexte entworfen und unterliegen mithin auch nicht den besagten Forderungen.

Der systematische Defekt des beeindruckend klaren Hauptarguments von HERMANN VON HELMHOLTZ sollte nicht vergessen lassen, dass uns KANT ein Argument für die EUKLIDizität eines jeden Erfahrungsraumes schuldig geblieben ist und dieser Mangel auch nicht von seinen späteren Verteidigern behoben wurde. Die begründete Zurückweisung der VON

[10] LOTZE [1879, S. 265].

HELMHOLTZschen Kritik an KANT leistet keineswegs eine Verteidigung der kantischen Auffassung, sondern liefert wiederum ein offenes Feld, auf dem jede Antwort möglich scheint. Für die Metaphysik der Mathematik gibt es noch viel zu tun.

Literatur

[1] KANT, IMMANUEL (1911a): Kritik der reinen Vernunft (A = 1781), (Kant's gesammelte Schriften. Band IV). Berlin: Georg Reimer.
[2] KANT, IMMANUEL (1911b): Kritik der reinen Vernunft (B = 1787²), (Kant's gesammelte Schriften. Band III). Berlin: Georg Reimer.
[3] LAND, JAN PIETER NICOLAAS (1877): Kant's Space and Modern Mathematics. In: Mind 2(5), 38 – 46.
[4] LOTZE, HERMANN (1879): Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie (= System der Philosophie. Zweiter Theil: Drei Bücher der Metaphysik). Leipzig: Verlag von S. Hirzel.
[5] V. HELMHOLTZ, HERMANN (1866): Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Wiederabgedruckt in ders. (1883): Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann von Helmholtz. Band II. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, S. 610 – 617.
[6] V. HELMHOLTZ, HERMANN (1868): Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Wiederabgedruckt in ders. (1883): Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann von Helmholtz. Band II. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, S. 618 – 639.
[7] V. HELMHOLTZ, HERMANN (1876): Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Wiederabgedruckt in ders. (1896^4): Vorträge und Reden. Zweiter Band. Braunschweig: Vieweg und Sohn, S. 3 – 31.
[8] V. HELMHOLTZ, HERMANN (1878a): Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land. Wiederabgedruckt in ders. (1883): Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann von Helmholtz. Band II. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, S. 640 – 660.
[9] V. HELMHOLTZ, HERMANN (1878b): Die Tatsachen in der Wahrnehmung (nebst Beilagen). Wiederabgedruckt in ders. (1971): Philosophische Vorträge und Aufsätze. Berlin: Akademie-Verlag, S. 247 – 299.
[10] WILLE, MATTHIAS (2008): Beweis und Reflexion. Philosophische Untersuchungen über die Grundlagen beweistheoretischer Praxen. Paderborn: mentis.
[11] WILLE, MATTHIAS (2011): "Metamathematics" in Transition. In: History and Philosophy of Logic 32(4), S. 333 – 358.
[12] WILLE, MATTHIAS (2012): Transzendentaler Antirealismus. Grundlagen einer Erkenntnistheorie ohne Wissenstranszendenz. Berlin/Boston: Walter de Gruyter.

GREGOR NICKEL

Mathematik und Ethik – wechselseitige Sichtungen

> *In Unkenntnis dieser Gefahren lebten eigentlich nur die Mathematiker selbst und ihre Schüler, die Naturforscher, die von alledem so wenig in ihrer Seele verspüren wie Rennfahrer, die fleißig darauf los treten und nichts in der Welt bemerken wie das Hinterrad ihres Vordermanns.* ROBERT MUSIL

In seinem Jahrhundertroman *Der Mann ohne Eigenschaften* charakterisiert ROBERT MUSIL (1880–1942) treffend die Betriebsblindheit der mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung angesichts einer durch ebendiese Forschung in Gang gesetzten, gewaltigen gesellschaftlichen Umgestaltung [MUSIL 1952, S. 40]. Und in der Tat bleibt in Bezug auf die Mathematik eine normative Kontroverse bis heute weitgehend aus. Während mittlerweile eine etablierte und differenzierte Wissenschaftsethik den Diskurs über die und mit den Naturwissenschaften führt, erreicht dieser im Bereich der Formalwissenschaften allenfalls noch die Informatik. Dabei liegt der Versuch einer gegenseitigen Bezugnahme von Ethik und Mathematik bereits insofern nahe, als sowohl Moral – und damit auch deren Reflexion in der Ethik – als auch Mathematik in hohem Maße universelle Beobachtungsmittel sind. Dieser Universalität entsprechen zwei Blickrichtungen: Einerseits können Mathematik und Mathematische Forschung aus ethischer Perspektive beurteilt werden; in der umgekehrten Richtung kann die orientierende Rolle der Mathematik für die ethische Theoriebildung analysiert werden. Beide Blickrichtungen auf eine durchaus mögliche, intensiven Beziehung von Ethik und Mathematik werden im folgenden exemplarisch skizziert. In einem ersten Teil wird dies im historischen Kontext von Antike und früher Neuzeit aufgewiesen; dabei geht es vor allem um das jeweils kontrovers diskutierte Verhältnis von ethischer und mathematischer Rationalität. In einem zweiten Teil werden dagegen mit Blick auf die Gegenwart ethisch relevante Anwendungsfelder der Mathematik diskutiert.

1. Imitation oder Abgrenzung: zwei historische Kontroversen

Der Streit darum, inwieweit sich der ethische Diskurs am Vorgehen der Mathematik(er) zu orientieren habe, begleitet und prägt die westliche Geistesgeschichte. Bereits PLATON (427–347 v. Chr.), dessen Hauptinteresse sicherlich der individuellen Ethik und der politischen Philosophie galt, verbindet dieses mit einer dezidierten Hochschätzung der Mathematik. Folgerichtig weisen mehrere seiner Dialoge an Schlüsselstellen mathematische Erwägungen auf, etwa im *Menon* bei der Frage nach der (Lehr- und Lernbarkeit der) Tugend und in der *Politeia* bei der Frage nach der Gerechtigkeit. In die Reihe der „mathematisierenden Ethiker" gehört auch BARUCH DE SPINOZA (1632–1677), der eine am EUKLIDischen Vorbild orientierte *ethica more geometrico* schreibt, oder GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) mit seinen Bemühungen um eine *characteristica universalis*, einer formalen Universalsprache, die alle politischen und weltanschaulichen Streitigkeiten durch schlichtes Rechnen ersetzen soll. Den Extremfall einer solchen Orientierung an der Mathematik im 20. Jahrhundert stellt die gleichzeitige Formalisierung von Logik und Ethik durch PAUL LORENZEN und OSWALD SCHWEMMER dar. Logische Schlüsse, wie mathematische Beweise, aber auch ethische Argumentationen werden durch standardisierte Dialoge rekonstruiert. Beweisbar sind dann gerade die Sätze, für die es eine sichere Gewinnstrategie in diesen Dialogen gibt. Und auch moralische Normen sollen in einer solchen standardisierten Sprache erarbeitet werden.

Auf der Gegenseite stehen Positionen, die Ethik und Mathematik dezidiert voneinander abgrenzen, beginnend mit PLATONS Schüler und größtem Kritiker ARISTOTELES (384–322 v. Chr.); ebenso betonen BLAISE PASCAL (1623–1662) oder in ganz anderer Weise IMMANUEL KANT (1724–1804) die kategoriale Verschiedenheit von Mathematik und Ethik. Aber auch diese Positionen gewinnen gerade aus dem abgrenzenden Bezug auf die Mathematik Genauigkeit für ihre Beschreibung ethischer Argumente und Prinzipien. In beiden Fällen geht es um kein simples Verhältnis von Ethik und Mathematik (weder schlichte Identität noch banale Verschiedenheit). Zwei historische Miniaturen sollen dies im Folgenden illustrieren.

In PLATONS *Politeia,* seinem gewaltigen Hauptwerk, präsentiert SOKRATES eine parallele Beschreibung individueller und staatlicher Gerechtigkeit. Ein idealer, gerechter Staat kann nur unter der Leitung eines Philosophen-Königs entstehen und Stabilität gewinnen (ebenso ist individuelle Gerechtigkeit nur bei dauerhafter Herrschaft der Vernunft über die anderen Seelenkräfte möglich). Ausführlich wird der Bildungsgang der künftigen Herrscher dargestellt, und hier erhält die Mathematik, aufgegliedert in Arithmetik, Geometrie, Harmonielehre und Astronomie, eine gewichtige Rolle im Curriculum. Diese Schlüsselrolle wird auf zweierlei Weise begründet. Zum einen seien arithmetische und geometrische Kenntnisse von entscheidender Bedeutung für die Kriegsführung: Wer seine Truppen nicht zählen, wer ein Lager nicht abstecken und das Heer nicht zur Schlacht ausrichten könne, dem dürfe die Staatsführung nicht anvertraut werden.[1] Viel wichtiger allerdings seien die mathematischen Fächer als Vorübung zur Philosophie, denn ihr Studium nötige die Lernenden zu einer Abkehr vom sinnlich Wahrnehmbaren und zur Hinwendung zu dem, was nur der Verstand erkennen könne. Die Geometrie etwa verwende zwar in den Sand gezeichnete Figuren, spreche aber gar nicht über den mit den leiblichen Augen wahrnehmbaren Sand, sondern über ideale Figuren (Kreise, Dreiecke etc.), die nur für den Intellekt erkennbar seien. Das für den Staatslenker entscheidende Wissen um das Gerechte, das Gute, das Wahre beziehe sich aber gerade auf einen solchen Bereich idealer, unveränderlicher, ewiger Formen und unterscheide sich wesentlich von den stets schwankenden, allenfalls zufällig zutreffenden Meinungen über Werdendes und Vergehendes, die sich auf Sinneseindrücke stützen. Mit der Arithmetik beispielsweise sollen sich die künftigen Herrscher demnach befassen,

> *(…) nicht auf gemeine Weise, sondern bis sie zur Anschauung der Natur der Zahlen gekommen sind durch die Vernunft selbst, nicht Kaufs und Verkaufs wegen wie Handelsleute und Krämer darüber nachsinnend, sondern zum Behuf des Krieges und der Seele selbst und der Leichtigkeit ihrer Umkehr von dem Werden zum Sein und zur Wahrheit. (Politeia, S. 525c)*

[1] Dass die Geometrie tatsächlich von strategischer Relevanz war, zeigt der durchschlagende Erfolg der „schiefen Schlachtordnung“, die der thebanische Stratege EPAMINONDAS erstmals eingeführt haben soll.

Bereits die Zeitgenossen PLATONs nahmen an einer so engen Verflechtung von Mathematik und Ethik Anstoß. ARISTOTELES etwa berichtet über einen von PLATON angekündigten öffentlichen Vortrag über das Gute. Jedermann sei gekommen in der Erwartung, er würde über das sprechen, was die Leute normalerweise als „gut“ bezeichneten. PLATONs Vortrag habe jedoch vor allem von Mathematik gehandelt, von Zahlen, Geometrie und Astronomie. Und schließlich habe er behauptete, dass Gott die Einheit sei. Dem Publikum sei dies hoffnungslos paradox erschienen, und im Ergebnis sei der Vortrag von einigen ausgezischt worden und andere seien voll der Verachtung gewesen.[2] Dieser Bericht passt gut zur grundsätzlichen Kritik des ARISTOTELES, PLATON habe der Mathematik einen viel zu großen Stellenwert für die Diskussion der Fragen von Ethik und Politik eingeräumt. Diese seien jedoch einander vollkommen fremde Bereiche:

> *Ein Beweis für das Gesagte ist, dass man zwar in der Jugend schon ein Geometer, Mathematiker und überhaupt in solchen Dingen erfahren sein kann, nicht aber klug. Die Ursache ist, dass die Klugheit sich auf das Einzelne bezieht und dieses erst durch die Erfahrung bekannt wird. Ein junger Mensch kann aber diese Erfahrung nicht haben, denn sie entsteht nur in langer Zeitdauer. (Nikom. Ethik, VI – 8, S. 1142a)*

Der systematische Grund für diese Trennung liegt darin, dass ARISTOTELES in der von PLATON übernommenen Grundunterscheidung zwischen Veränderlichem und Unveränderlichem der Ethik einen grundlegend anderer Platz zuweist. Das Prinzip für eine gute Handlung könne nämlich nicht im Unbeweglichen (PLATONs Idee des Guten) gesucht werden, denn alles,

> *was an sich und nach seiner eigenen Natur gut ist, ist ein Zweck (…) der Zweck aber ist (…) Zweck einer Handlung und jede Handlung ist mit Bewegung verbunden. Darum kann sich also in dem Unbeweglichen dies Prinzip und das Gute an sich nicht finden. Daher wird auch in der Mathematik nicht aus dieser Ursache bewiesen, und kein Beweis geht darauf zurück, dass es so besser oder schlechter sei. (Metaphysik III – 1, S. 996a)*

Eine ganz ähnliche Konstellation lässt sich zwischen RENÉ DESCARTES (1596 – 1650) und BLAISE PASCAL (1623 – 1662) beobachten. DESCARTES ist auf der Suche nach einer zweifelsfreien, absolut begründeten Einheitswissenschaft, die die endlosen philosophischen (und religiösen) Streitigkeiten ein für allemal beenden soll. Einzig die Mathematik scheint hier eine Ausnahme zu bilden:

> *Ganz besonders gefielen mir die mathematischen Wissenschaften wegen der Sicherheit und Klarheit ihrer Gründe, doch bemerkte ich noch nicht ihren wahren Gebrauch; ich meinte, dass sie bloß den mechanischen Künsten dienten, und verwunderte mich deshalb, dass man auf so feste und unerschütterliche Grundlagen nichts Erhabeneres gebaut hatte. Gleichsam im Gegensatz dazu verglich ich die moralphilosophischen Schriften der alten Heiden mit sehr stolzen Palästen, die nur auf Sand und Schlamm gebaut waren. (Discours I, S. 8)*

[2] Vgl. ARISTOXENOS: Elementa Harmonica. ed. h. S. Macran. Oxford 1902, II. S. 30 – 31. Siehe auch Rafael Ferber: Warum hat PLATON die „ungeschriebene Lehre“ nicht geschrieben? Beck, München 2007.

Wieder sind es die verwirrenden, täuschenden Sinneseindrücke, die als erstes kritisiert, ausgeblendet, vergessen werden müssen. Und wieder ist es die Mathematik, in der ein solches „reines" Denken bereits als mustergültig erachtet wird. DESCARTES' Zeitgenosse und Landsmann PASCAL kritisiert diese Auffassung vehement: es gebe gerade nicht eine allzuständige Einheitswissenschaft, die Prinzipien für die einzelnen Gegenstandsbereiche seien fundamental verschieden und ebenso der jeweils geforderte Teil des menschlichen Urteilsvermögens:

> *Die Prinzipien des mathematischen Geistes sind handgreiflich, aber derart abseits der alltäglichen Anwendung, dass man, weil man an sie nicht gewöhnt ist, Mühe hat, sich ihnen zuzuwenden; sobald man sich aber ihnen zuwendet, übersieht man die Prinzipien vollständig, und man müsste einen völlig falschen Verstand haben, wenn man auf Grund von Prinzipien, die so klar sind, (…) falsch denken sollte. (Pensées, S. 76)*

Deutlich davon verschieden sei bereits der für die Beurteilung naturwissenschaftlicher Phänomene nötige *esprit de justesse*. Für das menschliche Miteinander sei schließlich der Feinsinn, *esprit de finesse*, zuständig, und dessen Prinzipien seien wiederum ganz anders als die oben für den *esprit géométrique* charakterisierten, sie seien nämlich

> *(…) allgemein im Gebrauch und jedem gegenwärtig. Man braucht sich nur nach ihnen umzusehen, ohne sich Gewalt anzutun; nichts ist nötig als ein scharfes Auge, aber es muss scharf sein; denn die Prinzipien sind so verstreut, dass es fast unmöglich ist, keines zu übersehen. (a. a. O.)*

Und so sei es kein Wunder, dass eine Kombination dieser höchst unterschiedlichen Vermögen kaum je zu finden sei:

> *Und so ist es selten, dass die Mathematiker feinsinnig und die feinsinnigen Köpfe Mathematiker sind, weil die Mathematiker die Fragen des Feinsinns mathematisch behandeln wollen und sich lächerlich machen, wenn sie mit Definitionen beginnen wollen (…) Im Gegensatz hierzu verschlägt es den Feinsinnigen, die so daran gewöhnt sind, mit einem Blick zu urteilen, derart den Atem, – wenn man ihnen Lehrsätze vorlegt, von denen sie nichts verstehen und wo man, um einzudringen, erst die so unfruchtbaren Definitionen und Prinzipien durchschreiten muss, die sie so genau zu sehen nicht gewohnt sind (a. a. O.)*

Die hier an Hand zweier Antagonistenpaare charakterisierte Kontroverse dauert an. Die Frage, inwiefern eine am mathematischen Vorgehen mehr oder weniger stark orientierte Diskussion ethischer (und politischer) Probleme dem Gegenstand angemessen ist, stellt sich immer wieder neu, um jeweils neu kontrovers beantwortet zu werden. Zumindest dies unterscheidet die (Meta)ethik wesentlich von einer Mathematik, in der nach DAVID HILBERTs (1862 – 1943) Überzeugung jedes Problem einer „vollen Erledigung fähig" ist, sei es durch Lösung im positiven Sinne, sei es einen Beweis des notwendigen Misslingens aller Lösungsversuche.[3]

[3] Vgl. HILBERT [1922, S. 23] und den Beitrag von RALF KRÖMER in diesem Band.

2. Aspekte einer Fachethik der Mathematik

Zweifellos erleben wir derzeit eine Phase der Dominanz angewandter Mathematik. Dies betrifft nicht nur Rangordnung und Motivation innerhalb der Disziplin selbst, sondern auch die Kommunikation nach außen. Mathematik wird heute wesentlich durch Verweis auf ihre Anwendbarkeit legitimiert, man charakterisiert Mathematik beispielsweise als „Schlüsseltechnologie“. Dem Trend innerhalb der Disziplin entspricht eine zunehmende Mathematisierung von Wissenschaften, Technik und Gesellschaft. In der Tat prägen nicht-triviale mathematische Resultate und Verfahren wesentliche Bereiche der modernen Gesellschaft. Spätestens jedoch wenn die Anwendbarkeit als charakteristische Eigenschaft hervorgehoben wird, sollte auch ein ethischer Diskurs einsetzen. Wer sich als nützlich empfiehlt, muss auch über „Risiken und Nebenwirkungen“ Auskunft geben.

Die Situation ist heute m. E. anders als in den frühen 1980er-Jahren; hier waren es die allgemeinen Fragen der 68er-Generation nach der gesellschaftlichen Relevanz einer jeden Wissenschaft, also auch der Mathematik, auf die vereinzelte Stimmen (vorwiegend aus der Mathematikgeschichte) antworteten [vgl. Bos 1978]. Gerade weil Mathematik inzwischen immer tiefer in alle gesellschaftlichen Bereiche eingreift, stellen sich heute von der Sache her ganz konkrete und allgemeine wissenschaftsethische Fragen. Dies soll nun in aller Kürze erläutert werden.

Schaut man hinter die Kulissen einer modernen Gesellschaft, so zeigt sich ein noch nie da gewesenes Ausmaß indirekter und direkter Mathematisierung. Es ist wohl kaum übertrieben, Mathematik in ihrer Wirkung als eine, vielleicht die „Leitkultur“ der Moderne zu beschreiben. Dies gilt natürlich zunächst für die fast omnipräsente Technik, die nur auf der Basis naturwissenschaftlicher und damit mathematisch formulierter Theorie möglich ist. In der Tat kann man der Diagnose Robert Musils zustimmen, dass „die Mathematik wie ein Dämon in alle Anwendungen unseres Lebens gefahren ist“ [Musil 1952, S. 39]. Dies geht einher mit einer sich immer weiter öffnenden Schere zwischen der Kompliziertheit der verwendeten Technik und dem mathematischem Verständnis der Anwender – sei es im Alltag, sei es in hochspezialisierten Berufen. Sprichwörtlich war schon vor 30 Jahren die mindestens ein Informatik- oder Mathematikstudium voraussetzende Aufgabe, einen handelsüblichen Videorekorder zu programmieren. Und heutzutage ist kaum noch jemand in der Lage, die Menüsteuerung der eigenen Kaffeemaschine zu überblicken. Weitaus brisanter ist allerdings, dass vermutlich kein Arzt die in seine diagnostischen Instrumente integrierte Mathematik wirklich versteht, kein entwickelnder Ingenieur ein komplexes technisches Produkt ganz durchschaut. Die weit reichende Prägung der Lebenswelt durch den Einsatz von Computern stellt bereits eine direktere Form der Mathematisierung dar. Hier stellt sich unter anderem die Frage, welche Entscheidungen künftig durch „Expertensysteme“ maschinell berechnet werden sollen, und wer anschließend dafür die Verantwortung übernehmen kann. Als Beispiel sei nur die bereits recht weit entwickelte, computergestützte medizinische Diagnostik genannt.

Kaum zu überschätzen, jedoch oft übersehen ist der direkte Einfluss der Mathematik auf soziale und kulturelle Gegebenheiten der modernen Gesellschaften – ein Einfluss, der durch die derzeitige Ökonomisierung verschiedenster Lebensbereiche noch deutlich zunimmt. Verfolgt man auf politischer Ebene beispielsweise die Diskussion um demokratische Wahlverfahren, um Gesundheits-, Renten- und Steuersysteme so wird deutlich, dass unter der Oberfläche des parteipolitischen Streites eine nur von wenigen verstandene Mathematik versteckt ist; allerdings nicht als unbeteiligte Beschreibungssprache vorgegebener Verhältnisse, sondern als Vorrat von möglichen Spielregeln für die Gesellschaft. Eine „Rentenformel“ ist kein deskriptives Naturgesetz, sondern eine mathematisierte Verhaltensregel. In der Konsequenz ergibt sich die Gefahr eines sich stetig vergrößernden Demokratiedefizits. Anstatt des von allen gewählten Parlaments entscheiden schließlich Expertengremien, die im besten Fall wissenschaftlich, nicht aber demokratisch legitimiert sind.

Der zunehmende Einsatz mathematischer Methoden im Rahmen der Ökonomie und insbesondere in der Finanzwirtschaft wirft schließlich in doppelter Weise ethische Fragen auf. Zum einen sind die direkten Auswirkungen der Finanzmathematik auf das Wirtschaftsgeschehen inzwischen mehr als deutlich. Hier stellen sich ziemlich analog zur Situation in Naturwissenschaft und Technik Fragen nach einem verantworteten Einsatz handlungsrelevanter und wirkmächtiger Instrumente. Einer ethischen Debatte kann leicht ausweichen, wer behauptet, lediglich eine neutrale Sprache zur Beschreibung für ein von dieser Sprache vollkommen unabhängiges Geschehen zu entwickeln. Dabei wird jedoch ausgeblendet, dass finanzmathematische Konzepte wesentlich auch dazu dienen, neuartige Handlungs- bzw. Handelsmöglichkeiten überhaupt erst zu schaffen – entsprechend der auf naturwissenschaftlicher Forschung basierenden Technik, deren Einsatz nicht mehr wertneutral erfolgen kann. Zudem ist bereits die mehr oder weniger adäquate Deskription und Analyse einer Marktsituation ein handlungsleitendes Mittel für denjenigen, der über diese Deskription verfügt. Die hierdurch erfolgende Rückkopplung von der Beschreibungsebene ins System selbst ist nicht nur theoretisch interessant, sondern auch ethisch relevant. Zum anderen aber wird innerhalb der mathematischen Beschreibung unter der Metapher des *homo oeconomicus* eine keineswegs unumstrittene, anthropologische Perspektive (mehr oder minder explizit) vorausgesetzt. Auch hier könnte sich die mathematisierte Ökonomie auf eine scheinbar neutrale Position zurückziehen, bei der die Voraussetzungen als (rein deskriptiver) Modellrahmen einer ethischen Bewertung entzogen werden. Gleichwohl wird häufig mit einer solchen Formalisierung der Anspruch verbunden, wesentliche Aspekte menschlicher Rationalität adäquat abgebildet zu haben. Wer sich dem vorausgesetzten Handlungsschema nicht fügt, gilt als „irrational“ – auch hier müsste diskutiert werden, inwiefern ein deskriptiver bzw. normativer Anspruch vorliegt. Schließlich aber können – motiviert durch die ökonomische „Deskription“ – die wirtschaftlich-sozialen Rahmenbedingungen so gesetzt werden, dass ein Anpassungsdruck hin zu einem der vorausgesetzten Rationalitätsform entsprechenden Verhalten entsteht, das dann *ex post* das gewählte Modell zu rechtfertigen hilft. Forderungen nach einer stärkeren Integration ökonomischer Themen einschließlich der Wirtschaftsmathematik in das schulische Curriculum werden seit einiger Zeit vermehrt gestellt.[4] Hier scheint der Mathematikunterricht den passenden Rahmen zu bieten. Dies darf allerdings keinesfalls dazu führen, ökonomische Themen gleichsam im diskursfreien Raum zu unterrichten.

Insofern der Mathematik in den beiden angesprochenen Feldern – Technik und Sozio-Ökonomie – eine Schlüsselrolle zukommt, wächst ihr als institutionalisierter Wissenschaft ein entsprechendes Maß an Verantwortung und damit an Diskursverpflichtung zu.

Bereits DAVID HILBERT hatte den Bildungswert der Mathematik vorwiegend in „ethischer Richtung“ gesehen, insofern sie „das Selbstvertrauen zum eigenen Verstand [weckt], die kritische Urteilskraft, welche den wahrhaft gebildeten von dem im bloßen Autoritäts-

---

[4] Vgl. P. Daume: Finanzmathematik im Unterricht. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009.

glauben Befangenen unterscheidet." [HILBERT 1922, S. 2] Neben diese sicherlich zurecht angeführte „direkte" ethische Relevanz unmittelbaren mathematischen Tuns sollte allerdings eine vom Mathematischen kritische Distanz wahrende, ethische Reflexion auf die (gesellschaftlichen wie auch geistesgeschichtlichen) Folgen der Mathematik treten.

Literatur

[1] BOS, H.J.M. (1978): Was lehren uns historische Beispiele über Mathematik und Gesellschaft? Zentralblatt f. Didaktik d. Mathematik, 10-2 (1978), S. 69 – 75.

[2] BOOß-BAVNBEK, B., HØRUP, J. (2003): Mathematics and War. Birkhäuser, Basel.

[3] DESCARTES, R. (2015): Entwurf der Methode. Übers. und hg von C. Wohlers. Meiner, Hamburg.

[4] HILBERT, D. (1988): Wissen und mathematisches Denken. Vorlesung 1922, ausgearbeitet von W. Ackermann. Hg. von C.-F. Bödigheimer, Göttingen.

[5] KAMBARTEL, F. (1972): Ethik und Mathematik, in: M. Riedel (Hg.), Die Rehabilitierung der praktischen Philosophie, Freiburg, S. 489 – 503.

[6] LORENZEN, P., SCHWEMMER, O. (1973): Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie. BI, Mannheim.

[7] MAZLIAK, L., TAZZIOLI, R. (2009): Mathematicians at war. Volterra and his French colleagues in World War I. Springer, Berlin.

[8] MUSIL, R. (1952): Der Mann ohne Eigenschaften, Hamburg.

[9] NICKEL, G. (2006): Zwingende Beweise – zur subversiven Despotie der Mathematik. In: J. Dietrich, U. Müller-Koch (Hrsg.): Ethik und Ästhetik der Gewalt. Mentis Verlag, Paderborn, S. 261 – 282.

[10] NICKEL, G. (2006): Ethik und Mathematik – Randbemerkungen zu einem prekären Verhältnis. Neue Zeitschrift für Systematische Theologie u. Religionsphilosophie 47 (2006), S. 412 – 429.

[11] NICKEL, G. (2007): Mathematik und Mathematisierung der Wissenschaften – Ethische Erwägungen. In: J. Berendes: Autonomie durch Verantwortung. mentis Verlag, Paderborn, S. 319 – 346.

[12] NICKEL, G. (2012): „Stör mir meine Kreise nicht!" Mathematik und die Tübinger Zivilklausel. In: T. Nielebock, S. Meisch, V. Harms (Hrsg.): Zivilklauseln für Forschung, Lehre und Studium. Nomos, Baden-Baden, S. 225 – 236.

[13] NICKEL, G. (2014): Finanzmathematik – Prinzipien und Grundlagen? Nachruf auf einen Zwischenruf. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 4 (2014), S. 97 – 105.

[14] PASCAL, B. (2013): Gedanken über die Religion. Hg. von K.-M. Guth, aus dem Frz. von A. Blech. Hofenberg, Berlin.

SUSANNE SPIES

„Sehr viel für Herz und Seele" – zentrale Fragen der Mathematikästhetik

> *Hierzu möchte ich aus meiner eigenen, tiefsten Erfahrung bekennen, daß ich in der Mathematik […] in immer steigendem Maße die Merkmale einer Kunst und damit sehr viel für Herz und Seele sehe. [HASSE 1952, S. 15]*

Wie hier der Algebraiker HELMUT HASSE (1898 – 1979), weisen Mathematiker nicht selten auf den Kunstcharakter ihrer Wissenschaft, die Möglichkeit subjektiv-emotionaler Erlebnisse im Umgang mit Beweisen und Theoremen oder schlicht deren Schönheit hin. Damit werden Aspekte zur Beschreibung herausgestellt, die mindestens im öffentlichen Bild von Mathematik aber auch im mathematikphilosophischen Diskurs und nicht zuletzt im schulischen Mathematikunterricht nicht oder nur am Rande vorkommen. Dass sich eine eingehendere Beschäftigung mit dem Phänomen jedoch sowohl im Rahmen der Mathematikphilosophie auf der Suche nach einer adäquaten Beschreibung mathematikspezifischer Produkte und Prozesse als auch für die individuelle Auseinandersetzung mit den Gegenständen der Mathematik lohnt, soll der folgende Einblick in die Mathematikästhetik zeigen. Eine Aufgabe der Ästhetik der Mathematik besteht in der systematischen Beschreibung und Erforschung der der Mathematik zugeschriebenen Schönheit und ihres Kunstcharakters. Hier stellt sich immer auch die Frage, in wieweit es sich dabei um genuin ästhetische Werturteile handelt und ob der Mathematik tatsächlich ein Kunststatus zugeschrieben werden kann. Facetten dieser grundsätzlichen Fragen sollen die folgenden Ausführungen leiten.

1. Das Objektive im mathematischen Schönheitsbegriff

Wenn Mathematiker z. B. in Abhandlungen über ihre Forschungsarbeit oder auch in populärwissenschaftlichen Arbeiten über die Mathematik die Schönheit ihrer Werke belegen möchten, dann präsentieren sie einerseits Beispiele[1] und andererseits versuchen sie, die Schönheit mit einer Liste weiterer Eigenschaften, die diese Beispiele ihres Erachtens auszeichnen, zu charakterisieren. Die systematische Auswertung[2] zeigt, dass bestimmte Charakteristika immer wieder als ästhetisch wirksam benannt werden. Dazu zählen u. a. die *Tragweite* und die *Ökonomie* mathematischer Sätze oder Argumentationsgänge. Die besondere Tragweite schöner Mathematik zeigt sich dabei einerseits in der Anwendbarkeit des zugrunde liegenden Vorgehens über den Einzelfall hinaus *(weitreichende Heuristik)* und andererseits in einem Beziehungsreichtum zwischen den verschiedenen mathematischen Diszipli-

---

1 Zu den immer wieder angeführten „Klassikern" zählen neben der EULER-Formel ($e^{i\pi} + 1 = 0$) auch die euklidischen Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ und für die Unendlichkeit der Primzahlmenge.

2 Für eine ausführliche Erarbeitung der Eigenschaftskomplexe mit Einzelnachweisen siehe SPIES [2013, Kap. 2]. Weitere Darstellungen der Charakteristika sowie deren Konkretisierung an schulrelevanten Beispielen finden sich in SPIES [2012] sowie in SCHELLDORFER und SPIES [2012].

nen *(innermathematische Vernetzung)*. Darüber hinaus zeichnet sich etwa ein schöner Beweis durch eine bestimmte Einfachheit oder Kürze in Bezug auf die Tragweite oder auch in Bezug auf die Komplexität des zugrunde liegenden Sachverhaltes und damit durch eine besonders ökonomische Argumentation aus. Was dabei jedoch als „einfach" gilt, ist naturgemäß stark von den Vorkenntnissen und -erfahrungen des wertenden Subjekts abhängig und kann mithin eher als subjektive Zugänglichkeit beschrieben werden. Auch ob und bis zu welchem Grad die Tragweite wahrgenommen werden kann, ist abhängig vom Vorwissen des Rezipienten und beispielsweise davon, inwiefern ein Gegenstand isoliert oder in seinen Vernetzungen gelernt wird. Bei Tragweite und Ökonomie handelt es sich also um objektimmanente Eigenschaften, deren Wahrnehmung gewisser intellektueller Voraussetzungen bedarf. Diese die Objekte und das Rationale betreffenden Facetten mathematischer Schönheitsurteile können aus der Sicht der allgemeinen Ästhetiktheorie zu negativen Urteilen führen, scheinen sie doch darauf hinzuweisen, dass es sich hier nicht um genuin ästhetische Werturteile handelt. So geht bereits IMMANUEL KANT (1724 – 1804) in der *Kritik der Urteilskraft*, seiner Hauptschrift zur Ästhetik, kritisch mit Schönheitsurteilen über Mathematik um:

> *Man ist gewohnt, die erwähnten Eigenschaften, sowohl der geometrischen Gestalten, als auch wohl der Zahlen, wegen einer gewissen, aus der Einfachheit ihrer Konstruktion nicht erwarteten, Zweckmäßigkeit derselben a priori zu allerlei Erkenntnisgebrauch Schönheit zu nennen […]. Allein es ist keine ästhetische Beurteilung, durch die wir sie zweckmäßig finden […]. Man müsste sie eher eine relative Vollkommenheit, als eine Schönheit der mathematischen Figuren nennen. [KANT 1963, § 62]*

Die Eigenschaften, auf die sich KANT hier bezieht, konkretisiert er vorher an Beispielen aus der EUKLIDischen Geometrie. Dabei geht er etwa den Kreis, als begrifflich sehr einfach fassbaren Gegenstand ein, der etwa im Rahmen von Konstruktionsproblemen zur Lösung für eine Vielzahl einzeln betrachtet schwer zugänglicher Probleme genutzt werden kann. Außerdem hebt er die Eigenschaft des Kreises hervor, unendlich viele mögliche Lösungen auf einmal fassen zu können, etwa als geometrischer Ort *aller* rechtwinkliger Dreiecke über einer gegebenen Grundlinie (siehe Kasten). Es sind somit also (Facetten von) Tragweite und Ökonomie, die KANT hier als Vorzüge des Kreises nennt und u. a. wegen der verstandesmäßigen Zugänglichkeit eben nicht als Facetten von Schönheit sondern eher als „relative Vollkommenheit" bezeichnet sehen möchte.

2. Vom Zusammenspiel epistemischer und emotionaler Erlebnisse

Neben den beschriebenen und aus ästhetischer Sicht mindestens problematischen Eigenschaftskomplexen Tragweite und Ökonomie, werden weitere weit weniger objektbezogene Charakteristika immer wieder genannt: So wird häufig die Klarheit schöner Mathematik hervorgehoben, die es erlaubt, den Sachverhalt zu „durchschauen" und zu einem tiefen Verstehen zu gelangen. Außerdem wird häufig von Aha!-Erlebnissen im Umgang mit schöner Mathematik berichtet. Die Einsicht stellt sich dabei plötzlich ein und die Zusammenhänge und insbesondere das „Warum" scheint „auf einen Blick" offen zu liegen. Ob sich ein solches Aha! einstellt und wie dieser erlebt wird, hängt stark von der Situation und der (emotionalen) Verfasstheit des Rezipienten ab: Ist das behandelte schöne mathematische Problem etwa Teil einer von Unlust und Zeitdruck begleiteten Übungseinheit, wird es schwerlich zu Aha!-Erlebnissen kommen. Können diese jedoch evoziert werden, wirken sie nachhaltig sinnstiftend [vgl. LILJEDAHL 2005].

Die besonderen Arten des Verstehens im Rahmen mathematisch-ästhetischer Erlebnisse können im Eigenschaftskomplex der *epistemischen Transparenz* zusammengefasst werden und verweisen darauf, dass hier ein epistemisches Moment zum integralen Bestandteil des ästhetischen Urteils wird. Die unter diesen Eigenschaftskomplex gefasste besondere Art des tiefen Verstehens hebt sich dabei von dem eine ästhetische Erfahrung erst ermöglichenden Wissen um die Sachverhalte und auch vom intellektuellen Erfassen von Tragweite und Ökonomie ab. Vielmehr wird das plötzliche, umfassende, tiefe Verstehen in Form von Aha!-Erlebnissen zum ästhetischen Erlebnis selbst. Begleitet oder auch allererst wahrgenommen wird ein solches ästhetisch wirksames Verstehen von Mathematik durch meist positive Gefühle. Auch die zunächst objektiven Eigenschaftskomplexe wie Ökonomie und Tragweite werden häufig durch bestimmte Gefühle qualifiziert. Generell kann festgestellt werden, dass Mathematiker, wenn sie über die Schönheiten ihrer Wissenschaft berichten, eine sehr emotionale Sprache wählen, wie es u. a. LEONE BURTON bei der Auswertung einer Interviewstudie aus der mathematischen Forschungspraxis feststellt:

> *The mathematicians discussed aesthetics […] in terms that were emotive, full of expressed feelings. [BURTON 2004, S. 63]*

Bitte Burton 2004 mit in die Literaturliste aufnehmen.

Was ist schön am Satz des THALES?

Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn C auf einem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt.

Bereits im alten Ägypten war der sogenannte Satz des THALES bekannt. Auch ist er ein traditionsreiches Stück der Schulgeometrie. Doch hält er auch den Charakteristika mathematischer Schönheit stand?

Tragweite und Ökonomie: Innerhalb der EUKLIDischen Geometrie kann der Zusammenhang von Dreiecken und Kreisen zur Lösung verschiedener klassischer Konstruktionsprobleme genutzt werden. Beispielsweise zum Auffinden der Tangente an einen Kreis durch einen außerhalb liegenden Punkt. Auch kann man mit seiner Hilfe die Quadratwurzel einer reellen Zahl konstruieren und als Anwendung dieser Konstruktion die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel zweier positiver Zahlen x und y $\left(\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}\right)$ geometrisch zeigen – ein Beispiel innermathematischer Vernetzung. Der Satz macht darüber hinaus – umformuliert – eine Aussage über alle Dreiecke über einem beliebigen Halbkreis und „erschlägt“ so in einer leicht zugänglichen Aussage unendlich viele Fälle.

Epistemische Transparenz: Insbesondere mit Hilfe der dazugehörigen Zeichnung lässt sich der Zusammenhang auf einen Blick erfassen. Ein Verstehen um den Sachverhalt kann sicher durch das nachvollziehen eines voraussetzungsarmen Beweises einerseits und der Anwendung des Satzes bei Konstruktionsproblemen andererseits unterstützt werden. Ob es dabei auch zu Aha!-Erlebnissen kommt, hängt besonders von den Vorerfahrungen des Rezipienten ab. Ähnliches gilt auch für die

Emotionale Wirksamkeit: Dass tatsächlich jedes noch so „schiefe“ Dreieck über dem gegebenen Durchmesser rechtwinklig ist, kann mindestens bei der Erstbegegnung zum Erstaunen führen, was durch den aktiven experimentellen Umgang z. B. unterstützt durch eine dynamische Geometriesoftware angebahnt werden kann. Insbesondere der Beweis kann darüber hinaus das Gefühl der Unausweichlichkeit vermitteln: Einmal das fragliche Dreieck mit Hilfe des Radius in zwei gleichschenklige Dreiecke unterteilt, führen die Basiswinkeleigenschaft sowie die Innenwinkelsumme in Dreiecken ohne Umwege zur Aussage.

Diese *emotionale Wirksamkeit* kann als weiterer Aspekt schöner Mathematik festgehalten werden. Dabei sind es bestimmte Emotionen, die immer wieder genannt werden. Das ist zum einen die *Überraschung* und das *Erstaunen* über die erkannte Tragweite und Ökonomie. Überraschung können aber auch nicht erwartete Wendungen im Argumentationsgang auslösen, die dann wiederum auf erstaunliche Weise zum Ziel führen:

Bitte Weth 2007 mit in die Literaturliste aufnehmen.

> *Derartige „trickreiche" aber logisch korrekte Gedankengänge lesen sich für einen Interessierten wie für andere ein logisch gut aufgebauter Kriminalroman; für den Interessierten bieten sie einfach einen Genuss und werden als „schön" empfunden. [WETH 2007, S. 71]*

Zum anderen ist die *Unausweichlichkeit* eine häufig in diesem Zusammenhang genannte emotionale Wirkung schöner Mathematik, die insbesondere mit der epistemischen Transparenz einhergeht. Im tiefen Verstehen oder einem Aha!-Erlebnis stellt sich gleichzeitig zum rationalen Erfassen auch das Gefühl ein, dass ein Resultat oder ein bestimmter Schluss nun unumgänglich ist. Über die rein qualifizierende Aufgabe bekannter Emotionen für andere (rational fassbare) Eigenschaften schöner Mathematik hinaus wird auch von einem für mathematisch-ästhetisch Erfahrungen spezifischen Gefühl berichtet. So identifiziert etwa der Mathematiker und Philosoph HENRI POINCARÉ (1854–1912) ein „wahrhaft Ästhetisches Gefühl", welches im Prozess des mathematischen Schaffens notwendig ist, um aus der unüberschaubaren Vielfalt von Kombinationen etwa bei der Suche nach allgemeinen Strukturen die zielführende auszuwählen [vgl. POINCARÉ 1914, S. 41 ff.]. Auch aus Rezipientensicht beschreiben z. B. DAVIS und HERSH ein „Gefühl starken, persönlichen ästhetischen Vergnügens" [DAVIS und HERSH 1994, S. 176] und damit eine spezifisch ästhetische Emotion. Und Jonathan Borwein spricht vom „aesthetic buzz" [BORWEIN 2006, S. 25], was wiederum Beschreibungsversuchen des Begriffs der „ästhetischen Erfahrung" in der allgemeinen Ästhetik nahe kommt.

Dem mathematisch-ästhetischen Werturteil muss naturgemäß ein grundsätzliches, rationales Erfassen der betrachteten Mathematik vorausgehen. Auch werden besondere Arten des Verstehens als integrales epistemisches Moment mathematisch-ästhetischer Erlebnisse beschreiben. Für die Wahrnehmung des Ästhetischen ist jedoch die emotionale Wirkung von besonderer Bedeutung.[3] Das Zusammenspiel von Rationalem und Emotionalem, das zur mathematischen Schönheit führt, kann somit als *emotional zugängliches, rational vermitteltes Erleben* beschrieben werden.

3. Das Problem der sinnlichen Wahrnehmung

Die geläufige Grundidee, die Gegenstände der Mathematik als abstrakte Entitäten zu betrachten, führt nicht selten dazu, dass sie vollständig aus dem Aufmerksamkeitsbereich aktueller Ästhetikkonzeptionen rücken. Wird Ästhetik im Wortsinne als Aisthesis (Theorie der sinnlichen Erkenntnis) verstanden, ist es naheliegend, ästhetische Erfahrungen als unmittelbar auf die sinnliche Wahrnehmung folgend zu denken, was wiederum rational ver-

[3] Die Rolle von Emotionen – ob spezifisch ästhetisch oder qualifizierend – in der Schönheitswahrnehmung beschreibt dabei im Übrigen eine Parallele zum kantischen Geschmacksurteil, die KANT in seiner Argumentation gegen Mathematisches als ästhetische Gegenstände nicht in Betracht zieht.

mittelte mathematisch-ästhetische Erfahrungen ausschließen muss. FRANZ VON KUTSCHERA (*1932) etwa kommt mittels einer solchen Argumentation zu dem Schluss, dass „Theoreme und geometrische Verhältnisse, sofern sie nicht an physischen Objekten auftreten, keine Gegenstände ästhetischer Beurteilung" [V. KUTSCHERA 1988, S. 88] sein können. In der Tat stellt die Rolle der sinnlichen Wahrnehmung einen kritischen Punkt dar bezüglich der Frage, inwieweit es sich bei mathematischen Schönheitsurteilen um ästhetische Urteile handeln kann. Natürlich geht auch einer mathematisch-ästhetischen Bewertung etwa eines Beweises das Lesen oder Hören und somit die sinnliche Wahrnehmung voraus. Jedoch wird mit Eigenschaften wie Tragweite, Ökonomie oder epistemischer Transparenz eben nicht die äußere Erscheinung des Tafelbildes oder einer Lehrbuchseite charakterisiert. Als eigentlicher Träger solcher Kriterien kann dann eher die dahinter liegende Beweisidee beziehungsweise die von dieser evozierten subjektiven, epistemischen und emotionalen Prozesses betrachtet werden. Die so beschriebene mathematische Schönheit ist also nicht unmittelbar sinnlich zugänglich. Dennoch verweisen insbesondere die Metaphern aus dem Bereich des Visuellen im Zusammenhang mit epistemischer Transparenz („Klarheit", „Durchschauen", „Auf einen Blick erkennen" usw.) oder auch die Rede vom „inneren Auge" darauf, dass das mathematisch-ästhetische Erleben dem aisthetischen ähnlich beschrieben wird. Diese Metaphorik unterstreicht außerdem die zentrale Rolle der Einbildungskraft für die Wahrnehmung mathematischer Schönheit.

Bitte Kutschera 1988 mit in die Literaturliste aufnehmen.

Die Frage nach der sinnlichen Zugänglichkeit führt außerdem über den hier skizzierten Gegenstandsbereich mathematikästhetischer Betrachtungen im engeren Sinne hinaus etwa auf die ästhetische Beurteilung von Bildbeweisen, präformalen Beweisformen oder zeichnerischen oder computergenerierten Darstellungen. Dabei ist etwa zu klären, inwiefern bei den so dargestellten mathematischen Zusammenhängen auch die oben beschriebenen mathematischen Eigenschaften ästhetisch wirksam bleiben oder ob ggf. die aisthetischen Qualitäten eine größere Rolle spielen. Auch stellt sich die Frage, wie sich die zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge auf die ästhetische Wirksamkeit von aus ihnen generierter Kunst auswirken. Inwiefern hängt also beispielsweise die mathematik-ästhetische Betrachtung des Satz des THALES (siehe Kasten) mit der ästhetischen Wahrnehmung des auf diesem beruhenden Schmuckstücks (Abbildung) zusammen? Die Klärung dieser offenen Fragen spielt insbesondere mit Blick auf die Möglichkeiten ästhetischer Erfahrungen im schulischen Mathematikunterricht eine besondere Rolle. Dies unterstreichen nicht zuletzt Antworten von Schülerinnen und Schüler selbst, auf die Frage, was bei ihnen ein Schönheitserlebnis mit Mathematik ausgelöst habe.[4] Neben den vielen Begründungsmustern, die sich den oben beschriebenen Eigenschaftskomplexen zuordnen lassen, wurde häufig der besondere Reiz der Geometrie mit der Möglichkeit zur visuellen Wahrnehmung begründet:

> *Ich empfinde zeichnen mit Mathematik schön. Wenn man etwas ausrechnet, es dann zeichnen kann und es kombiniert mit etwas anderes ein Bild ergibt. (Schüler(in), anonym, 2015)*

[4] Die zitierte Frage wurde Neuntklässler(inne)n neben anderen im Rahmen eines Unterrichtsversuchs zu verschiedenen Lösungsmöglichkeiten für quadratische Gleichungen und deren vergleichende ästhetische Reflexion gestellt [vgl. ALLMENDINGER und SPIES 2015].

4. Die mathematikästhetische Perspektive

Die bisherigen Ausführungen stellen insbesondere die Rezipientensicht und die Frage nach dem spezifisch ästhetischen im mathematischen Schönheitsurteil in den Vordergrund. Als kritisches Moment haben sich dabei insbesondere das Zusammenspiel und die Spannung zwischen rational fassbaren objektimmanenten Eigenschaften und subjektivem emotionalen und epistemischem Erleben erwiesen. Diese zentrale Beziehung wird auch aus der Perspektive der Produzenten und in der Frage nach dem Kunststatus von Mathematik relevant. Beides erschöpft sich nicht in der Diskussion um mathematische Kreativität wie das folgende Zitat zeigt:

> *Die Logik lehrt uns erkennen, ob eine Kombination korrekt ist; aber wozu nützt das, wenn wir nicht die Kunst besitzen, zwischen allen möglichen Kombinationen die richtige zu wählen. Die Logik lehrt uns, daß wir auf diesem oder jenem Wege sicher keinen Hindernissen begegnen werden, sie sagt uns nicht, welcher Weg zum Ziele führt. Um dahin zu gelangen, muß man das Ziel von weitem sehen, und die Intuition ist eben die Fähigkeit, welche uns das Sehen lehrt. Ohne sie würde es dem Mathematiker ergehen wie dem Schriftsteller, der in der Grammatik vollkommen bewandert ist, aber keine Ideen hat. [POINCARÉ 1914, S. 116]*

HENRI POINCARÉ verweist hier auf die Diskrepanz von Produkt und Prozess mit Blick auf die Mathematik. Die Prozesssicht ermöglicht es, sowohl den Mathematiker als künstlerisches Genie zu sehen, als auch die Möglichkeit gestalterischer Spielräume zu erkennen und etwa Stilistische Eigenheiten im mathematischen Denken und Darstellen zu identifizieren. Über die in der Öffentlichkeit vorherrschende statische Produktsicht hinaus, können so mithilfe der mathematikästhetischen Perspektive selten beachtete Facetten von Mathematik und mathematischem Schaffen herausgestellt werden. Die Annahme der Kunstähnlichkeit liefert dabei eine Sprache zur Beschreibung dieser Aspekte. Auf diese Weise trägt die mathematikästhetische Perspektive zu einem umfassenden Bild von Mathematik bei.

Literatur

[1] ALLMENDINGER, HENRIKE und SPIES, SUSANNE (2015): Alte Bekannte aus persönlicher Sicht – Lösungsansätze für quadratische Gleichungen ästhetisch reflektiert. Erscheint in mathematik lehren, vorr. 11/2015.

[2] BORWEIN, JONATHAN M. (2006): Aesthetics for the Working Mathematician. In: Sinclair, Nathalie ; Pimm, David ; Higginson, William: Mathematics and the Aesthetic. New Approaches to an Ancient Affinity. New York: Springer, S. 21 – 40.

[3] DAVIS, PHILIP J. und HERSH, REUBEN (1994): Erfahrung Mathematik. Basel: Birkhäuser.

[4] HASSE, HELMUT (1952): Mathematik als Wissenschaft Kunst und Macht. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften.

[5] KANT, IMMANUEL (1963): Kritik der Urteilskraft (KU). Stuttgart: Reclam. Herausgegeben von Gerhard Lehmann.

[6] LILJEDAHL, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! Experiences on undergraduate mathematics students. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36 (2 – 3), 219 – 235.

[7] POINCARÉ, HENRI (1914): Wissenschaft und Methode. Darmstadt, 1973. Unveränderter Nachdruck der ersten deutschsprachigen Ausgabe von 1914.

[8] SCHELLDORFER, RENÉ und SPIES, SUSANNE (2013): Mathematik genießen – Schöne Mathematik. In: Praxis der Mathematik in der Schule. Heft 54 / Jg. 55. S. 2 – 8.

[9] SPIES, SUSANNE (2012): Schön irrational! – Irrational schön? Ein klassischer Unterrichtsgegenstand aus mathematikästhetischer Perspektive. In: mathematica didactica 35.

[10] SPIES, SUSANNE (2013): Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler. Siegen: universi.

GREGOR NICKEL

Mathematik und Religionsphilosophie – Koinzidenzen und Kontraste[1]

Da uns zu den göttlichen Dingen nur der Zugang durch Symbole offensteht, so ist es recht passend, wenn wir uns wegen ihrer unverrückbaren Sicherheit mathematischer Symbole bedienen. NIKOLAUS CUSANUS

1. Prolog

LEONHARD EULER (1707 – 1783) kam am St. Petersburger Hof mit DENIS DIDEROT (1713 – 1784), einem der Wortführer der französischen Aufklärung, zusammen. Man stellte EULER dem amüsanten Atheisten DIDEROT als einen Mann vor, der einen algebraischen Beweis für die Existenz Gottes gefunden habe. Mit unbewegtem Gesicht habe EULER daraufhin gesagt:

„Monsieur, es ist $\frac{(a+b^n)}{n} = x$, *also existiert Gott; antworten Sie!“*

Der eloquente DIDEROT sei sprachlos gewesen, wurde von allen ausgelacht und reiste eilends nach Frankreich zurück.[2]

In der Tat kann ein mathematisches Argument innerhalb einer theologischen Debatte solch eine einschüchternde Wirkung entfalten. Dabei macht sich der Mathematiker ein merkwürdiges Paradox zu Nutze: Auf der einen Seite ist die mathematische Formel, Rechnung oder Argumentation für den Opponenten vollständig undurchsichtig, auf der anderen Seite verspricht sie jedoch eine (wenigstens im Prinzip) mögliche, absolute Transparenz. So kommt der verzweifelt um Einsicht bemühte und scheinbar nur mit der eigenen Dummheit kämpfende Gegner gar nicht dazu, die Gültigkeit des Arguments zu prüfen oder gar die Legitimität, überhaupt Mathematik einzusetzen. Der Mathematiker hat dann natürlich ein gewonnenes Spiel. Die hier anekdotenhaft geschilderte Situation ist tatsächlich nicht ganz untypisch; das wechselseitige Gespräch von Mathematik und Theologie ist allzu häufig geprägt durch ein weitgehendes *gegenseitiges* Unverständnis. Allerdings gibt es bemerkenswerte Ausnahmen.[3] Hier sollen zwei solche Denker vorgestellt werden: GEORG CANTOR (1845 – 1918), eine der zentralen Figuren an der Schwelle zur Mathematischen Moderne, und NIKOLAUS VON KUES (1401 – 1464), Theologe, Philosoph und Kirchenführer, aber auch Mathematiker an der Schwelle zur Neuzeit. Auch wenn dabei zunächst große Ähnlichkeiten auffallen, so zeigen sich bei näherer Betrachtung wesentliche Differenzen, erweist sich CUSANUS als der für die philosophische Reflexion weitaus produktivere Denker.

---

1 Der vorliegende Aufsatz ist eine stark gekürzte und leicht überarbeitete Version von NICKEL [2013].

2 Vgl. Harro Heuser: Lehrbuch der Analysis. Teil 2. Teubner, Stuttgart 1986, S. 682.

3 Für eine historisch weit gespannte Übersicht verschiedenster Autoren, die mathematische mit theologischen Themen verbinden, vgl. BERGMANS/KOETSIER [2005].

2. GEORG CANTOR – vom Glanz und Elend unendlicher Mengen

Wir beginnen mit GEORG CANTOR, der – im Gegensatz zu EULER in der erwähnten, vermutlich nur gut erfundenen Anekdote – durchaus in ernsthafter Absicht seine mathematischen Resultate auch im theologischen Kontext anwenden wollte. CANTOR kann mit Recht als Begründer der „modernen Mathematik“ bezeichnet werden; mit seiner transfiniten Mengenlehre beginnt ein dramatischer Themen- und Stilwechsel in der Mathematik. Übrigens war die Entwicklung der Mengentheorie zunächst motiviert durch handfeste Probleme der angewandten Mathematik [vgl. etwa PURKERT/ILGAUDS 1987] und sie bleibt auch auch für diese bis heute unverzichtbar. Der Mengenbegriff – mehr oder weniger formal bzw. axiomatisch eingeführt – bildet nach wie vor ein wesentliches Referenzkonzept für nahezu alle derzeit gebrauchten mathematischen Begriffe. CANTOR definiert ihn in den *Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* von 1895 folgendermaßen:

> *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung* M *von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten* m *unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von* M *genannt werden) zu einem Ganzen. [CANTOR 1962, S. 282]*

Die entscheidende, mathematische Erfindung CANTORs war, dass sich „jenseits“ der endlichen Mengen eine Hierarchie „verschieden großer“, unendlicher Mengen *de-finieren* lässt und dass diese in einer schlüssigen mathematischen Theorie behandelt werden können. Diese unendliche Hierarchie immer größerer unendlicher Mengen. Diese unendlichen Mächtigkeiten werden von CANTOR – nicht ohne religiöse Anspielung – mit dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets bezeichnet, angefangen bei $\aleph_0$, der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. CANTOR zeigt schließlich, wie sich eine sinnvolle „Arithmetik“ für diese unendlichen Mächtigkeiten (und Ordnungstypen) entwickeln lässt. Man kann also mit „unendlichen Zahlen“ rechnen.

2.1 Das Aktual-Unendliche

Nicht zuletzt gegen die Skepsis vieler Fachkollegen versuchte CANTOR zeit seines Lebens, die neuen Konzepte zu rechtfertigen. Dabei hielt er es für selbstverständlich, dass eine solche Rechtfertigung nicht nur auf mathematischem, sondern vor allem auf metaphysischem Terrain geführt werden muss. Entscheidend sei dazu eine *Differenzierung* im mathematischen wie auch im metaphysischen Unendlichkeitsbegriff: Zunächst ist das *potentielle Unendliche* zu nennen; es bezieht sich auf unbestimmte, aber stets endliche Größen, die jedoch beliebig groß sein dürfen. Dieses ist das seit ARISTOTELES kanonisierte Konzept des Unendlichen, dem die mathematische Tradition bis zu CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) weitgehend folgt. CANTOR wendet sich nun explizit gegen diese Tradition. Er führt also ein *aktuales Unendliches* als mathematisches Konzept ein; es bezieht sich auf „fertige“, bestimmte Größen, enthält also nichts Schwankendes, Unvollendetes. Die fertig vorliegende (unendliche) Menge aller natürlichen Zahlen etwa sei wohlbestimmt und nicht veränderlich. Ungewohnt sei natürlich, dass aus dem Endlichen vertraute Gesetze, etwa das Euklidische Axiom, dass das Ganze mehr als der Teil sei, für unendliche Mengen nicht mehr gelten. Schließlich weitet CANTOR das Konzept des aktual Unendlichen im metaphysischen Kontext noch weiter aus, in dem er

> *(…) das Aktual-Unendliche (A-U.) nach drei Beziehungen [unterscheidet]: erstens, sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen außerweltlichen Sein, in Deo realisiert ist, wo ich es Absolut Unendliches oder kurzweg Absolutes nenne; zweitens, so-*

> *fern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; drittens, sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und insofern dem Endlichen verwandtes A.-U. sich darstellt, nenne ich es Transfinitum und setze es dem Absoluten strengstens entgegen. [CANTOR 1962, S. 378]*

Wichtig ist CANTOR also, ein vielgestaltiges Aktual-Unendliches mathematisch behandeln zu können und einerseits vom Absoluten der klassischen Metaphysik (rationalen Theologie), andererseits aber auch vom nur potentiellen Unendlichen abzugrenzen.

2.2 Inkonsistenzen – CANTORS absolut Unendliches

Versucht man nun aber, sich eine „Übersicht" über die Hierarchie transfiniter Mengen zu verschaffen, versucht man etwa die „Menge aller Mächtigkeiten" zu bilden, so stößt man auf Widersprüche. Dies war CANTOR schon sehr früh bewusst – lange bevor ähnliche Antinomien im Rahmen der sog. mathematischen Grundlagenkrise diskutiert wurden. Ich möchte hier auf die technischen Details der Argumentation nicht genauer eingehen. Wichtig scheint mir jedoch einerseits, dass CANTOR diese Inkonsistenz auf der mathematischen Seite produktiv nutzt. Im Rahmen eines indirekten Beweises zeigt er nämlich, dass sich jede beliebige Mächtigkeit in seine Hierarchie aller Mächtigkeiten einordnen lässt. Wäre dies für eine spezielle Mächtigkeit nicht der Fall, so müsste sie die „Menge" aller Mächtigkeiten enthalten, wäre also selbst bereits inkonsistent. Insofern gibt es zunächst einen innermathematischen Grund, die Antinomie zu begrüßen. Auf der begrifflichen Seite reagiert CANTOR andererseits auf diese „am Rande des Unendlichen" auftretende Inkonsistenz wiederum durch eine Differenzierung; an RICHARD DEDEKIND schreibt er 1899:

> *Es gibt also bestimmte Vielheiten, die* nicht zugleich Einheiten *sind, d. h. solche Vielheiten, bei denen ein reales „Zusammensein aller ihrer Elemente"* unmöglich *ist. Diese sind es, welche ich „inkonsistente Systeme", die anderen aber „Mengen" nenne. Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines „Zusammenseins"* aller *Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die* ***Vielheit als Einheit*** *(Herv. GN), als ein „fertiges Ding" aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich* absolut unendliche *oder* inkonsistente Vielheiten. *[CANTOR 1991, S. 443]*

Im Gegensatz zu vielen Zeitgenossen war für CANTOR das Auftreten dieser Widersprüche ein durchaus erwartetes, geradezu ein willkommen geheißenes Phänomen. Anstatt an den Grundfesten der Mathematik zu zweifeln, hält er es für *notwendig*, dass die Mathematik „am Rande" auf einen widersprüchlichen Bereich verweist:

> *Das Transfinite mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein Absolutes hin, auf das „wahrhaft Unendliche", (…) welches als absolutes Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination. [CANTOR 1962, S. 405]*

2.3 CANTORS theologische Versuche

An dieser Stelle vollzieht CANTOR endgültig einen Übergang zur Theologie. Hier sucht er einerseits metaphysische Schützenhilfe, beansprucht aber andererseits auch, einer „christlichen Philosophie" Argumente gegen die philosophische Moderne liefern zu können. Er führte einen ausgedehnten Briefwechsel mit verschiedensten zeitgenössischen Theologen, von dem zumindest Teile erhalten und mittlerweile auch ediert sind. Ich übergehe hier einige materiale, theologische Themen und möchte nur CANTORs Gottesbegriff vorstellen, publiziert 1879 als Anmerkung einer Arbeit zur Mengenlehre in den Mathematischen Annalen:

> *Daß wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden (…) Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten; wogegen die Unendlichkeit der ersten Zahlenklasse, welche bisher dazu allein gedient hat, mir eben weil ich sie für eine faßbare Idee (nicht Vorstellung halte), wie ein ganz verschwindendes Nichts im Vergleich mit Jener vorkommt. [CANTOR 1962, S. 205]*

Die Identifikation des sich im Rahmen der Mengenlehre durch Widersprüche zeigenden „Absoluten“ mit dem Gott des Christentums erfolgt bei CANTOR im Wesentlichen ohne weitere Begründung. Sein Ausgangspunkt ist die Faszination, dass sich im Rahmen der Sicherheit mathematischer De-finitionen und Beweise auch trans-finite Mengen untersuchen lassen und sich eine im wörtlichen Sinne unübersehbare, aber dennoch mathematisch fruchtbare Fülle von Strukturen eröffnet. Zwangsläufig ergeben sich Widersprüche; das Konzept der (unendlichen) Menge funktioniert widerspruchsfrei nur „innerhalb“ eines abgegrenzten Bereichs, „jenseits“dessen Antinomien auftauchen. Dieser umgebende „absolut unendliche“ Bereich wird schließlich religiös gedeutet.

Auch wenn einige zeitgenössische Theologen ähnlich argumentieren, kann CANTORs Versuch eines Übergangs von Mathematik zu Theologie m. E. nicht als gelungen gelten. Die mathematische *ratio* wird zunächst in ihrer metaphysischen Kompetenz überschätzt und anschließend in der theologischen Sphäre ganz beiseite gelassen bzw. nicht durch eine theologische Vernunft ergänzt. Es wird dadurch zugleich zu viel an mathematischer Stringenz behauptet und zu wenig an theologischer Konkretion geleistet. Eine genuin theologische Reflexion würde also an dieser Stelle allenfalls beginnen. Für die Mathematik ist der Gewinn allerdings kaum zu überschätzen: Die metaphysische Einbettung erlaubte es CANTOR, von allzu starken Konsistenzzwängen abzusehen und seine Theorie unbekümmert zu entwickeln. Von der hier frei gewordenen Kreativität lebt die Mathematik in großen Teilen bis heute.

3. NIKOLAUS VOM KUES – Veritas in speculo mathematico

Wir verlassen nun das Paradies der Mathematiker und kehren zur irdischen Theologie zurück; NIKOLAUS VON KUES ist sicherlich für die Geschichte dieser Disziplin singulär in der Art und Intensität, mit der er mathematische Handführungen, *manuductiones,* und Rätselbilder, *enigmata,* in seine theologischen Traktate integriert, aber auch insofern, dass er zwischenzeitlich mit höchster Intensität rein mathematische Studien betrieben hat. Ich möchte hier die mathematikhistorische Frage nach dem Beitrag des CUSANUS für die Vorgeschichte der Analysis ausblenden. Das Augenmerk soll vielmehr auf die Verwendung der mathematischen Bilder in seinen theologischen Schriften gerichtet sein.

Zunächst wirkt manches frappierend ähnlich zu dem bei CANTOR Skizzierten, und auch sein Anspruch ist nicht geringer. NIKOLAUS betont jedoch – etwa schon im ersten Buch seines frühen Hauptwerkes *De docta ignorantia* – die Angewiesenheit der Theologie, vom Gegebenen, Geschöpflichen, Begrifflichen auszugehen, das allerdings für die Suche nach

Gotteserkenntnis allenfalls Ähnlichkeit, nie Genauigkeit vermitteln kann. Selbstverständlich in Bezug auf die Gotteslehre ist also zunächst nur das schiere Nichtwissen und bereits viel schwieriger ein genaueres Wissen um dieses Nichtwissen, die *docta ignorantia*. Dennoch präsentiert uns NIKOLAUS bereits hier und verstärkt noch in den späteren Werken keine schlichte, negative Theologie. Dies gelingt ihm unter anderem, weil sich im Rahmen der einzig möglichen, symbolischen Gotteserkenntnis die mathematischen Gegenstände als Symbole anbieten durch ihre besondere Sicherheit und Unwandelbarkeit.

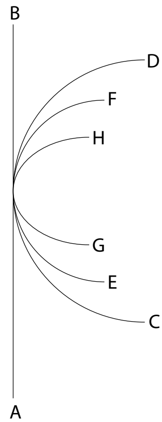

Abb. 1: de docta ign. n. 36

So setzt er in *de docta ignorantia* – einer langen theologischen Tradition folgend – die Unendlichkeit als (wichtigstes) Gottesprädikat voraus und erkundet an Hand mathematischer, in der Regel geometrischer Beispiele, was bei einem „Übergang ins Unendliche“ geschieht. CUSANUS beschreibt dabei einen doppelten Überstieg. Zunächst betrachtet er endliche mathematische Figuren (etwa eine Gerade und verschiedene Kreise, vgl. **Abb. 1**) variierbarer Größe, um dann zu erkunden, was bei einem „Übergang“ zu deren „unendlichen Analoga“ geschieht, die bereits nicht mehr in den Bereich der Mathematik fallen. Dabei werde deutlich, wie die im Endlichen unvereinbaren Gegensätze (etwa gerade und gekrümmt) im Unendlichen koinzidieren. In einem zweiten Schritt solle schließlich das Figürliche ganz abgelegt werden, und somit gleichsam ein geistiger Blick auf das Unendliche selbst geworfen werden; in seinem Frühwerk wird hierbei vor allem der Ineinsfall der Gegensätze, die *coincidentia oppositorum*, erkennbar. Auch hier verweist also die Mathematik auf einen Randbereich, in dem Widersprüchliches zu erwarten ist. Und das gesuchte Absolute zeigt sich allenfalls jenseits dieser Koinzidenz des Gegensätzlichen.

3.1 Differenzen I – Mathematik und Theologie im Gefüge des Geistes

Nun ist es aber entscheidend, dass sich diesem Aufstieg aus der Mathematik zum einen eine intellektuale *Weiter*führung auf theologischem Gebiete, vor allem eine trinitarische Spekulation, anschließt, die ich hier zunächst ausblenden möchte. Zum anderen setzt eine *Rück*wendung ein, eine Reflexion auf das verwendete Erkenntnismittel, die Mathematik. Dabei verortet NIKOLAUS die Mathematik im Gefüge der Vermögen des (menschlichen) Geistes, *mens*, den er (zunächst) in drei Stufen zu unterscheiden vorschlägt: 1. Die Sinne, *sensus*, nehmen rein positiv wahr, sie unterscheiden nicht die Position eines Sachverhalts von der Negation eines anderen. 2. Der Verstand, *ratio*, fasst die Eindrücke der Sinne durch Begriffe zusammen, unterscheidet Negation und Position (als einander ausschließend). In diesem Bereich ist die Mathematik angesiedelt, allerdings als eine von den Sinnen unabhängige, begriffsbildende Tätigkeit der *ratio*. 3. Die Vernunft, *intellectus*, fasst die Unterscheidungen des Verstandes zur Einheit zusammen, faltet also die Gegensätze Position und Negation ein. Anders formuliert: die Vernunft ermöglicht und reflektiert die (Legitimität der) unterscheidenden Urteile des Verstandes. Es erscheint also als eine durchaus merkwürdige Konkordanz des Gegensätzlichen, wenn im Werk des NIKOLAUS VON KUES Theologie und Mathematik immer wieder neu aufeinander bezogen werden. Denn beide unterscheiden in einem entscheidenden Charakteristikum voneinander. Während in der Mathematik – im Bereich der *ratio* – ein Zusammenfall des Widersprechenden unbedingt zu vermeiden ist, ist es in der Theologie genau umgekehrt. Hier – im Bereich des *intellectus* – ist allenfalls nach dem Zusammenfall der Gegensätze eine Gotteserkenntnis von ferne zu sichten.

3.2 Differenzen II – Inwiefern könnte Mathematik der Gotteserkenntnis dienen?

In der Werkfolge werden in zunehmendem Maße die mathematischen Bilder nicht einfach nur zur „Illustration“ verwendet, vielmehr dient die Mathematik einer Art Selbstbeobachtung der *mens* und dadurch erst einer *indirekten* Beobachtung Gottes. Es darf nun allerdings die Frage gestellt werden, was die sorgfältigen Selbst-Erfahrungen des Geistes mit einer christlichen Gotteslehre zu tun haben können. Hier scheinen mir vier Aspekte wichtig zu sein.

1. Imago Dei: Zum einen wird die *mens* als Bild Gottes, *imago dei*, beschrieben. Schöpfungstheologisch ist also verbürgt, dass die Spekulation schließlich nicht *nur* bei der *mens* selbst bleibt, sondern wenigstens Ähnlichkeit mit Gott erreichen kann. Wenn wir Abbild Gottes sind, so ist Selbsterkenntnis zumindest *auch* Gotteserkenntnis. Insofern alle Cusanischen Werke als Denk-Experimente verstanden werden können, bei denen sich die *mens* allerdings als Experimentator und Untersuchungsgegenstand gleichzeitig erweist, wird „aus den Augenwinkeln“ immer auch ein Blick auf Gott geworfen.

2. Schöpfung: Eine Weiterführung dieses Arguments zeigt zweitens, dass gerade die immitierte – nicht usurpierte! – Kreativität des menschlichen Geistes, nämlich die freie Schöpfung der mathematischen Gegenstände, den ursprünglich schöpferischen Akt Gottes reflektieren hilft. Die *mens* zeigt sich dann beim Hervorbringen der – neuplatonisch gesprochen – besonders edlen Gegenstände der Mathematik auf exemplarische Weise. Und hierin kann ein gegenüber der griechischen Metaphysik entscheidend neuer Gedanke, die *creatio ex nihilo*, paradigmatisch illustriert werden. Wenden wir uns an dieser Stelle der Mathematik selbst zu: Es ist die bleibende Hinterlassenschaft des Kardinals für die Mathematikphilosophie, dass er die mathematischen Gegenstände als *freie* Schöpfungen des menschlichen Geistes beschreibt. Gerade deswegen sei die Mathematik so sicher wie keine andere Erkenntnis. An dieser Stelle lässt sich eine weitere Parallele zu CANTOR verorten, der – in den Rahmen seines platonistischen Mathematikverständnisses – die Schöpfungsfreiheit des Mathematikers als *wesentliches* Charakteristikum integriert. CUSANUS gibt uns allerdings noch genauere Hinweise, wie sich die Entfaltung der mathematischen Gegenstände aus der Einheit des mathematischen Geistes vollzieht.[4] Für die Mathematik-Philosophie ist hier noch fast unendlich viel zu lernen.

3. Trinität: Der Zielpunkt für den Theologen CUSANUS ist stets eine trinitarische Gotteslehre, also das Bedenken einer differenzierten Einheit jenseits der – noch nicht hinreichend differenzierten und bestimmten – Koinzidenz des Gegensätzlichen. Insofern sich die Trinität durch ihr Handeln in der Schöpfung äußert und erkennen lässt, und das heißt für Nikolaus im Sinne einer Entfaltung der Einheit in der Vielheit, findet diese Figur nun gerade in der Mathematik als „mittlerer“, also rationaler Tätigkeit des Geistes *par excellence* ihre Entsprechung, insofern sie die Verschiedenheit der Sinne (vereinigend) einfaltet und ihrerseits aus der die contradictorischen Widersprüche vereinigenden Einfachheit des *intellectus* entfaltet ist. Damit ist sie ein besonders geeignetes Beobachtungsfeld für diese Denkfigur. Wiederum an einem aus seinen mathematischen Quadraturtraktaten stammenden Bild kann dies illustriert werden (siehe **Abb. 2**). Betrachtet werden Polygone mit wachsender Eckenzahl. Dabei werden zu dem jeweiligen Polygon der Inkreis und der Umkreis konstruiert. Je größer die Zahl der Ecken ist, desto mehr nähern sich der eingeschriebene Kreis, der umschriebene Kreis und das Polygon selbst. Im Grenzfall kommen der Umkreis, der Inkreis und das „Un-

[4] Man beachte etwa die von mir hervorgehobene Formulierung CANTORs, der die Mengenbildung als virtuose Paradoxie beschreibt, dass nämlich eine Vielheit als Einheit betrachtet wird.

endlich-eck“ zur Deckung. Diese Drei-einheit kann aber an dem dann nur noch sichtbaren *einen* Kreis selbst nicht wahrgenommen werden:

> *Und sie sind so drei Kreise, dass sie einer sind, und zwar ein dreieiniger Kreis. Dies kann auf keine Weise erscheinen, wenn es nicht an den Polygonen betrachtet wird. (de theologicis complementis, n. 3, S. 10–15)*

Erst vermittels der rationalen Unterscheidung, durch das Polygon symbolisiert, kommen also die Momente der (trinitarischen) Einheit, symbolisch der dreieinheitliche Kreis, zur Darstellung.

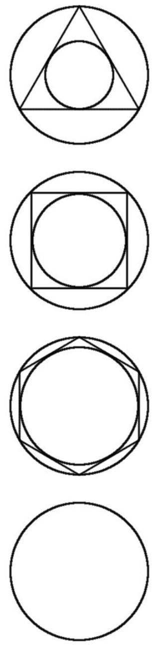

Abb. 2: Circulus Unitrinus

4. Unendlichkeit: Der Unendlichkeitsbegriff löst bzw. benennt im Werk des NIKOLAUS VON KUES eine komplexe Problemkonstellation. Zugleich sollen eine grundsätzliche Unerreichbarkeit Gottes und eine irgendwie geartete (bei den späteren Schriften sogar offensichtlichste und leichteste) Zugangsmöglichkeit behauptet werden; schöpfungstheologisch soll eine größtmögliche Unterscheidung von Gott und Welt, Gott und einzelner Kreatur (bei absoluter Souveränität Gottes) dargestellt werden wie auch eine größtmögliche Nähe. Die *mathesis*, gerade als Wissenschaft, die mit variablen (obzwar stets endlichen) Größen umgeht, ist hierbei prädestiniert für ein vorsichtiges, experimentales Bedenken eines – wie immer gearteten – Überganges zur Unendlichkeit.

Zum Glück für Autor und Leserschaft hat dieser Aufsatz nur eine endliche Länge, und so möchte ich zu einer kurzen abschließenden Überlegung kommen. Betrachtet man den unterschiedlichen Umgang mit dem (mathematischen wie theologischen) Unendlichkeitsbegriff, wie er exemplarisch bei CANTOR und CUSANUS beschrieben wurde, so scheint mir für den Dialog zwischen Mathematik und Theologie Folgendes deutlich zu werden: 1. Die wechselseitige Irritation der beiden Disziplinen kann für beide – auf jeweils eigentümliche Weise – äußerst fruchtbar sein, eine gelingende Bezugnahme setzt jedoch zunächst eine klar reflektierte Abgrenzung voraus. 2. Ein fruchtbarer Ausgangspunkt sind dabei nicht so sehr die (meist defizient) interpretierten „Fakten“, als vielmehr ein sorgfältiges Bedenken der jeweiligen Methodik. 3. Eine philosophisch orientierte Gotteslehre – gerade wenn sie auf mathematisches Denken Bezug nehmen will – muss sich vermutlich um einen produktiven Umgang mit Widersprüchen bemühen.

Literatur

[1] BERGMANS, L., KOETSIER, T. (eds.) (2005): Mathematics and the divine: a historical study. Elsevier, Amsterdam.

[2] CANTOR, G. (1962): Gesammelte Abhandlungen. Hg. von E. Zermelo. Olms, Hildesheim.

[3] CANTOR, G. (1991): Briefe. Hg. von H. Meschkowski und W. Nilson. Springer-Verlag, Berlin.

[4] NICKEL, G. (2005): Nikolaus von Kues: Zur Möglichkeit von theologischer Mathematik und mathematischer Theologie. In: I. Bocken, H. Schwaetzer: Spiegel und Porträt. Zur Bedeutung zweier zentraler Bilder im Denken des Nicolaus Cusanus. Maastricht, S. 9–28.

[5] NICKEL, G., NICKEL-SCHWÄBISCH, A. (2005): Visio Dei ante omnia quae differunt. Niklas aus Lüneburg beobachtet Nikolaus von Kues. In: K. Reinhardt, H. Schwaetzer (Hg.): Cusanus-Rezeption in der Philosophie des 20. Jahrhunderts. Roderer-Verlag, Regensburg, S. 67–92.

[6] NICKEL, G. (2013): Widersprüche und Unendlichkeit – Beobachtungen bei Nikolaus von Kues und Georg Cantor. SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 1 (2013), S. 1–22.

[7] PURKERT, W., ILGAUDS, H. J. (1987): Georg Cantor. Birkhäuser, Basel.

RALF KRÖMER

Die Geschichte der Mathematik aus philosophischer Sicht

Unter diesem Titel könnte man eine ganze Reihe von Fragen behandeln; aus Platzgründen soll es hier nur um zwei davon gehen: Hat mathematische Wahrheit eine Historizität? Und: Braucht Mathematikphilosophie Mathematikgeschichte? Auf die zweite Frage gebe ich eine Antwort, die zugegeben stark von meiner Antwort auf die erste abhängt. Noch vor der ersten zunächst einmal die systematisch gesehen vorangehende Frage zu behandeln, was aus philosophischer Sicht Geschichte überhaupt ist, verbot der Umfang des Aufsatzes eine originelle Antwort darauf und zugleich einen guten Überblick über die klassischen Beiträge zur Geschichtsphilosophie gibt ZWENGER [2013].

1. Hat mathematische Wahrheit eine Historizität?

Wohl für die meisten Menschen dürfte Mathematik als Sammlung ewiger Wahrheiten gelten. $2+2$ ist 4, war es immer und wird es immer sein. Unterliegt „die Mathematik als solche" also keinerlei geschichtlicher Veränderung?

Natürlich hat sie als von Menschen betriebene Wissenschaft oder allgemeiner: Bereich gesellschaftlichen Tuns in einem sehr oberflächlichen Sinn eine Geschichte. Die Menschen, die heute Mathematik treiben, sind nicht mehr dieselben wie vor hundert Jahren. Und wir schreiben die ewige Wahrheit $2+2=4$ auch nicht mehr mit denselben Zeichen auf wie die Babylonier vor viertausend Jahren. Aber das betrifft natürlich nicht den Wahrheitsgehalt der mathematischen Sätze, der ist deshalb erst einmal noch keinem Wandel unterworfen. $2+2$ wäre nur dann gleich 5, wenn wir uns irgendwann entschieden hätten, das Zeichen 5 zu benutzen, um die (an sich) schon immer gegebene Zahl Vier zu bezeichnen (haben wir aber nicht). Man nimmt zwar in der Wissenschaftsgeschichte immer stärker die Rolle des jeweiligen sozialen Kontextes der Wissenschaft treibenden Akteure in den Blick. Doch selbst in der „Wissenssoziologie" KARL MANNHEIMS (1893–1947), die eigentlich postuliert, dass es kein von der Lebenswelt abgelöstes Denken-an-sich gibt, wird mathematisches Wissen explizit ausgenommen:

> *Für diesen Wissenstypus trifft es zu, daß seine Genesis nicht in das Denkergebnis eingeht und von hier aus ist es nur ein weiterer Schritt, eine Wahrheit-an-sich-Sphäre so zu konstruieren, daß sie vom historischen Subjekt völlig abgelöst ist [MANNHEIM 1995, S. 242].*[1]

[1] Hier zitiert nach ULLMANN [2008, S. 98]. ULLMANN weist im Anschluss noch auf den Versuch im Rahmen des „*strong programme*" hin, die von MANNHEIM vorgenommene Einschränkung aufzuheben, und auch sein eigenes Buch kann als solcher Versuch aufgefasst werden. Sein Hinweis auf ideologische Elemente in der gesellschaftlichen Praxis der Mathematik scheint mir berechtigt und unabweisbar belegt, doch ergibt sich daraus wohl noch nicht automatisch die Kontingenz bewiesener (und wenn auch unbestritten von in dieser Praxis stehenden Menschen bewiesener) mathematischer Sätze.

Lassen wir also die Ahistorizität der „Mathematik als solcher" einstweilen unangetastet. Dann gibt es da natürlich noch eine Weiterentwicklung unseres Kenntnisstandes. Wie in allen Bereichen menschlichen Wissens wissen wir auch in der Mathematik manche Dinge gestern noch nicht, aber heute plötzlich doch, und zwar nicht nur individuell, sondern als gesamte Menschheit. Aber auch das betrifft anscheinend noch nicht die Aussagen selbst, sondern nur unser Wissen über sie bzw. unsere Einsicht in ihre (ewige) Wahrheit. Wirklich von einer Wandelbarkeit der „Mathematik als solcher" würde man wohl erst dann sprechen, wenn es auch vorkäme, dass einstiges „Wissen" sich plötzlich als falsch erweist. So wie in der Physik oder überhaupt den Naturwissenschaften, wo es immer wieder vorkommt, dass man Theorien lange Zeit für richtig hält, bis neue Beobachtungen dazu zwingen, sie zu überdenken. Diesen augenscheinlichen Unterschied findet man bereits bei HERMANN HANKEL (1839 – 1873) beschrieben, der auch eine Erklärung dafür anbietet:

> *Alle anderen Wissenschaften bewegen sich durch Gegensätze hindurch und oscilliren, wenn es gut geht, in immer kleineren Spiralwindungen asymptotisch um das durch ihren Stoff gesetzte Ziel, wenn sie es auch in dieser Endlichkeit nie erreichen. Die Mathematik aber besitzt kein solches begrenztes bestimmtes Ziel, weil sie es nicht mit einem positiv gegebenen Materiale zu thun hat […], sondern mit der Mannigfaltigkeit der Formen des Anschaulichen und Abstracten, die ebenso unendlich sind, als die Anschauung und das Denken selbst. In den meisten Wissenschaften pflegt die Generation das niederzureissen, was die andere gebaut, und was jene gesetzt, hebt diese auf. In der Mathematik allein setzt jede Generation ein neues Stockwerk auf den alten Unterbau. […] was eine spätere Zeit an dem alten Werke verändert, ist nichts weiter, als dass sie mit stärkeren Pfeilern ein altes Stockwerk stützt, oder einen für die Gesammtconstruction entbehrlichen Stein herauswirft […] [HANKEL 1869, S. 34].*

Sachlicher formuliert: HANKEL attestiert der Mathematik im Gegensatz zu anderen Wissenschaften eine strikt kumulative Geschichte (und gibt damit wohl die Meinung der deutlichen Mehrheit all derer wieder, die in dieser Frage überhaupt eine Meinung haben). Allenfalls die von ihm gewählte Metapher des Wissens*gebäudes* suggeriert noch einen letzten Rest Historizität dieser Wissenschaft: aus irgendwelchen Gründen scheint das Gebäude von Zeit zu Zeit „baufällig" zu werden – lässt sich dann aber stets wieder ausbessern und in seinem Grundbestand erhalten. (Auf diesen Punkt komme ich noch zurück.)

HANKEL erklärt den Unterschied zwischen der Mathematik und den übrigen Wissenschaften mit einem philosophischen Argument, das sich auf deren jeweilige Gegenstände bezieht; als Gegenstand der Mathematik sieht er die „Mannigfaltigkeit der Formen des Anschaulichen und Abstracten" an. Die zur Prüfung dieses Arguments erforderliche Erörterung der Frage, was denn aus philosophischer Sicht tatsächlich der Gegenstand der Mathematik ist, findet in zahlreichen Beiträgen zur Philosophie der Mathematik immer wieder neu statt (auch in denen dieses Heftes). Für unser vorliegendes Problem ergibt sich aus dieser Jahrtausende alten Debatte folgende entscheidende Beobachtung: Die Antwort auf diese Frage hat ihrerseits eine lange, komplizierte und meines Erachtens keineswegs immer nur kumulative Geschichte! (Auch auf diesen Punkt komme ich zurück.)

Akzeptieren wir aber vorerst HANKELs Feststellung über die Besonderheit der Mathematik als zutreffend. In der Mathematik scheint es kein „Zurückrudern" wie in den Naturwissenschaften zu geben; ja, in diesem Sinn ist sie eben auch keine Naturwissenschaft. Eine mathematische Aussage, über deren Zutreffen wir uns noch im Unklaren sind, nennen wir nicht Satz, sondern Vermutung, und sie wird in der Regel irgendwann entweder bewiesen oder widerlegt (z. B., wenn das für die jeweilige Aussage einen Sinn hat, durch ein Gegenbeispiel). Erst dann haben wir auf die Aussage bezogenes Wissen, nämlich ob das, was sie über ihre Gegenstände aussagt, zutrifft oder nicht. In den Naturwissenschaften gibt es letztlich nur das Wissen, dass Aussagen *nicht* zutreffen, Vermutungen werden entweder widerlegt oder bleiben Vermutungen (die dann aber eher „Theorien" heißen); mathematische Beweise von naturwissenschaftlichen Theorien gibt es nicht.

Wenn also die Mathematik selbst eine Geschichte hat, dann auf andere Art als die Naturwissenschaften. Letztere stellen immer nur die jeweils gerade größte Annäherung an eine zumindest in ihrer letzten Absicherung unerreichbare Wahrheit dar (es könnte zwar sein, dass wir mit irgendeiner Theorie bereits ins Schwarze getroffen haben, nur wissen können wir das nicht); bei der Mathematik hingegen scheinen wir ständig Wahrheiten zu erreichen, die es dann auch bleiben. Wenn wir hier von der Geschichte der Naturwissenschaften sprechen, sprechen wir also eigentlich die ganze Zeit über unseren jeweiligen historischen Kenntnisstand, nicht über die Verhältnisse in der Natur selbst (ob diese letztlich überhaupt Gesetzen unterworfen sind und ob sich eventuell auch diese Gesetze verändern können, darüber wissen wir sozusagen „erst recht" nichts).

Hierbei wird nun zweierlei stillschweigend vorausgesetzt. Erstens: Von Wissen kann man nur sprechen, wenn es grundsätzlich nicht revidierbar ist, und zweitens: Was eines mathematischen Beweises fähig ist, ist nicht revidierbar. Beide Voraussetzungen sind aber problematisch; der Wissensbegriff scheint mir zu eng gewählt. In beiden Fällen handelt man sich das philosophische Problem ein, dass eine solche Wissensdefinition ihrerseits etwas zu sein scheint, an das man erst mal glauben muss – sodass das Wissen letztlich auch wieder nicht ohne Glauben auskommt, während es doch in der Philosophie gerade um die Unterscheidung von Wissen einerseits und Glauben (und Meinen) andererseits geht! Die zweite Voraussetzung trivialisiert zusätzlich das eigentliche Historizitätsproblem, denn Nichtrevidierbarkeit meint ja gerade ewige Wahrheit.

Und trotzdem: Wir haben zumindest in der Mathematik den Eindruck, tatsächlich an die endgültigen Wahrheiten heranzukommen. Woher kommt dieser Eindruck? Mathematische Vermutungen können sehr lange Vermutungen bleiben, und letztlich haben wir keine Garantie, dass jede Vermutung irgendwann entschieden wird – auch wenn der berühmte Mathematiker DAVID HILBERT hier anderer Meinung war („es gibt kein Ignorabimus"). Die Mathematik hat zwar für manche besonders widerständigen mathematischen Fragen irgendwann dann „wenigstens" (und abschließend) die ihrerseits mathematische Aussage bewiesen, dass sie aus grundsätzlichen Gründen niemals entschieden werden können (zumindest nicht mit bestimmten fest vorgegebenen Mitteln). Aber auch für das Erreichen solcher Entscheidbarkeitsaussagen für alle mathematischen Probleme gibt es natürlich keine Garantie.[2]

Sehen wir uns das Verfahren der (endgültigen) Absicherung mathematischer Aussagen etwas genauer an, also das Verfahren des Beweisens. Natürlich kommt es in der Geschichte der Mathematik als menschlicher Aktivität immer wieder vor, dass fehlerhafte Beweise zunächst für richtig gehalten und Fehler erst nachträglich gefunden werden. Selten, aber doch häufiger als nie, kann ein fehlerhafter Beweis sich auch einmal sehr lange halten. Daraus könnte man nun extrapolieren, dass ja vielleicht analog zur Physik all unsere „Beweise" nur vorläufig sind und wir vielleicht irgendwann doch noch Fehler darin finden. Bei

[2] Technische Details zu solchen Fragen im Bereich der axiomatischen Mengenlehre sind enthalten in KUNEN [1980].

vielen Beweisen erscheint uns jedoch diese Hypothese nicht glaubwürdig, weil die Beweise so einleuchtend sind. Das hängt damit zusammen, dass einerseits nach ebenso strengen wie überschaubaren logischen Prinzipien argumentiert wird, wir also bei jedem Schritt sicher sind, dass wir die Wahrheit nicht zerstören (dass mit den in dem Schritt zugrunde gelegten Aussagen auch die abgeleitete Aussage wahr ist),[3] und andererseits die Grundaussagen oder Axiome, von denen wir „starten", einfach „offensichtlich" wahr sind.

Nehmen wir unser abgedroschenes Beispiel $2+2=4$. (Im Sinne einer systematisch betriebenen Axiomatik ist das sicher kein guter Kandidat für ein Axiom, aber für die „Leute auf der Straße" wäre das sicher ein gutes Beispiel einer ewigen mathematischen Wahrheit, die nicht einmal eines Beweises bedarf.) Wieso erscheint die Aussage uns offensichtlich (die schon erwähnten kontingenten Züge daran, wie die Auswahl der verwendeten Zeichen oder Zahlwörter, einmal abgestreift)? Zunächst einmal behandeln wir sie vermutlich als empirische Aussage: wir legen zwei Häufchen mit je zwei Steinchen zusammen und zählen. Das führt uns im nächsten Schritt auf die Frage, woher wir die Fähigkeit zu zählen haben und welche Art Zugang zu „Wahrheit" sie uns verschafft.

Soviel ist klar: Als Individuen und auch als Menschheit haben wir diese Fähigkeit, weil wir sie irgendwann erlernt haben – zunächst mit konkreten Gegenständen wie den Steinchen, um anschließend irgendwann ein abstraktes Zahlkonzept zu entwickeln. Wenn wir nun aus unserem erfolgreichen Operieren mit diesem Konzept auf die Wahrheit der obigen Aussage schließen möchten, sind wir wieder bei der Frage nach den Gegenständen der Mathematik: was für Gegenstände sind eigentlich Zahlen, und welches Wissen ist darüber möglich?

Diese Frage gehört, wie gesagt, zu den Kernfragen der Mathematikphilosophie und hat in unzähligen Beiträgen selbstverständlich schon unvergleichlich gründlichere Behandlung gefunden, als es hier aus dem Stand möglich wäre. Die Auseinandersetzung mit dem Wahrheitsbegriff in der Mathematik bietet aber noch einen weiteren Ansatzpunkt für die Untersuchung des Problems der Historizität: unterliegt denn nicht dieser Wahrheitsbegriff selbst einem historischen Wandel?

Dazu hat JUDITH GRABINER einen sehr interessanten Beitrag vorgelegt. Sie referiert zunächst die landläufige Vorstellung über den oben besprochenen Unterschied zwischen Naturwissenschaften und Mathematik und zitiert an dieser Stelle auch HANKELS Gebäudemetapher. Dann weist sie jedoch auf „several major upheavals in mathematics" hin:

> *For example, consider the axiomatization of geometry in ancient Greece, which transformed mathematics from an experimental science into a wholly intellectual one. Again, consider the discovery of non-Euclidean geometries and non-commutative algebras in the nineteenth century; these developments led to the realization that mathematics is not about anything in particular; it is instead the logically connected study of abstract systems [GRABINER 1974, S. 354f.].*

Das zweitgenannte Beispiel liefert offensichtlich bereits den Schlüssel zu meiner Behauptung, dass HANKELS Aussage über den Gegenstand der Mathematik ihrerseits zeitgebunden ist; mehr möchte ich zu diesem Punkt daher hier nicht sagen. GRABINERS Aufsatz besteht

[3] Nur im Vorbeigehen sei das Faktum erwähnt, dass es, sobald es um logische Schlüsse bezogen auf unendliche Gegenstandsbereiche geht, durchaus Uneinigkeit über die Zulässigkeit von Schlussweisen gab und gibt, wie zum Beispiel die Grundlagenkrise zu Beginn des 20. Jahrhunderts gezeigt hat. Die Existenz solcher Alternativstandards des logischen Schließens unterstreicht natürlich meinen Verdacht der Kontingenz vermeintlicher ewiger Wahrheiten.

allerdings im Kern in der Untersuchung eines dritten Beispiels, nämlich des Übergangs von der Analysis der unendlich kleinen Größen des 18. Jahrhunderts zur Analysis der Strenge des 19. Jahrhunderts; in GRABINERS Worten:

> *This change was a rejection of the mathematics of powerful techniques and novel results in favor of the mathematics of clear definitions and rigorous proofs [ibid. S. 355].*

GRABINER interpretiert anschließend den Übergang so, dass sich Standards mathematischer Wahrheit geändert haben, und fokussiert auf die Frage, warum dies so war; sie gibt eine Reihe von einleuchtenden Gründen dafür an, darunter den, dass man in typischen Fragestellungen des 18. Jahrhunderts meist noch mit Anschauung recht weit kam, sich aber im Anschluss daran mit Dingen zu beschäftigen begann, in denen die Anschauung allein nicht mehr ausreichte, um gewissermaßen zufällig zu richtigen Resultaten zu kommen, etwa komplexe Funktionen, Funktionen mehrerer Unbekannter und trigonometrische Reihen.

Ich denke, man kann dem Beispiel entnehmen, dass es demnach in der Geschichte der Mathematik mindestens einmal einen grundlegenden Wandel in der allgemein akzeptierten Auffassung darüber gegeben zu haben scheint, was in der Mathematik als etablierte Wahrheit aufzufassen ist und was nicht.[4] Tatsächlich hat es solche Wandel mehrfach gegeben, und zwar nicht nur vor der Einführung der (im Wesentlichen noch heute gültigen) Standards der Strenge im 19. Jahrhundert. In meiner eigenen Arbeit habe ich nachzuweisen versucht, dass solche Wandel auch noch in höchst abstrakten Untersuchungen zur Kategorientheorie in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine Rolle spielen, bei denen die bis dahin als etabliert geltende mengentheoretische Grundlegung der Mathematik an ihre Grenze geführt wurde [KRÖMER 2007]. Dieses Beispiel ebenso wie das Beispiel GRABINERs scheinen mir Beispiele der von HANKEL implizit konzedierten „Baufälligkeit" zu sein – und die Metapher trägt relativ weit, denn die Mathematik scheint in den genannten Fällen einfach deshalb baufällig zu werden, weil sie intensiv „bewohnt" oder besser: benutzt wird: man strapaziert die Tragkraft des jeweiligen Pfeilers in einem Maße, an das man bei seiner Errichtung noch nicht dachte (der Vergleich mit dem Zustand unserer Autobahnbrücken sei mir hier verziehen …). Dies ist zweifellos eher ein suggestiver Gedanke als eine philosophisch zufriedenstellende Erklärung, scheint mir aber die Richtung vorzugeben, in die weiter nachgedacht werden sollte.

2. Mathematikphilosophie braucht Mathematikgeschichte

> *Die historische Untersuchung des Entwicklungsganges einer Wissenschaft ist sehr notwendig, wenn die aufgespeicherten Sätze nicht allmählich zu einem System von halb verstandenen Rezepten oder gar zu einem System von Vorurteilen werden sollen. Die historische Untersuchung fördert nicht nur das Verständnis des Vorhandenen, sondern legt auch die Möglichkeit des Neuen nahe, indem sich das Vorhandene eben teilweise als konventionell und zufällig erweist. Von einem höheren Standpunkt aus, zu dem man auf verschiedenen Wegen gelangt ist, kann man mit freierem Blick ausschauen und noch heute neue Wege erkennen [MACH 1883, S. 251].*[5]

[4] Ob es in der Mathematik zu wissenschaftlichen Revolutionen kommt, wird kontrovers bei GILLIES [1992] diskutiert.

[5] Hier zitiert nach JANIK & TOULMIN [1998, S. 166 f.].

Wenn man sich mit Geschichte der Mathematik beschäftigt, rücken die die Mathematik konstituierenden Handlungen, etwa die Veränderungen des konzeptuellen Rahmens, in den Blick. Hierbei ist der Akzent auf der Historizität der Handlungen nicht nur in dem naheliegenden Sinn zu verstehen, dass zum Zustandekommen des schließlichen Wissenschaftsgebäudes die Aktivität der Forscher erforderlich war; ich bin vielmehr überzeugt (und habe versucht, das im Vorangehenden plausibel zu machen), dass die Mathematik als Wissensgebäude „ewiger Wahrheiten“ nicht richtig verstanden werden kann, sondern vielmehr immer wieder Transformationen ihrer konzeptuellen Rahmenbedingungen unterzogen ist.

Vielleicht kann man sich also tatsächlich ERNST MACHs (1838 – 1916) Vision anschließen und der historischen Erforschung der Wissenschaft Mathematik einen Effekt der Neubelebung derselben zutrauen, ja sie in dieser Funktion sogar als unverzichtbar auffassen. MORITZ EPPLE drückt es so aus:

> *Genau wie jede andere historische Disziplin wird auch die Mathematikgeschichte als Beitrag zur Selbstverständigung jener Gegenwart, welcher eine Historikerin oder ein Historiker angehört, betrieben [EPPLE 2000, S. 141].*

Zugleich kann die philosophische Reflexion einer Wissenschaft nur dann gelingen, wenn sie weder prä- noch posttheoretisch ist, also weder versucht, die Entwicklung der Wissenschaft im Vorhinein doktrinär zu bestimmen, noch, das Ende der Zeiten abzuwarten, um die Wissenschaft in ihrer endgültigen Form interpretieren zu können. Sie muss also im Gang der Wissenschaft selbst miteinsetzen und auf jeder Übergangsstufe von konzeptuellen Transformationen mitvollzogen werden. Wo dies dennoch nachträglich geschehen muss, ist eine intime Verquickung mit einem historischen Ansatz „sehr notwendig“.

Abschließend sei bemerkt, dass diese Notwendigkeit keineswegs nur von einem Standpunkt her einleuchtet, der die Mathematik als grundlegend wandelbar oder gar revolutionären Vorgängen unterworfen sieht. Gerade HANKEL, von dessen eher kumulativer Sicht der Mathematikentwicklung wir ja ausgegangen waren, hat ein ebenso überraschendes wie klares Argument für die Wichtigkeit der Betrachtung der Mathematikgeschichte gegeben:

> *Bei einer so conservativen Wissenschaft, als die Mathematik, welche die Arbeiten früherer Perioden nie zerstört, um an ihre Stelle neue Gebäude aufzuführen, ist es begreiflich, dass man eine Zeit nicht ohne Beziehung zur Vergangenheit betrachten kann [HANKEL 1869, S. 6].*

Literatur

[1] EPPLE, MORITZ (2000): Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten: Formen der Mathematikgeschichte. Ein metahistorischer Essay. In: Mathematische Semesterberichte, 2000, 47, S. 131 – 163.
[2] GILLIES, DONALD (ed.) (1992): Revolutions in Mathematics. Clarendon Press.
[3] GRABINER, JUDITH V. (1974): Is mathematical truth time-dependent? In: Amer. Math. Monthly, 81, S. 354 – 365.
[4] HANKEL, HERMANN (1869): Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Tübingen: L. Fr. Fues’sche Sortimentsbuchhandlung.
[5] JANIK, A. & TOULMIN, S. (1998): Wittgensteins Wien. Döcker Verlag.
[6] KRÖMER, RALF (2007): Tool and object. A history and philosophy of category theory. Basel: Birkhäuser.
[7] KUNEN, KENNETH (1980): Set theory. An introduction to independence proofs. North-Holland.
[8] MACH, ERNST (1883): Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt, Brockhaus.
[9] MANNHEIM, KARL (1995): Ideologie und Utopie, Frankfurt: Klostermann.
[10] ULLMANN, PHILIPP (2008): Mathematik, Moderne, Ideologie. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft.
[11] ZWENGER, THOMAS (2013): „Geschichte“ – was ist das eigentlich? In: M. Rathgeb et al. (Hrsg.), Mathematik im Prozess. Philosophische, historische und didaktische Perspektiven. SpringerSpektrum, S. 103 – 122.

SHAFIE SHOKRANI

Mathematik und Sokratisches Gespräch – die Tradition LEONARD NELSONS

Der Terminus *Sokratisches Gespräch* wird wahrscheinlich viele an die Sokratische Maieutik erinnern, die Hebammenkunst des SOKRATES. In dem platonischen Werk THEAITETOS schreibt er sich diese zu; dabei helfe er – im Gegensatz zu anderen Hebammen – bei der Geburt von Gedanken und dabei, zu beurteilen, ob diese „lebensfähig", d. h. vernünftig, seien. Tatsächlich ist die Maieutik eine der wichtigsten charakteristischen Eigenschaften des Sokratischen Gesprächs. Im Folgenden werden wir weitere charakteristische Eigenschaften betrachten, um so ein klareres Bild vom Sokratischen Gespräch zu erhalten, das wieder ein besseres Verständnis der Maieutik ermöglichen wird.

In den meisten Sokratischen Dialogen, die PLATON überliefert bzw. erfindet, werden allerdings philosophische, und insbesondere ethische Fragen diskutiert. Mathematische Themen tauchen zwar ab und zu auf (und in diesem Falle durchaus an Schlüssselstellen), werden dann jedoch sehr kurz abgehandelt. Nur in einem einzigen Werk wird explizit und ausführlich über ein mathematisches Thema gesprochen. Hier will SOKRATES seinem Gesprächspartner MENON zeigen, dass Lernen nichts anderes als *Wiedererinnerung* (Anamnesis) ist und somit die von MENON aufgeworfene *Paradoxie der Unmöglichkeit des Lernens* (Oder Paradoxie des MENON) nicht stichhaltig ist und sie demnach auch nicht vom Weiterforschen abhalten kann. Dies zeigt er, indem in der berühmten Szene ein junger Sklave des MENON einen zuvor völlig unbekannten mathematischen Satz Schritt für Schritt lernt, d. h. in SOKRATES' Interpretation *erinnert*.

Zunächst jedoch sind hier zwei Fragen zu erwägen: Erstens, was macht den Sokratischen Dialog methodisch für viele Philosophen und Pädagogen so interessant, dass er von ihnen konzeptualisiert und an vielen Stellen angewandt worden ist? Und zweitens, inwiefern kann das Lehren von Mathematik ein adäquater Bereich für Sokratische Dialoge sein? Das Folgende ist kein Versuch, diese Fragen umfassend zu beantworten, sondern nur ein Versuch, sie zu untersuchen und Anregungen für mögliche Antworten zu finden. Dieser Versuch, beginnt mit einer Vorstellung LEONARD NELSONs (1882 – 1927), dessen Konzeptualisierung des Sokratischen Gesprächs wir hier folgen wollen.

> *Als ein getreuer Schüler des SOKRATES und seines großen Nachfolgers PLATON kann ich es nur schwer rechtfertigen, Ihrer Aufforderung zu folgen und zu Ihnen über die sokratische Methode zu sprechen. Die sokratische Methode ist Ihnen bekannt als eine Methode des philosophischen Unterrichts. Aber es steht, nach PLATONs Worten, mit dem Philosophieren anders als mit anderen Lehrgegenständen: „Es läßt sich nicht in Worte fassen, sondern aus lange Zeit fortgesetztem, dem Gegenstande gewidmetem wissenschaftlichem Verkehr und aus entsprechender Lebensgemeinschaft tritt es plötzlich in der Seele hervor wie ein durch einen abspringenden Funken entzündetes Licht und nährt sich dann durch sich selbst." [NELSON 1922, S. 29]*

Mit diesen Worten beginnt LEONARD NELSON, Göttinger Philosoph und Pädagoge, seinen Vortrag, *Die Sokratische Methode*, am 11. Dezember 1922 in der Pädagogischen Gesellschaft in Göttingen. Sein großes Interesse an Mathematik – das er schon als Schüler gewonnen hatte – führte zu seiner Zusammenarbeit mit DAVID HILBERT und seinem Kreis. RICHARD COURANT hat diese Zusammenarbeit so charakterisiert:

> *The very interesting personality of NELSON played a very great role, and there was very much interaction between groups of philosophers. It was really an extremely colorful and intense group of people, all in more or less close contact with each other.* [1]

Ein Zuhörer des Vortrages war der damals 24-jährige GUSTAV HECKMANN (1898 – 1996), der nach seiner Promotion in Physik bei MAX BORN die Sokratische Methode nach NELSON zum zentralen Inhalt seiner Arbeit machte. Auf diese Weise ist eine Tradition entstanden, die in der Pädagogik der Philosophie und Mathematik noch immer aktiv ist [RAUPACH-STREY 2012; LOSKA 1995]. Im Weiteren werde ich mich nur auf NELSONs Vortrag beziehen, um die Verbindung, die er in dem Vortrag zwischen Mathematik und der Sokratischen Methode konstruiert, untersuchen.

> *Offenbar ist es das Ziel jeder Wissenschaft, die ihr vorliegenden Urteile zu begründen durch Zurückführung auf allgemeinere Sätze, die ihrerseits gesichert werden müssen, um dann, von diesen Grundsätzen aus vorwärtsschreitend, mit Hilfe logischer Folgerung das System der Wissenschaft aufzubauen. [NELSON 1922, S. 29]*

Bei allen Wissenschaften wird dieser Aufbau sich grundsätzlich nach der gleichen Methode, nämlich der Methode des progressiven Schließens, vollziehen. Aber die eigentlich methodischen Probleme in jeder Wissenschaft findet NELSON, wo man von besonderen Fällen auf allgemeine Prinzipien schließen will. Mathematik stellt hier eine Ausnahme dar, die im Vergleich mit anderen Wissenschaften einen Vorsprung hat. Denn die Prinzipien in der Mathematik sind anschaulich klar und dadurch ganz einleuchtend:

> *[…] so einleuchtend, daß – wie neulich Hilbert an dieser Stelle bemerkte – die mathematische Einsicht jedermann* aufgezwungen *werden kann.*[2] *[NELSON 1922, S. 29]*

Die Situation der Mathematik, wenn sie ihre Grundsätze rechtfertigt, ist – nach NELSON – sogar noch einfacher, weil der Rückgang zu ihren Prinzipien nicht künstlich aufgebaut werden muss. Der Mathematiker kann vielmehr mit *willkürlichen* Begriffsbildungen anfangen:

> *[…] über die Bildung diese Begriffe hinaus* getrost *zu Urteilen fortschreiten, kurz, er kann unmittelbar systematisch und in diesem Sinne* dogmatisch *verfahren. [NELSON 1922, S. 29]*

Den Grund dafür sieht NELSON im Anschluss an IMMANUEL KANT (1724 – 1804) in der Realität der Begriffe, die der Mathematiker konstruiert. Weil die Konstruierbarkeit dieser Begriffe dem Mathematiker ein Kriterium ihrer Realität schenkt, kann er sicher sein, dass seine Theorie nicht auf bloßer Fiktion basiert. Bei den Naturwissenschaften, deren Gesetze von den Phänomenen der Natur abhängen, sieht NELSON eine schwierigere Lage. Weil

---

1 Für einen ausführlichen Bericht über diese Zusammenarbeit siehe PECKHAUS [1990].

2 Bemerkenswert ist hier auch, dass er (zusammen mit HILBERT) auf den zwingenden Charakter der Mathematik hinweist, vgl. NICKEL [2001].

ihnen der Vorteil der Mathematik fehlt, konnten sie nur im engen Anschluss an die Mathematik den Aufstieg zur Wissenschaft auch vollziehen.

Für die Philosophie ist die Situation noch schwieriger. Denn die Grundsätze der Philosophie sind in ihr *das Dunkelste, Unsicherste und Umstrittenste*. Wenn man von den Erfahrungsurteilen zu den abstrakten Grundsätzen zurückgehen will,

> *[…] da verliert sich der Weg des Suchenden im metaphysischen Dunkel, wenn nicht schon das künstliche Licht der* Methode *ihm leuchtet. [NELSON 1922, S. 30]*

Und so begründet NELSON auch, dass das Problem der *Methode* im Zentrum des Interesses bei dem Philosophen sein soll. Er sieht die Aufgabe einer philosophischen *Methode* darin, dass sie den Rückgang zu den Prinzipien sichert, der ohne ihren Leitfaden nur ein Sprung ins Dunkle wäre. Aber auch die Entdeckung dieses Leitfadens ist nicht leicht möglich, weil es nicht hinreichende Klarheit dafür gibt. Die Lösung dafür findet NELSON in der kritischen Prüfung der Erfahrungsurteile:

> *Stellen wir die Frage nach den Bedingungen ihrer Möglichkeit, so stoßen wir auf allgemeinere Sätze, die den Grund der gefällten Einzelurteile bilden. Wir gehen durch Zergliederung zugestandener Urteile zurück zu ihren Voraussetzungen. Wir verfahren* regressiv*, indem wir von den Folgen zu den Gründen aufsteigen. Bei diesem Regress* abstrahieren *wir von den zufälligen Tatsachen, auf die sich das Einzelurteil bezieht, und heben durch diese Absonderung die ursprünglich dunkle Voraussetzung heraus, auf die jene Beurteilung des konkreten Falles zurückgeht. [NELSON 1922, S. 33]*

Diese Methode, die *regressive Methode der Abstraktion*, erzeugt also nicht neue Erkenntnisse, meint NELSON, sondern sie bringt nur durch Nachdenken auf klare Begriffe, was das einzelne Erfahrungsurteile überhaupt erst ermöglichte. Wer zum Beispiel in einer Diskussion den metaphysischen Begriff der Substanz hartnäckig bestreitet, wird beim Verlust seines Mantels nach diesem suchen, und auf diese Weise in einem pragmatischen Sinne zeigen, dass er an den Satz von Beharrlichkeit der Substanz glaubt. Diese Begriffe waren ursprünglicher Besitz in der Vernunft und sie wurden dunkel in jedem Einzelurteil vernehmlich. Ein Bezug auf die Anamnesislehre Platons liegt bereits hier nahe.

Aber was hat diese Methode mit der Methode des (philosophischen) Unterrichts zu tun? NELSON definiert die Philosophie als den Inbegriff der allgemeinen Vernunftwahrheiten, die nur durch Denken klar werden. Philosophieren ist demnach, mit Hilfe des Verstandes die abstrakten Vernunftwahrheiten zu isolieren und in allgemeinen Urteilen auszusprechen. Diese allgemeinen Wahrheiten werden nur durch denjenigen eingesehen, der sie in seinen Urteilen anwenden kann, der selbst den Rückgang zu den Voraussetzungen dieser Erfahrungsurteile vollziehen kann, und er dadurch in ihnen seine Voraussetzungen erkennen kann. Wer deswegen im Ernst philosophische Einsicht vermitteln will, kann nicht nur den Inbegriff dieser philosophischen Prinzipien unterrichten – wie man geschichtliche Tatsachen unterrichtet –, sondern er kann nur die Kunst des Philosophierens lehren:

> *[…] Soll es also überhaupt so etwas wie philosophischen Unterricht geben, so kann es nur Unterricht im Selbstdenken sein, genauer: in der selbständigen Handhabung der Kunst des Abstrahierens. […] Wir wissen zugleich, daß diese Kunst, wenn sie gelingen soll, von den Regeln der regressiven Methode gelenkt werden muß. [NELSON 1922, S. 35]*

Nun stellt sich die Frage, warum NELSON diese Methode des Unterrichtens nach SOKRATES benannt hat, trotz seiner Meinung, dass SOKRATES in den platonischen Dialogen viele didaktische Fehler begangen hat, wie z. B. seine Monologe an den entscheidenden Stellen, die Suggestivfragen und dass der Schüler fast nur ein Jasager ist, von dem man nicht einmal immer recht sieht, wie er zu seinem „Ja" kommt. Als Antwort auf diese Frage nennt NELSON einen dem SOKRATES allgemein zugestandenen Erfolg, nämlich, dass er durch seine Fragen die Schüler dazu bringen konnte, ihre Unwissenheit zu gestehen und dass er damit dem Dogmatismus bei ihnen die Wurzel durchschneide. Und hier ist es, worin sich der Sinn des Gesprächs als Unterrichtsform offenbart. Einen anderen Grund dafür sieht NELSON in der philosophischen Methode der regressiven Abstraktion, die SOKRATES benutzte. Diese Methode darf nicht mit der Induktiven Methode verwechselt werden. Er ging zwar von einem einzelnen Fall aus, suchte dann mittels der Abstraktion einen Rückgang zu einem allgemeinen Satz. Dieser Satz wird nicht – wie bei der Induktion – durch Beobachtung anderer Fällen kontrolliert, sondern er ist ein Wissen, das wir schon immer besessen haben, und nur durch Denken wird es ins Bewusstsein gehoben. Schließlich glaubte NELSON, dass SOKRATES der Erste ist, der glaubte, dass der menschliche Geist dazu fähig ist, die philosophische Wahrheit zu erkennen. Deshalb war SOKRATES überzeugt,

> *[…] daß nicht* Einfälle *oder* äußere Lehre *uns diese Wahrheit erschließen, sondern daß nur planmäßiges unablässiges Nachdenken in der gleichen Richtung uns aus dem Dunkel zu ihrem Licht führt. Hier liegt seine philosophische Größe. Seine pädagogische Größe liegt darin, daß er, wiederum als Erster, die Schüler auf diesen Weg des* Selbstdenkens *weist und nur durch den Austausch der Gedanken eine Kontrolle einführt, die der Selbstverblendung entgegenwirkt. [NELSON 1922, S. 42]*

Wenn wir hieran festhalten, ist nach NELSON die sokratische Methode trotz all ihrer Mängel die einzige Methode des philosophischen Unterrichts.

Später in seinem Vortrag hat NELSON am Beispiel der *Mathematik* gezeigt, dass nur ein sokratisch geleiteter Unterricht in der Philosophie zum Ziel führen kann. Wenn das nicht der Fall wäre, so müsste ein nicht-sokratisch geleiteter Unterricht in einer Wissenschaft, die nicht mit den besonderen Schwierigkeiten der philosophischen Erkenntnis zu kämpfen hat, auf jedem Fall zum Ziel führen. Die Wissenschaft, die wir hier suchen, hat anschaulich klare Grundsätze (Axiome), und sie ist – basierend auf diese Grundsätzen – systematisch mit hilfe einer vollkommen verständlichen Methode (wie z. B. logisches Schließen) aufgebaut. In so einer Wissenschaft kann auch bei dogmatischem Vortrag vom ersten bis zum letzten Schritt alles lückenlos klar werden. Mathematik ist eine solche Wissenschaft, ihre Axiome sind nach NELSON anschaulich klar und ihre Schlussregeln volkommen einleuchtend. Aber ihr Unterricht gelingt demnach nicht rein dogmatisch. Erstens zeigt unsere Erfahrung, dass sogar bei tüchtigen Schülern und Studenten, wenn man sie auf Herz und Nieren prüft, schon Schwächen in den elementaren mathematischen Angelegenheiten erkennbar sind. Wenn wir zweitens einen Teil der Mathematikgeschichte betrachten, in dem die Elemente der Infinitesimalrechnung durch LEIBNIZ und NEWTON gegründet und nach Kritik durch BERKELY, von CAUCHY und WEIERSTRAß vollendet worden sind, sehen wir große Köpfe wie den NEWTON-Schüler EULER (1707 – 1783) und den WEIERSTRAß-Schüler PAUL DU BOIS-REYMOND (1831 – 1889), denen das Verstehen der Infinitesimalrechnung schwergefallen ist. Dazu sagt NELSON:

> *Welch eindringlich mahnendes Beispiel für das Mißverhältnis zwischen der objektiven Klarheit und systematischen Vollkommenheit einer wissenschaftlichen Lehre einerseits und der pädagogischen Gewähr für das Verständnis andererseits.*[3] *[NELSON 1922, S. 69]*

Das heißt, sogar das einleuchtende System der Mathematik, das auf vollkommen klaren Prinzipien basiert und das durch die Methode des *progressiven Schließens* erzeugt ist, kann auch von den besten Lehrern nicht einfach nach der dogmatischen Methode unterrichtet werden, ohne zu riskieren, dass ein gründliches Verständis ausbleibt.

> *[…] Und da kommen wir zu dem [Rück-]Schluß, daß, wenn anders es überhaupt eine Gewähr für das Verstehen einer Sache gibt, der sokratische Unterricht solche Gewähr übernimmt. Und damit haben wir mehr gewonnen, als wir suchten. Denn dieser Schluß gilt ja nicht nur für die Philosophie, sondern für jedes Fach, wo überhaupt von Verstehen die Rede sein kann. [NELSON 1922, S. 67]*

Literatur

[1] NELSON, LEONARD (1922): Die Sokratische Methode. In: Birnbacher, Dieter & Krohn, Dieter (Hrsg.) (2002): Das Sokratische Gespräch. Philipp Reclam jun. GmbH & Co. KG, Stuttgart.

[2] PECKHAUS, VOLKER (1990): Hilbertprogramm und Kritische Philosophie. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

[3] RAUPACH-STREY, GISELA (2012): Sokratische Didaktik. Die didaktische Bedeutung der Sokratischen Methode in der Tradition von Leonard Nelson und Gustav Heckmann. Berlin: Lit Verlag Dr. W. Hopf.

[4] HECKMANN, GUSTAV & PHILOSOPHISCH-POLITISCHEN AKADEMIE (Hrsg.) (1993): Das Sokratische Gespräch. Frankfurt am Main: Dipa-Verlag GmbH.

[5] LOSKA, RAINER (1995): Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

[6] NICKEL, GREGOR (2001): Zwingende Beweise – Zur subversiven Despotie der Mathematik. In: J. Dietrich, U. Müller-Koch (Hrsg.): Ethik und Ästhetik der Gewalt. mentis Verlag, Paderborn 2006, S. 261 – 282.

[3] Hier hat NELSON vorausgesetzt, dass die mathematische Prinzipien und ihre Gültigkeit anschaulich vollkommen klar sind. Die Schwierigkeiten eines DU BOIS-REYMOND sind dann lediglich didaktischer Art. Wenn das nicht angenommen wird, könnte das Beispiel aber auch zeigen, dass die mathematischen Grundlagen nicht so klar sind, wie er behauptet.

JÖRG MEYER

Denken und Mathematik

1. Eine Textaufgabe

Auf einem Bauernhof gibt es Hühner und Schweine. Zusammen haben die Tiere 20 Köpfe und 50 Beine. Wie viele Hühner und Schweine sind vorhanden?

Die „Standardlösung" geht so: Ist x die Anzahl der Hühner und y die Anzahl der Schweine, so gelten die Gleichungen $x + y = 20$ und $2 \cdot x + 4 \cdot y = 50$ mit der Lösung $x = 15$ und $y = 5$. Abgesehen davon, dass man für diese Textaufgabe selbstverständlich gar keine Formeln bräuchte, so liefert die Standardlösung aus Sicht der Schülerinnen und Schüler doch einige Probleme: Es ist x immer eine Unbekannte, von der man gar nicht weiß, wie groß sie ist. Dann weiß man auch nicht, wie groß $2 \cdot x$ ist. Und überhaupt: Was haben die Schweine mit Formeln zu tun? Man kann auch an keinem Huhn ein „x" erkennen.

Die Lehrkraft mag über diese „Einwände" lächeln. Dass man nicht weiß, wie groß $2 \cdot x$ ist, wird nicht weiter für schlimm gehalten – man weiß ja auch nicht, wie groß $2 \cdot y$ ist – und sogar als Vorteil der Methode angesehen, da man doch weiß, dass die Summe der beiden unbekannten Ausdrücke 50 ergeben muss. Und dass die Schweine selber nichts mit Formeln zu tun haben: Da wird die Lehrkraft sagen, dass das auch niemand behauptet hätte, dass es vielmehr um eine *Beziehung* zwischen den Anzahlen gehe. Schließlich zum letzten Einwand: Auch bei 3 Kühen ist an keiner Kuh die „3" zu erkennen, weil man ja gerade von der Einzelkuh abstrahiert und sie nur als Element einer Dreiermenge sieht. Und überhaupt: Die Textaufgabe und das lineare Gleichungssystem hätten doch die *gleiche Struktur*!

2. Zur Gleichheit und zur Diskretisierung

Bleiben wir erst einmal bei den Kühen! Hat man drei Kühe, so werden diese als gleich angesehen, obwohl sie natürlich nicht identisch zueinander sind. Dieses „gleich" ist das Resultat eines Abstraktionsprozesses, der nicht von den Objekten (hier: den Kühen) selber ausgeht. Eigentlich müsste man bei Gleichheit sagen, in welcher Hinsicht diese gemeint ist. Hier ist diese Hinsicht so etwas wie die Eigenschaft, Kuh zu sein, nicht aber die Farbe oder Größe. Die „Gleichheit" ist eine Art von Äquivalenzrelation (der Vergleich trifft nicht ganz, da, wie wir noch sehen werden, die „Kuhheit" nicht wohldefiniert ist).

Das ist doch alles entsetzlich trivial, wird man meinen, sollte aber dabei berücksichtigen, dass der erwähnte Abstraktionsprozess nur ein Beispiel einer allgemeinen Begriffsbildung ist, von der schon 1690 JOHN LOCKE bemerkte:

All things that exist being particulars, it may perhaps be thought reasonable that words, which ought to be conformed to things, should be so too, I mean in their signification: but yet we find quite the contrary. The far greatest part of words that make all languages are general terms: which has not been the effect of neglect or chance, but of reason and necessity. (…) Since all things that exist are only particulars, how come we by general *terms; or where find we those general natures they are supposed to stand for?* [*LOCKE 1690, Book III, Chapter III; Sätze 1 und 6*]

Die Abstraktion wird schon 1710 von GEORGE BERKELEY nicht als Übergang zu Äquivalenzklassen, sondern als Übergang zu den Repräsentanten einer Äquivalenzrelation gesehen:

I believe we shall acknowledge that an idea (…) becomes general by being made to represent or stand for all other particular ideas of the SAME SORT. To make this plain by an example, suppose a geometrician is demonstrating the method of cutting a line in two equal parts. He draws, for instance, a black line of an inch in length: this, which in itself is a particular line, is nevertheless with regard to its signification general, since, as it is there used, it represents all particular lines whatsoever; so that what is demonstrated of it is demonstrated of all lines, or, in other words, of a line in general. [BERKELEY 1710, § 12]

Begriffe als „general terms“ finden sich nicht als Objekte in der Welt vor, sondern werden von Menschen gemacht und kulturell überliefert. Begriffe überziehen die Welt mit (angenäherten) Äquivalenzrelationen. Dabei sei „Welt“ vorontologisch verstanden als Gesamtheit der durch unsere Sinnesorgane (und durch die Formen unseres Bewusstseins) vermittelten Wahrnehmungen. FRIEDRICH NIETZSCHE formuliert es treffend:

Jeder Begriff entsteht durch Gleichsetzen des Nicht-Gleichen. [NIETZSCHE 1873, Band 1; S. 880]

Dass die erwähnten Äquivalenzrelationen nur angenähert sind, sieht man an der Frage, was eigentlich genau eine Kuh sei. Ist sie erst eine nach dem Kalben oder auch kurz davor? Begriffe sollen die Eigenschaft haben, die (zunächst als kontinuierlich erscheinende) Welt zu *diskretisieren* [SOKOLOWSKI 2000, S. 79 und 109 f.] und damit das unendlich Reichhaltige in endlicher Weise zu fassen. Dass der Diskretisierungsprozess erwartungsgemäß zu Problemen führt, wussten bereits die „alten Griechen“, denn eine wohl auf EUBOLIDES [DIOGENES LAERTIUS, Buch II, Kap. X, § 108] zurückgehende Paradoxie lautet: Wie viele Haare darf ein Mensch noch haben, damit er als kahlköpfig gilt?

Dass verschiedene Diskretisierungen zu ganz unterschiedlichen „Erkenntnissen“ führen können, lässt sich anhand eines Beispiels aus der beschreibenden Statistik erahnen (bei dem eine schon bestehende Diskretisierung weiter vergröbert wird).

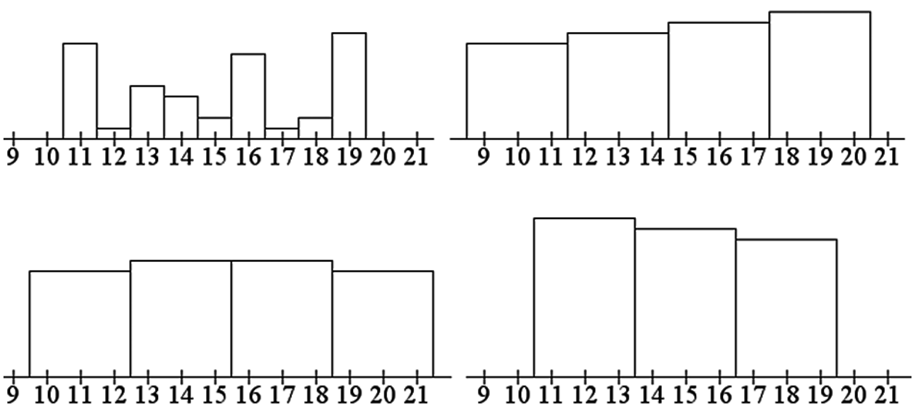

Abb. 1: Verschiebungen der Klasseneinteilung führen zu unterschiedlichen Bildern

Abb. 1 zeigt, wie eine von der links oben dargestellten Verteilung ausgehenden Vergröberung nur durch Verschiebung der Klasseneinteilung zu ganz unterschiedlichen Aussagen führt.

Begriffe entstehen nicht nur, indem man *diskretisiert*, sondern auch, indem man *formalisiert* oder indem man *ursprüngliche Kontexte verlässt*. Die beiden letzten Punkte dieser unvollständigen Liste werden in den folgenden Abschnitten erläutert und mit Beispielen aus der Mathematik versehen sowie zum Abschluss mit dem Problem der Identität in Beziehung gebracht. Damit erklärt sich auch der Titel dieses Aufsatzes: Begriffliches Denken allgemein und Mathematik haben viele Gemeinsamkeiten.

3. Probleme der Formalisierung

Versucht man, semantische Zusammenhänge syntaktisch zu fassen, so kann es passieren, dass dabei das „eigentlich Gemeinte" in den Hintergrund tritt oder sogar verlorengeht. Die formalisierte Version bekommt ein unvermutetes Eigenleben!

Dies lässt sich gut einsehen etwa an der Formalisierung der *stochastischen Unabhängigkeit*. Mit dem Begriff der Unabhängigkeit verbindet man eine gewisse Intuition. Versucht man den Begriff exakt zu fassen, kann genau diese Exaktifizierung zu Konsequenzen führen, die kontraintuitiv sind. Man wird durch einfache Beispiele dahin geführt zu sagen, dass zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind, wenn $\text{prob}(A \wedge B) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}(B)$ gilt. Aber das folgende Beispiel [nach SCOZZAFAVA 1997, S. 57 f.] widerspricht der ursprünglichen Intuition:

> *Eine Urne enthält eine weiße, eine schwarze und eine rote Kugel. Wir ziehen nur einmal und betrachten die Ereignisse* WR*: „Das Ergebnis der Ziehung ist weiß oder rot" sowie* WS*: „Das Ergebnis der Ziehung ist weiß oder schwarz". Die Ereignisse* WR *und* WS *sind* nicht *stochastisch unabhängig wegen* $\frac{1}{3} = prob(WR \wedge WS) \neq prob(WR) \cdot prob(WS) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.
>
> *Nun wird zusätzlich eine gelbe Kugel in die Urne getan. Jetzt sind die Ereignisse* WR *und* WS *wegen* $\frac{1}{4} = prob(WR \wedge WS) = prob(WR) \cdot prob(WS) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}$ doch *stochastisch unabhängig, obwohl die gelbe Kugel für die betrachteten Ereignisse völlig irrelevant ist! Legt man statt einer nun* zwei *gelbe Kugeln in die ursprünglich betrachtete Urne, so sind die Ereignisse* WR *und* WS *wiederum nicht stochastisch unabhängig. Mit Intuition haben diese Rechenergebnisse nichts mehr zu tun! Die Intuitionsferne wird noch deutlicher, wenn die ursprüngliche Urne 2 weiße, 3 rote, 6 schwarze und* g *gelbe Kugeln enthält und man weiterhin nur einmal eine Kugel ziehen darf. Dann sind* WR *und* WS *genau dann stochastisch unabhängig, wenn* $g = 9$ *ist.*

Die Probleme der Formalisierung scheinen auf die Mathematik (und auf die Naturwissenschaften) beschränkt zu sein. Aber schon die durchgängige Orientierung am Subjekt-Prädikat-Schema deutscher Sätze ist nur formal, wie sich leicht an folgenden Fragen erkennen lässt: Was ist mit „es" in dem Satz „Es regnet" gemeint? Wer oder was gibt, wenn man sagt „Es gibt nichts zu tun"? Und kann man wirklich von einer Tätigkeit der Butter reden, wenn sie im Preise steigt [WITTGENSTEIN 1953, Nr. 693]? LUDWIG WITTGENSTEIN vermutet, dass *alle* philosophischen Probleme auf Probleme der Sprache zurückzuführen sind:

> *Die Probleme, die durch ein Mißdeuten unserer Sprachformen entstehen, haben den Charakter der* Tiefe. *[WITTGENSTEIN 1953, Nr. 111]*

4. Verlassen ursprünglicher Kontexte

Dass schon aufgrund von Diskretisierung und Formalisierung Sprache und Welt nicht zueinander kongruent sind, kann zu Scheinproblemen führen: Bei der konsequenten Anwendung von *syntaktischen* Sprachregeln (die gerne als Regeln der „Vernunft" gesehen werden) kann der *semantische* Weltbezug verloren gehen:

> *[Die Sprache] hat oder erfaßt ihren Gegenstand eigentlich nur dadurch, daß sie über ihn hinausschießt, daß sie mehr ist als der bloße Gegenstand. [ADORNO 1973, I, S. 68]*

Die Sprache wie auch generell die die Erfahrungen ordnende Vernunft erzeugt „Fluchtpunkte der Erkenntnis" [ADORNO 1974, II, S. 105], denen keine möglichen Erfahrungen mehr entsprechen müssen.

Ein klassisches Beispiel stellen die Antinomien der reinen Vernunft in der „Kritik der reinen Vernunft" von IMMANUEL KANT dar. So lässt sich etwa gleichermaßen „begründen", dass die Welt endlich und unendlich sei, ohne das semantisch entscheiden zu können.

Erfahrung bzw. Kenntnis der „Welt" ist durch unser Erkenntnisvermögen (und durch unsere Sprache) vorstrukturiert. Anders ausgedrückt: Es gibt einen „Primat der Logik über das Seiende" [ADORNO 1974, II, S. 115].

Auch in der Mathematik gibt es Beispiele, bei denen man syntaktisch „vernünftig" aussehende Ausdrücke bilden kann, deren semantischer Sinn jedoch zunächst verborgen bleibt. Hierzu gehören formal gebildete Ausdrücke wie 3^{-4} (wie soll man die Drei (–4)-mal mit sich selber malnehmen?), deren Bedeutung sich jedoch schnell klären lässt, oder die Frage, was eigentlich $\left(\frac{1}{2}\right)!$ sein soll. In der Regel ist es eine reizvolle Aufgabe, den Sinn in syntaktischen Ergänzungen erst einmal zu suchen, wie in folgendem Beispiel:

Ist $(u;\ v)$ ein Punkt auf der Normalparabel, so hat die dortige Tangente die Gleichung $y = 2 \cdot u \cdot x - v$. Was lässt sich über die zu dieser Gleichung gehörigen Gerade g sagen, wenn $(u;\ v)$ *nicht* auf der Parabel liegt? Hier wird bewusst der ursprüngliche semantische Kontext verlassen, *ohne* zunächst einen neuen Kontext zu haben. Die Fragestellung ist fruchtbar und führt zur Pol-Polarentheorie.

Dieses Verlassen ursprünglicher Kontexte ist für die Mathematik typisch: Muster werden syntaktisch beschrieben und fortgesetzt in Bereiche, die keine Interpretation im ursprünglichen Gegenstandsbereich haben.

So wird der Cosinus zunächst definiert als das Verhältnis zwischen zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, dann wird dieser Gegenstandsbereich verlassen und eine Strukturgleichheit zu den Koordinaten der Punkte eines Ursprungskreises im I. Quadranten festgestellt, so dass man nun auch Cosinuswerte für Winkel betrachten kann, die größer sind als 90°, dann wird wiederum auch dieser Gegenstandsbereich verlassen und eine Strukturgleichheit mit einer Reihenentwicklung festgestellt, sodass man dann sogar Cosinuswerte betrachten kann, deren Betrag größer ist als 1 und so weiter (z. B. ist $\cos\left(\mathrm{i} \cdot \operatorname{acosh}(n)\right) = n$).

Eine solche *Ablösung* von semantischen Bezügen zugunsten des Denkens in Mustern und Strukturen ist typisch für den wissenschaftlichen Fortschritt:

> *Wichtig ist jedoch, zu sehen, daß wir nirgendwo in der Entwicklung des Denkens mehr jene absolut prästabilierte Harmonie zwischen Denken und Sein (…) antreffen, daß (…) deshalb das absolute Insistieren auf substantiellen Interpretationen, auf sogenannten*

„Was-ist-Fragen", in die Irre führt. (…) Wissenschaftliches und künstlerisches Wissen ist immer formal und verlangt den Verzicht auf eine unmittelbare Reifizierung seiner einzelnen Bestandteile. [OTTE 1994, S. 63 und S. 239]

Man kann es auch andersherum sehen: Einer der berühmtesten Sätze in WITTGENSTEIN (es handelt sich um Satz 5.6) lautet:

Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt. [WITTGENSTEIN 1921]

Dieser Satz wird fruchtbar, wenn man ihn positiv wendet: Erweitert man die Sprache, indem man die ursprüngliche Semantik verlässt, so kann es sein, dass sich neue Semantiken ergeben (man beachte die bisherigen Beispiele) und dass sich auf diese Weise „meine Welt" (die verschieden ist von der „Welt" im bisherigen Sinne; gemeint ist jetzt die Welt meiner Vorstellungen, meiner Ideen) erweitert.

Aber nicht jede Spracherweiterung führt zu einer erweiterten Semantik, wie man etwa am Beispiel 0^0 sieht. Fasst man diesen Ausdruck als Grenzwert $\lim_{x\to 0} x^0 = 1$, so bekommt man ein anderes Ergebnis, als wenn man 0^0 als Grenzwert $\lim_{y\to 0} 0^y = 0$ ansieht. Dahinter steckt, dass auf der Fläche zu $f(x, y) = x^y$ der Grenzwert $\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} f(x, y)$ wegabhängig ist. (Der Ansatz $\lim_{x\to +0} x^x$ ist mathematisch schwieriger und führt zum Grenzwert 1.) Weitere Beispiele gibt es zuhauf: Auch $\lim_{(x,\, y)\to(0,\, 0)} \frac{y}{x}$ existiert nicht, denn nähert man sich dem Ursprung $(0, 0)$ auf der Geraden zu $y = m \cdot x$, so bekommt man $\lim_{x\to 0} \frac{m\cdot x}{x} = m$; also führt jeder dieser Wege zu einem anderen Grenzwert.

5. Zur Identität

Man meint vielleicht, über Identität gar nicht reden zu müssen: Dass zwei Kühe als gleich angesehen werden, mag ja noch eine Aussage sein, aber dass eine Kuh mit sich selbst identisch ist? Die Angelegenheit verliert jedoch an Trivialität, wenn man daran erinnert, dass – schon aufgrund der Formalisierung, der Diskretisierung sowie des Verlassens ursprünglicher Kontexte – begriffliches Denken die Erscheinungen der Welt nicht isomorph oder wenigstens bijektiv abbildet. Meint man mit verschiedenen sprachlichen, formalen, begrifflichen Fassungen wirklich dasselbe? Sind die Objekte des Redens tatsächlich miteinander identisch?

Das ist schon innerhalb der Mathematik nicht unproblematisch: Die unterschiedlichen Ansätze, die Punkte einer Geraden zu erfassen, etwa durch verschiedene Axiomatisierungen der reellen Zahlen, könnten möglicherweise gar nicht dasselbe Objekt Gerade beschreiben. Auch hier haben schon die „alten Griechen" die Erfahrung machen müssen, dass die naive Kennzeichnung der Punkte durch rationale Zahlen die Gerade keineswegs beschreibt. Die Menge der reellen Zahlen liefert offensichtlich eine passende Beschreibung von dem, was man sich geometrisch unter einer Geraden vorstellt, aber was ist mit den Differentialen der Non-Standard-Analysis? Kann man diese auch auf der Geraden verorten?

The problem of identity in mathematics can be viewed as the problem of explaining how disparate syntaxes can have the same semantics. [ROTA 1997, S. 152]

Offenbar ist das Identitätsproblem invers zum oben behandelten Problem der Gleichheit: Da die Sprache keine direkten Aussagen über die „Gegenstände“ der Welt macht, können unterschiedliche Sachverhalte als gleich beschrieben werden. Dies ist das Problem der Gleichheit. Andererseits passen unterschiedliche Beschreibungen auf ein und denselben Sachverhalt. Das ist eine wesentliche Facette des Problems der Identität.

Damit hängt auch die Frage der *Anwendbarkeit* zusammen: Lässt sich ein Sachverhalt durch eine bestimmte mathematische Struktur angemessen beschreiben? Dass Schülerinnen und Schüler damit Probleme haben können, wurde zu Beginn dieses Aufsatzes erläutert. An den Alltag anknüpfende Textaufgaben und Anwendungen sind für das Verständnis von Mathematik unerlässlich; es gilt aber auch:

> *Das Hin und Her zwischen inhaltlicher Metaphorik und (…) regelrechtem Rechnen dürfte für viele Lerner das verwirrendste Merkmal der Mathematik sein und die größte Lernhürde darstellen. [WINTER 1989, S. 48]*

Literatur

[1] ADORNO, THEODOR W. (1973 – 74): Philosophische Terminologie I, II. Suhrkamp stw.
[2] BERKELEY, GEORGE (1710): A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge.
[3] DIOGENES LAERTIUS: Leben und Meinungen berühmter Philosophen.
[4] KANT, IMMANUEL (1781): Kritik der reinen Vernunft.
[5] LOCKE, JOHN (1690): An Essay Concerning Human Understanding.
[6] OTTE, MICHAEL (1994): Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Suhrkamp stw.
[7] NIETZSCHE, FRIEDRICH: Kritische Studienausgabe (Hrsg.: Colli / Montinari). dtv
[8] ROTA, GIAN-CARLO (1997): Indiscrete Thoughts. Birkhäuser.
[9] SCOZZAFAVA, ROMANO (1997): Probabilità soggestiva. Mailand: Masson.
[10] SOKOLOWSKI, ROBERT (2000): Introduction to Phenomenology. Cambridge University Press.
[11] WINTER, HEINRICH (1989): Entdeckendes Lernen. Vieweg.
[12] WITTGENSTEIN, LUDWIG (1921): Tractatus logico-philosophicus.
[13] WITTGENSTEIN, LUDWIG (1953): Philosophische Untersuchungen.

STEPHAN BERENDONK

Wider den mathematikdidaktischen Induktivismus

1. LAKATOS als Gegner des Deduktivismus

Beispiel – Beweis – Definition – Satz. Dieser Text beginnt offenbar mit einer Antwort. Aber auf welche Frage? Vielleicht: Was sind die Grundbausteine für jeden mathematischen Text? Ungewöhnlich ist dann nur die Reihenfolge der Wörter. Diese sind wohl durcheinandergeraten. Richtig muss es heißen: Definition – Satz – Beweis – Beispiel, oder auch nur: Definition – Satz – Beweis. Der Wissenschaftsphilosoph IMRE LAKATOS (1922 – 1974) bezeichnete diese für die Mathematik so charakteristische Form der Darstellung als den *deduktivistischen* Stil:

> *Dieser Stil beginnt mit einer sorgfältig zusammengestellten Liste von* Axiomen, Hilfssätzen *und/oder* Definitionen. *[…] Der Liste der Axiome und Definitionen folgen in sorgfältiger Wortwahl die* Sätze. *[…] Dem Satz folgt der* Beweis. *[LAKATOS 1979, S. 134]*

Im obigen Zitat wurden zwei Passagen ausgeklammert. Sie sollen dem Leser jedoch nicht vorenthalten werden:

> *Die Axiome und Definitionen erscheinen häufig gekünstelt und geheimnisvoll verwickelt. Niemals wird mitgeteilt, wie diese Verwicklungen zustandekamen. [LAKATOS 1979, S. 134]*

Und in Bezug auf die Sätze schreibt LAKATOS:

> *Diese sind beladen mit umständlichen Bedingungen; es erscheint unmöglich, daß irgendjemand sie jemals erraten hat. [LAKATOS 1979, S. 134]*

Es stimmt, IMRE LAKATOS war kein Freund des deduktivistischen Stils. Dieser Stil bringt eine Geringschätzung der Entstehungszusammenhänge von Resultaten zum Ausdruck. Er vernebelt die Herkunft von Definitionen und ist damit Vater des mathematischen *Deus ex machina*.[1] Zudem lässt er die Mathematik als endgültig und unveränderlich erscheinen. Damit ist der deduktivistische Stil in seiner reinen Form zumindest für Lehrbücher völlig ungeeignet. Wer seine *Ideen* und sein *Vorgehen* kommunizieren möchte, der muss zu einer anderen, einer stärker an der Heuristik orientierten, Darstellungsform greifen. LAKATOS hat hierzu ausdrücklich aufgerufen:

> *Einige schöpferische Mathematiker, die sich nicht von Logikern, Philosophen oder anderen Spinnern ins Handwerk pfuschen lassen wollen, pflegen zu sagen, daß die Einführung eines heuristischen Stiles ein Neuschreiben der Lehrbücher erfordern würde, wodurch sie so umfangreich werden würden, daß kein Mensch sie jemals zuende lesen könnte. Auch Einzelarbeiten würden sehr viel länger. Unsere Antwort auf dieses langweilige Argument ist: Versuchen wir's doch! [LAKATOS 1979, S. 136]*

---

[1] Der *Deus ex machina* bezeichnet ursprünglich in der antiken Tragödie das Auftreten einer Gottheit mit Hilfe einer Bühnenmachinerie. Heute bezeichnet der Ausdruck eine durch plötzliche, unmotiviert eintretende Ereignisse, Personen oder außenstehende Mächte bewirkte Lösung eines Konflikts.

Die hier angeführten Zitate stammen aus LAKATOS' „Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen". In dieser Streitschrift gegen den mathematischen Formalismus wird anhand einer sorgfältigen *(rationalen) Rekonstruktion* der Geschichte des EULERschen Polyeder*satzes* und der damit verbundenen fortschreitenden Entwicklung des Polyeder*begriffs* die Unzulänglichkeit des deduktivstischen Stils zu Tage gefördert und es wird eine geeignetere Darstellungsform erarbeitet. An deren Beginn steht statt einer Definition ein Beweis. Dieser ist jedoch zunächst nichts weiter als ein an Beispielen vollzogenes Gedankenexperiment und er wird von LAKATOS nicht als Wahrheitsbringer, sondern eher als Einsichtgeber verstanden. Die Aufgabe des Beweises ist, das Bewiesene besser angreifbar zu machen. Sorgfältiges Überprüfen der einzelnen Beweisschritte kann dann mögliche Schwachstellen offenbaren und Hinweise für eine sehr gezielte Suche nach Gegenbeispielen liefern. Findet sich ein Gegenbeispiel, so ist das Bewiesene weniger allgemeingültig als gedacht. Der Gültigkeitsbereich muss dann durch Formulierung einer zusätzlichen Bedingung eingeschränkt werden. Dadurch entsteht ein neuer Begriff, der von LAKATOS als *beweiserzeugt* bezeichnet wird, schließlich ist er ja durch die kritische Analyse des Beweises entstanden. Die Definition des Begriffs setzt also die Kenntnis des Beweises voraus. Nachdem hinreichend nachgebessert wurde, verwandelt sich das Bewiesene in einen Satz. Beispiel – Beweis – Definition – Satz. Das ist die Reihenfolge der Grundbausteine im *heuristisch* geschriebenen mathematischen Text.[2]

2. POLYA als Rechtfertigung eines mathematikdidaktischen Induktivismus

LAKATOS forderte nichts Geringeres als den Paradigmenwechsel weg von *Mathematik als Produkt* hin zu *Mathematik als Prozess*. Damit trat er in die riesigen Fußstapfen seines Mentors GEORG POLYA[3] (1887 – 1985). Während sich diese Forderung bei LAKATOS auf die mathematische Literatur beschränkt, bezieht sie sich bei POLYA auch auf den mathematischen Unterricht:

> *Die fertige Mathematik in fertiger Form dargestellt, erscheint als rein demonstrativ. Sie besteht nur aus Beweisen. Aber die im Entstehen begriffene Mathematik gleicht jeder anderen Art menschlichen Wissens, das im Entstehen ist. Man muß einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist; man muß die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Details ausführt […]. Das Resultat der schöpferischen Tätigkeit des Mathematikers ist demonstratives Schließen, ist ein Beweis; aber entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen, durch Erraten. Wenn das Erlernen der Mathematik einigermaßen ihre Erfindung widerspiegeln soll, so muß es einen Platz für Erraten, für plausibles Schließen haben. [POLYA 1969, S. 10]*

Das Zitat stammt aus POLYAS zweibändigem Werk „Mathematik und plausibles Schließen". Mit diesem Werk wendet sich POLYA gegen die Diskriminierung des *induktiven* und *analogen Schließens*. Anhand zahlloser Beispiele verschiedenster Komplexität zeigt POLYA seinen Lesern, dass plausible Schlussweisen vernünftige, effektive und essentielle Vorgehens-

[2] Streng genommen ist diese Aussage Unsinn. Heuristische Darstellungen benötigen kein universelles vorgegebenes Schema, schon gar nicht eines, das die gliedernden Elemente des deduktivistischen Darstellungsstils verwendet.

[3] POLYAs Buch „How to solve it" wurde von LAKATOS ins Ungarische übersetzt. POLYA schlug die Geschichte des EULERschen Polyedersatzes als Thema von LAKATOS' Dissertation "Essays in the Logic of Mathematical Discovery" vor, und fungierte schließlich als zweiter Gutachter dieser Dissertation.

weisen beim schöpferischen Betreiben von Mathematik sind. Er wirbt also für die Anerkennung der Rolle nicht-deduktiver Schlussweisen beim mathematischen Entdecken und für ihre Berücksichtigung beim Lehren von Mathematik. Sein Buch ist auch heute noch *das* Musterbeispiel für heuristisch geschriebene Mathematik. Um dem Leser die Rationalität des induktiven Vorgehens vor Augen zu führen, vergleicht bzw. identifiziert POLYA an vielen Stellen die Situation des Mathematikers mit der eines Naturforschers oder Physikers. Wir geben hier exemplarisch nur zwei Passagen wieder [vgl. aber auch POLYA 1969, S. 22, 31, 47, 68–70, 73, 87, 112, 138 und 140):

> *Wir betrachten die in unserer Tafel dargestellten Resultate wie ein Naturforscher die Sammlung seiner Exemplare betrachtet. Diese Tafel fordert unsere Erfindungskraft, unser Beobachtungsvermögen heraus. Glückt es uns, irgendeinen Zusammenhang, irgendeine Regelmäßigkeit zu entdecken? [POLYA 1969, S. 83]*
>
> *Ein Physiker könnte sich leicht ganz ähnliche Fragen stellen. Er untersucht zum Beispiel die Doppelbrechung von Kristallen. Manche Kristalle weisen Doppelbrechung auf, andere nicht. Welche sind doppelbrechend, welche sind es nicht? Was ist der Unterschied zwischen den beiden Fällen? Der Physiker betrachtet seine Kristalle, und wir betrachten unsere beiden Klassen von Primzahlen 5, 13, 17, 29, … und 3, 7, 11, 19, 23, 31, … Wir suchen nach irgendeinem charakteristischen Unterschied zwischen den beiden Klassen. [POLYA 1969, S. 103]*

Wie ist die Situation heute? Haben sich POLYAs Forderungen durchgesetzt? In der Hochschullehre sicherlich nicht. Dort herrscht weiterhin hauptsächlich der Deduktivismus. In den Schulen dagegen ist vom einstigen Deduktivismus kaum noch etwas zu erkennen. Zudem könnten wir den geforderten Perspektivwechsel hin zu Mathematik als Tätigkeit durch die Einführung und Betonung der *prozessbezogenen Kompetenzen* als vollzogen ansehen. Von *induktivem Schließen* ist darin zwar nicht explizit die Rede, doch wir treffen POLYAs induktiv-naturwissenschaftliche Sichtweise in vielen Beiträgen prominenter Vertreter der Mathematikdidaktik an. *Forschendes Lernen* [vgl. LEUDERS 2014, S. 238] und *experimentelles Denken* [vgl. PHILIPP 2012] sind in diesem Zusammenhang die zeitgemäßen Begriffe in Bezug auf aktuelle Forderungen für den Mathematikunterricht:

> *Forschendes Lernen ist ein Unterrichtsansatz, in dem herausfordernde Situationen entwickelt werden, die Lernende zu Folgendem auffordern sollen: Phänomene zu beobachten und zu hinterfragen; Erklärungen dafür zu geben, was sie beobachten; sich Experimente auszudenken, in denen Daten gesammelt werden, und diese durchzuführen, um ihre Theorien zu stützen oder zu widerlegen; Daten zu analysieren; Schlussfolgerungen aus den experimentellen Daten zu ziehen; Modelle zu entwerfen und zu bauen – oder eine Kombination aus diesen Tätigkeiten. [HATTIE 2013, S. 247]*
>
> *Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht […] wird im Folgenden als* innermathematisches Experimentieren *bezeichnet. […] Streng* deduktive *Prozesse hingegen dienen der Absicherung von Vermutungen im Rahmen einer gegebenen Argumentationsbasis (im Extremfall einem Axiomensystem) und stellen eine spezifische Stärke der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin dar. Sie dominieren die Darstellung von „fertiger" Mathematik in Publikationen und Vorlesungen […] und induzieren ein einseitiges Bild der Wissenschaft Mathematik. Für das Verständnis epistemologischer Prozesse muss die Perspektive […] induktiver Prozesse mindestens als gleichbedeutend einbezogen werden. In der Akzentu-*

ierung dieser Prozesse sehen wir uns in einer von Lakatos […] begründeten wissenschaftsphilosophischen Tradition. [LEUDERS, NACCARELLA & PHILIPP 2011, S. 207]

Viel Anerkennung und Aufmerksamkeit für den Induktivismus also. POLYA und LAKATOS dürften mit dieser Entwicklung zufrieden sein, oder?

3. LAKATOS als Fürsprecher des deduktiven Schließens

Was soll nun diese Überschrift? Haben wir LAKATOS nicht soeben als Gegner der Deduktion kennengelernt? Um Licht ins Dunkel zu bringen, zitieren wir aus einer von der Mathematikdidaktik wenig berücksichtigten Passage. LAKATOS wendet sich darin gegen das eifrige und besonders im Induktivismus wuchernde Sammeln und Tabellarisieren von Daten:

[…] wenn Du – fälschlicherweise – glaubst, je länger die Tabelle ist, auf desto mehr Vermutungen wird sie hinweisen und sie später stützen, dann kannst Du Deine Zeit mit der Anhäufung überflüssiger Daten verschwenden. Und einmal darin unterwiesen, daß der Weg der Entdeckung von den Tatsachen zur Vermutung und von der Vermutung zum Beweis führt (der Mythos der Induktion), kannst Du die heuristische Alternative: deduktives Mutmaßen völlig vergessen. [LAKATOS 1979, S. 66–67]

Was meint LAKATOS, wenn er von *deduktivem Mutmaßen* spricht? Wir müssen ein Beispiel geben: Jedes Polygon besitzt genauso viele Ecken wie Kanten. Bei einem Polyeder ist das nicht der Fall. Dies erzeugt einen kognitiven Konflikt, keinen logischen natürlich, denn ein Polyeder besteht aus mehreren Polygonen, wohingegen ein Polygon eben nur aus einem einzigen Polygon besteht. An welcher Stelle bricht die Beziehung *Ecken = Kanten* beim Bau des Polyeders aus den einzelnen Polygonen zusammen? Wir beginnen mit einem Polygon und kleben ein zweites entlang einer Kante an das erste. Durch das Verkleben gehen zwei Ecken, aber nur eine Kante verloren. Das aus den beiden Polygonen zusammengesetzte Objekt besitzt nun nicht mehr gleich viele Ecken wie Kanten, sondern genau eine Kante mehr. Beim Ankleben weiterer Polygone passiert das Gleiche. Jedes zusätzliche Polygon erhöht den Kantenüberschuss um 1, da jeweils eine Ecke mehr als Kanten verklebt werden. Nur beim Hinzufügen des letzten Polygons ist das nicht mehr der Fall. Dabei werden nämlich alle Kanten, also der gesamte Rand, des letzten Polygons verklebt, sodass ebenso viele Ecken wie Kanten verloren gehen. Bis auf das erste und das letzte Polygon erzeugt also jedes Polygon einen Kantenüberschuss von 1. Besitzt das Polygon E Ecken, K Kanten und F Flächen, dann gilt offenbar: $K-E=F-2$. Damit haben wir durch plausibles, aber deduktives Schließen, d. h. durch *deduktives Mutmaßen*, den EULERschen Polyedersatz entdeckt und gleichzeitig bewiesen. Anders als POLYA im Eifer des Gefechts behauptet, kann man einen Satz also auch beweisen, ohne ihn zuvor erraten zu haben. LAKATOS weiß die vielen Entdeckungsgeschichten, die POLYA als Beispiele für die Fruchtbarkeit des induktiven Schließens anführt, zu schätzen und erkennt darin vernünftiges mathematisches Verhalten. Er bezeichnet das von POLYA dargestellte Vorgehen jedoch nicht als Induktion, sondern als *naives Mutmaßen* und fordert:

Wir müssen gewiß beide *heuristischen Muster lernen:* deduktives Mutmaßen *ist das Beste, aber* naives Mutmaßen *ist immernoch besser als gar kein Mutmaßen. [LAKATOS 1979, S. 66]*

LAKATOS ist also gegen den seit EUKLID praktizierten rein am Deduktiven orientierten Darstellungsstil, aber er ist ausdrücklich für die Beachtung der Deduktion oder besser des *Dedu-*

zierens als mächtige heuristische Schlussweise. Eine weitere typisch deduktive Vorgehensweise ist das Verallgemeinern von Resultaten mit Hilfe der vorhandenen Beweise. Zum Beispiel lässt sich der EUKLIDische Beweis des Satzes des PYTHAGORAS auch auf beliebige Dreiecke anwenden und führt dann zur Entdeckung des Kosinussatzes [vgl. BROWN & WALTER 1983, S. 52–62]. Auf induktive Weise lässt sich der Satz dagegen kaum entdecken. Viele weitere Beispiele dieser Art findet man in verschiedenen Beiträgen von DE VILLIERS [vgl. DE VILLIERS 1990, S. 21–22, 2007a, S. 188–192, 2007b, S. 9–11 und 2009]. Diese *entdeckende* Funktion von Beweisen wird, wie DE VILLIERS beklagt, leider häufig übersehen:

> *Several new textbooks around the world today proclaim to using an "investigative approach" by which they mean that they try to accurately reflect how mathematicians conduct their research and make new advances. Unfortunately, upon closer analysis the majority of these books let students discover mathematical results experimentally, and then proof is introduced only as a means of "making sure" these experimentally discovered results are generally true. In other words, only the "verification" function of proof is really developed or introduced. However, to the working mathematician proof (or more generally, deductive reasoning) is not merely a means of verifying an already-discovered result, but often also a means of exploring, analysing, discovering and inventing new results. [DE VILLIER 2007b, S. 9]*

Tatsächlich lässt sich in der mathematikdidaktischen Literatur eine Reduktion der Deduktion auf deren verifizierende und ordnende Funktion erkennen. Als Beleg sei exemplarisch das folgende Zitat angeführt:

> *Mit dem hier angedeuteten Fokus auf […] induktive Prozesse soll keineswegs die Bedeutung der deduktiven Prozesse, auch im Rahmen schulischen Lernens, in Abrede gestellt werden. Vielmehr finden sich – im Sinne eines stimmigen Gesamtbildes von Mathematik – immer wieder Lernsitutationen, in denen der eine oder der andre Aspekt stärker betont ist. In unserer Analyse nehmen wir solche Lerngelegenheiten in den Blick, in denen Lernende unbekannte Situationen explorieren und neues Wissen generieren […]. Andere Lerngelegenheiten wiederum stellen explizit die Suche nach deduktiven Zusammenhängen, also z. B. nach kongruenzgeometrischen Absicherungen oder nach Zusammenhängen in Begriffshierarchien in den Mittelpunkt. [LEUDERS, NACCARELLA & PHILIPP 2011, S. 207–208]*

Ist diese Situation eine späte Folge von POLYAs Trennung des Entdeckungskontexts vom Beweiskontext – erst Erraten, dann Beweisen? Falls das so sein sollte, so ist POLYA dafür kaum die Schuld zu geben. Zu seiner Zeit galt es dem induktiven Schließen überhaupt einen Platz zu verschaffen. Heute dagegen, wo in den Schulen die Deduktion um ihren Platz kämpfen muss, wirken einige der vielzitierten Aussagen aus POLYAs Werk, ganz im Gegensatz zu seinen Beispielen, in Richtung eines plumpen und zu einseitigen Induktivismus.

4. Quo vadis *Entdeckendes Lernen*?

Im praxisorientierten Beitrag „Forschen an figurierten Zahlen" von ROLF OECHSLER finden wir die Beschreibung einer Entdeckung, bei der der Lehrer durch seine Lenkung das Einschlagen eines induktiven Weges vorgibt [vgl. OECHSLER 2014, S. 25–26]. Es geht um die Frage, wie viele Verbindungsstrecken zwischen N Punkten gezeichnet werden können. Als

Ergebnis erhält die Klasse schließlich den Term: $1+2+3+4+\ldots+(N-1)$. *Strukturiertes Zählen* liefert dieses Ergebnis unmittelbar: Sind noch keine Verbindungsstrecken gezogen, so lassen sich von einem gewählten Punkt $N-1$ Verbindungsstrecken, eben zu den übrigen $N-1$ Punkten ziehen. Für den nächsten Punkt bleiben noch $N-2$ neue Verbindungsstrecken übrig usw. Andererseits erhält man das Ergebnis auch, wenn man Schritt für Schritt einen Punkt hinzufügt, und überlegt, wie viele Verbindungsstrecken durch den jeweils neuen Punkt hinzukommen. Der Lehrer jedoch zielt nicht auf ein solches systematisches Zählen ab. Er lässt die Schülerinnen und Schüler die Anzahl der Verbindungsstrecken für verschiedene Werte von N bestimmen und sammelt die erhobenen Daten in einer Tabelle. Von da an gilt es die Regelmäßigkeit bzw. das Muster in der Tabelle zu erkennen. Herkunft und Bedeutung der erhobenen Daten spielen dann keine Rolle mehr. Um zum Ziel zu gelangen, muss der Lehrer die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf die Differenz der Zahlen in zwei aufeinanderfolgenden Zeilen lenken. In diesem Beispiel erscheint das systematische Zählen als die vernünftige und, wenn sie von den Schülerinnen und Schülern nicht automatisch eingeschlagen wird, eben als erlernenswerte, heuristische Vorgehensweise. Das blinde Datensammeln wirkt dagegen in diesem Fall als unglücklicher Umweg. Ein Hinlenken auf diesen Weg muss dann als dogmatischer Induktivismus interpretiert werden.

Eindrucksvolle mathematische Entdeckungen zeichnen sich durch das kunstvolle Zusammenspiel von induktivem, deduktivem und *analogem* Schließen aus. Ich meine, wir dürfen uns daher beim *Entdeckenden* und *Forschenden Lernen* nicht darauf beschränken nur das induktive Vorgehen zu kultivieren und zu feiern. Dann droht der kreative schöpferische Teil des Mathematikunterrichts zur *Mustererkennung* zu verkommen. Das ergäbe ein eindimensionales wenig attraktives Bild vom forschenden Mathematiker und von Mathematik als Tätigkeit. Das Ziel ist einfach zu formulieren: *Entdeckendes Lernen* muss so gestaltet werden, dass die Schülerinnen und Schüler die gesamte Vielfalt der mathematischen Vorgehensweisen kennenlernen und auch dazu geführt werden, aus diesem Repertoire situationsbedingt in angemessener Weise auszuwählen.

Literatur

[1] Brown, Stephen & Walter, Marion (1983): The Art of Problem Posing. Philadelphia: The Franklin Institute Press.

[2] De Villiers, Michael (1990): The role and function of proof in mathematics. In: Pythagoras, 24(1990), S. 17 – 24.

[3] De Villiers, Michael (2007a): A Hexagon Result and its Generalization via Proof. In: The Montana Mathematics Enthusiast, 4(2007)2, S. 188 – 192.

[4] De Villiers, Michael (2007b): An example of the discovery function of proof. In: Mathematics in School, 36(2007)4, S. 9 – 11.

[5] De Villiers, Michael (2009): Some Adventures in Euclidean Geometry.

[6] Hattie, John (2013): Lernen sichtbar machen. Schneider Verlag: Hohengehren und Baltmannsweiler.

[7] Lakatos, Imre (1979) (Hrsg. John Worrall & Elie Zahar): Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen. Mathematik und plausibles Schliessen, Band 1, Induktion und Analogie in der Mathematik. Braunschweig: Vieweg.

[8] Leuders, Timo & Naccarella, Dominik & Philipp, Kathleen (2011): Experimentelles Denken – Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 32(2011)2, S. 205 – 231.

[9] Leuders, Timo (2014): Entdeckendes Lernen – Produktives Üben. In: Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.): Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II. Zug: Klett und Balmer.

[10] Oechsler, Rolf (2014): Forschenden an figurierten Zahlen. In: mathematik lehren, 184(2014), S. 25 – 29.

[11] Philipp, Kathleen (2013): Experimentelles Denken – Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz. Wiesbaden: Springer Spektrum.

[12] Polya, Georg (1969): Mathematik und plausibles Schließen – Band 1 – Induktion und Analogie in der Mathematik. Basel: Birkhäuser Verlag.

Mathematik und Philosophie in der Zeitschrift MU

Die Frage nach dem Lehren und Lernen von Mathematik muss sich dem Problem stellen, was denn die Besonderheiten dieses Wissens sind. Daher ist es ftir eine Zeitschrift, die dem Mathematikunterricht gewidmet ist, auch wichtig, über den Zusammenhang von Mathematik und Philosophie Beiträge in regelmäßigen Abständen zu publizieren.
Dies begann im 8. Jahrgang mit dem Heft 2/1962 zum Thema „Philosophie im Mathematikunterricht I". Hier wird der Leser zuerst mit einigen Grundproblemen der Ontologie der Mathematik bekannt gemacht. Die Existenz mathematischer Gegenstände wird als ein „Idealer Ansichbestand" erklärt. Nach zwei Aufsätzen zu Mathematik und Erkenntnistheorie wird weiter als Ergebnis der mathematischen Grundlagenforschung dargelegt, dass es eindeutige Kriterien gebe, die die Logik in einen finiten (Aussagenkalküle) und in einen transfiniten (Fragen der Entscheidbarkeit) Bereich zu unterteilen ermöglichen. Schließlich stellt der Herausgeber einige wichtige Arbeiten des 20. Jahrhundert zur Philosophie der Mathematik zusammen.
Mit den Aufsätzen des Heftes 2 des 9. Jahrgangs (Juni 1963) wird fortgesetzt, was im o. a. Heft dieser Schriftenreihe begonnen wurde. Dabei stehen geometrische und algebraische Probleme im Vordergrund. Im letzten Beitrag dieses Heftes „Konkrete Beispiele für philosophisches Denken im Mathematikunterricht" werden aus schulischer Erfahrung heraus eine Reihe konkreter Beispiele für philosophisches Denken im Mathematikunterricht gegeben, wobei hauptsächlich heuristische Verfahren, logische Übungen und Fragen der Axiomatik berücksichtigt werden.
Das nächste Heft zum Thema erschien als Heft 2, 1987. Philosophische Anregungen für eine Didaktik der Mathematik, Entstehung der Wahrscheinlichkeit, Die Zahlen als gesellschaftliche Schöpfung sind die Themen. Der Zusammenhang von mathematischem Wissen und Erfahrung ist eines der zentralen Themen des Begründers der Phänomenologie unseres Jahrhunderts: Edmund Husserl. Es erschien der Herausgeberio des Heftes, Käte Meyer-Drawe, daher naheliegend, ein Heft, dessen Autoren sich mehr oder weniger eng dieser Tradition anschließen, mit einer Auswahlbibliographie abzurunden, in der der Zusammenhang „Edmund Husserl und die Philosophie der Mathematik" repräsentiert wird.
Das letzte Heft zum Thema erschien im Oktober 2007 (Heft 5/2007) unter dem Titel „Philosophie und Mathematik" und geht dem Verhältnis zwischen diesen beiden Wissenschaften nach. Behandelt werden die Themen: „Beweisen und hypothetisch-deduktives Denken", „Die philosophische Karriere der Mathematisierung", „Das mathematisch Unendliche als Gegenstad philosophischer Kritik" sowie „Unverzichtbarkeitsargument im Lichte der modernen Beweistheorie".
Schließlich gab es noch drei Hefte zum Thema „Logische Probleme im Mathematikunterricht", von denen das erste bereits 1959 erschien (Heft 4, Logische Probleme im Mathematikunterricht I). Als Begründung zur Behandlung des Themas in drei Heften wird genannt: Ohne eine wesentliche Berücksichtigung der Verbindungen von Mathematik und Logik ist ein bildender mathematischer Unterricht heute nicht mehr möglich. Die moderne Logik spielt nicht nur eine Rolle in der Fundierung der Mathematik, sie ist mit ihren Auffassungsweisen, Methoden und Darstellungsmitteln unmittelbares mathematisches Werkzeug selbst geworden. Das wirkt sich bis tief in die Elementarmathematik hinein aus.
Die Hefttitel „Logische Probleme im Mathematikunterricht" werden dabei in ihrem zweifachen Sinn verstanden. Sie umfassen einerseits die logische Analyse des mathematischen Schulstoffes und eine entsprechende kritische Untersuchung der methodischen Ausgestaltungen dieses Stoffes, andererseits die Frage der effektiven Behandlung logischer Probleme und Methoden im mathematischen Unterricht. Der erste Gesichtspunkt betrifft ein Kernstück jeder didaktischen Analyse auf mathematischem Gebiete, die bei uns natürlich auf solche Gegenstände beschränkt ist, bei denen logische Probleme besonders stark hervortreten. Der zweite Gesichtspunkt ist mit dem ersten auf das engste verbunden. Sind zum Verständnis bestimmter mathematischer Zusammenhänge logische und methodologische Begriffsbildungen und Verfahrensweisen erforderlich, so ergibt sich von selbst die Frage, ob diese Hilfsmittel nicht auch einer unterrichtlichen Behandlung zugänglich sind. Es geht dabei nicht um ein neues Schulfach Logik, sondern um die pädagogische Berücksichtigung der engen Verbindung von Mathematik und Logik mit dem Ziel, die Mathematik auf der Schule sachgerechter, verständlicher und in ihrer Bildungsfunktion wirkungsvoller zu gestalten.

Für Sie gelesen

Liebe und Mathematik

Vorgestellt wird hier ein New York Times-Bestseller des Jahres 2013, der zugleich als eines der besten Bücher des Jahres 2013 sowohl von Amazon als auch von iBooks bezeichnet wurde und den Euler Buchpreis der Mathematical Association of America gewann. Das Werk wurde in 14 Sprachen übersetzt. Die Rede ist von „Love and Math" des russisch-stämmigen Mathematikers Frenkel, das nun mit dem Titel „Liebe und Mathematik" Anfang 2015 auf Deutsch erschien.

Frenkel erzählt drei miteinander verwobene Geschichten in einer. Erstens schildert er seinen Weg in und durch die Mathematik, zweitens lässt er den Leser aktiv (!), also mit Stift und Papier bewaffnet, am mathematischen Erkenntnisprozess teilnehmen und drittens berichtet er über seine Erfahrungen mit dem Antisemitismus in der Sowjetunion. Gehen wir auf die Arbeit mit Stift und Papier später ein, dann erzählt Liebe und Mathematik zwei Geschichten: eine von den Wundern der Mathematik und eine von der Reise eines jungen Mannes, der diese Profession erlernt und sie lebt. Nachdem er ein repressives Ausbildungssystem gemeistert hat, entwickelt er sich zu einem der führenden Mathematiker des 21. Jahrhunderts. Er werde auch über seine persönlichen Erfahrungen sprechen, wie er im Vorwort ankündigt: „Was es heißt, in der früheren Sowjetunion aufgewachsen zu sein, wo die Mathematik inmitten eines Unterdrückerregimes zu einer Insel der Freiheit wurde. Die diskriminierende Politik in der Sowjetunion verwehrte mir ein Studium an der staatlichen Universität von Moskau. Zu dieser Zeit war es die inoffizielle Politik der Universität, keine jüdischen Studenten aufzunehmen." ln Frenkels Jahrgang wurde kein einziger zugelassen – wir reden hier vom Jahr 1984! Und weiter: „Man versperrte mir die Türen; ich war ein Ausgestoßener. Doch ich gab nicht auf. Ich schlich mich in die Universität und hörte Vorlesungen und Seminare. Ich las Mathematikbücher, manchmal bis spät in die Nacht. Und am Ende konnte ich das System austricksen. Durch die Vordertüre ließ man mich nicht hinein, also flog ich durch ein Fenster. Wenn man verliebt ist, wer kann einen dann aufhalten? Zwei brillante Mathematiker nahmen mich unter ihre Fittiche und wurden meine Mentoren. Mit ihrer Hilfe begann ich meine mathematische Forschung. Ich war damals noch Student, und doch verschob ich bereits die Grenzen des Unbekannten. Es war die aufregendste Zeit meines Lebens, und ich machte es, obwohl mir klar war, dass ich aufgrund der diskriminierenden Politik niemals eine Stelle als Mathematiker in der Sowjetunion bekommen würde."

Nun zum aktiven Leser: In diesem Buch wird, wie der Autor es bezeichnet, eine der größten Ideen aus der Mathematik der letzten 50 Jahren beschrieben: das Langlands-Programm. Es wird von vielen als die Große Vereinheitlichte Theorie der Mathematik bezeichnet. Es ist eine faszinierende Theorie, in der die erstaunlichen Verbindungen zwischen scheinbar Lichtjahre voneinander entfernten mathematischen Gebieten zu einem Ganzen zusammengefugt werden: Algebra, Geometrie, Zahlentheorie, Analysis und Quantenphysik. „Wenn wir uns diese Gebiete wie die Kontinente der versteckten Welt der Mathematik vorstellen, dann ist das Langlands-Programm das ultimative Transportmittel, mit dem wir von einem Augenblick zum nächsten zwischen den Gebieten hin- und herspringen können."

Der Mathematiker Robert Langlands, der heute das ehemalige Büro von Albert Einstein am Institute for Advanced Study in Princeton benutzt, initiierte dieses Programm in den späten 1960er-Jahren. Die Wurzeln dieses Programms liegen in einer bahnbrechenden mathematischen Theorie der Symmetrie. Zwei Jahrhunderte zuvor wurden die Fundamente dieser Theorie von dem französischen Mathematiker Evariste Galois im Alter von 20 Jahren gelegt – eine Nacht bevor er bei einem Duell ums Leben kam. Später wurde sie von einer weiteren erstaunlichen Entdeckung ergänzt, die schließlich nicht nur zum Beweis des großen Fermatschen Satzes führte, sondern auch unser ganzes Denken über Zahlen und Gleichungen veränderte. Man hat ein Problem in der Zahlentheorie, etwa die Lösung einer Gleichung und die Antwort erscheint völlig unerreichbar. Aber wenn man das Problem in ein völlig anderes mathematisches Gebiet überträgt, ist es plötzlich lösbar.

Langlands vermutete, dass sich gewisse schwere Fragen aus der Zahlentheorie, beispielsweise, das Abzählen von Lösungen von Gleichungen modulo Primzahlen, mit Methoden aus der harmonischen Analyse – genauer der Untersuchung automorpher Funktionen – beantworten lassen. Das ist sehr spannend, denn zum einen gibt es uns Verfahren an der Hand, zunächst scheinbar unlösbare Probleme zu lösen, und zum anderen deutet es auf einen tiefen und fundamentalen Zusammenhang zwischen verschiedenen Bereichen der Mathematik. Sehr ausführlich geht der Autor auf die Beziehung zwischen der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung und dem großen Fermatschen Satz ein. Ausgehend von einer Lösung der Fermatschen Gleichung können wir eine bestimmte kubische Gleichung konstruieren. Ken Ribet hatte jedoch gezeigt, dass die Anzahl der Lösungen dieser kubischen Gleichung modulo Primzahlen nicht gleich den Koeffizienten einer Modulform sein kann, deren Existenz aber von der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung behauptet wird. Sobald diese Vermutung bewiesen ist, können wir daraus schließen, dass es eine solche kubische Gleichung nicht geben kann. Dann gibt es aber auch keine Lösung der Fermatschen Gleichung. Diese Zusammenhänge werden uns auf ca. 30 Seiten (inkl. Anhänge) erklärt. Bei der Entwicklung des Programms holt der Autor den Leser auf einem mathematischen Niveau ab, dass in etwa dem Abitur entspricht und vermittelt das für die höhere Mathematik charakteristische strukturelle Denken. Uns werden Grundkenntnisse der Symmetrie, Gruppentheorie (bis zu den Lie-Gruppen), Zahlentheorie (inkl. Modulo-Rechnung), Gleichungstheorie, Analysis sowie Kategorien-Theorie geboten. Da, wo es im Text zu aufwändig wäre, wird auf Fußnoten im Anhang weiter verwiesen. Sätze, Beweise, die dem Leser nicht mehr gegenwärtig sind, werden hier ausführlich dargeboten und stören nicht den

Lesetext oder Haupttext der eigentlichen Geschichten. All dies möchte der Autor dem Leser vermitteln, um ihm eine Seite der Mathematik nahe zu bringen, die wir selten zu sehen bekommen: Inspiration, tiefgründige Ideen und erstaunliche Enthüllungen und Einsichten. Die Mathematik schafft Möglichkeiten, die Schranken von Konventionen niederzureißen und auf der Suche nach Wahrheit einer grenzenlosen Phantasie Ausdruck zu verleihen. In diesem Buch geht es auch um Liebe. Wenn Menschen das Buch kaufen, um eine perfekte Formel flir die Liebe zu finden, werden sie ziemlich enttäuscht sein; denn diese gibt es nicht. Nach Frenkel geht es in seinem Buch eher darum, dass Mathematik und Liebe zwei Pfeiler der Menschlichkeit sind. Keiner kann den anderen ersetzen. Edward Frenkel hatte einmal die Vorstellung von einem Mathematiker, der eine „Formel der Liebe“ entwickelt, und diese Idee wurde die Grundlage für den Film Rites of Love and Math, den er in diesem Buch auch vorstellt. Immer, wenn er diesen Film zeige, fragt ihn irgendjemand: „Gibt es wirklich eine Formel der Liebe?“ Seine Antwort lautet: „Jede Formel, die wir entdecken, ist eine Formel der Liebe.“
Die Mathematik ist die Quelle eines zeitlosen und tiefgründigen Wissens. Sie triffins Herz aller Materie und vereint uns über alle Kulturen, Kontinente und Zeitalter hinweg. „Mein Traum ist, dass wir alle irgendwann in der Lage sind, die geheimnisvolle Schönheit und die außergewöhnliche Harmonie dieser Ideen, Formeln und Gleichungen zu erkennen, zu begreifen und zu bewundern, denn dadurch gewänne unsere Liebe zu dieser Welt und zueinander sehr viel mehr an Bedeutung.“
In jedem Wort spürt man die Faszination des Autors, ja tatsächlich seine Liebe und Hingabe in und zur Mathematik. Dabei vermittelt er sein Fach, d.h. das Langlands-Programm nicht in der üblicherweise staubtrockenen Triade „Definition-Satz-Beweis“ mathematischer Lehrbuchliteratur, es ist eben kein Lehrbuch, wie eben geschildert.
„Mit diesem Buch möchte ich dem Leser das weitergeben, was mir meine Lehrer und Mentoren vermittelt haben: Ich möchte das Schloss zur Macht und Schönheit der Mathematik für Sie öffnen und Ihnen den Eintritt in diese magische Welt ermöglichen, so wie es mir einst vergönnt war, selbst wenn Sie zu den Personen gehören sollten, welche die Worte ‚Mathematik‘ und ‚Liebe‘ nie in ein und demselben Satz verwendet haben. Die Mathematik wird Ihnen unter die Haut gehen, so wie mir, und Sie werden die Welt mit anderen Augen sehen. Mathematisches Wissen unterscheidet sich von jeder anderen Art des Wissens.“ Ein Gedankengang des Autors, der zum Heftthema „Mathematik und Philosophie“ passt, soll noch kurz erwähnt werden: „Wo es keine Mathematik gibt, gibt es auch keine Freiheit.“ Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit. Innerhalb ihrer Regeln bist du völlig frei. Unsere Wahrnehmung der physikalischen Welt kann verzerrt sein, nicht jedoch unsere Wahrnehmung mathematischer Wahrheiten. Es handelt sich um objektive, zeitlose und zwangsläufige Wahrheiten. Eine mathematische Formel oder ein mathematischer Satz bedeuten für alle und überall dasselbe – unabhängig von Geschlecht, Religion oder Hautfarbe; und sie werden auch in tausend Jahren noch für alle dasselbe bedeuten. Erstaunlich ist außerdem, dass uns allen diese Formeln und Sätze gehören. Niemand kann auf eine mathematische Formel ein Patent anmelden, wir alle können sie verwenden. Es gibt nichts derart Tiefgründiges und Erlesenes in der Welt, das uns allen so frei zur Verfügung steht. Es ist fast unglaublich, dass es ein solches Reservoir an Wissen überhaupt gibt. Es ist zu wertvoll, um es leichtfertig den „wenigen Eingeweihten“ zu überlassen, denn es gehört uns allen.
Edward Frenkel: Liebe und Mathematik. Im Herzen einer verborgenen Wirklichkeit. Heide/berg: Springer Spektrum, 2014
(ISBN 978-3-662-43420-8/hbk;978-3-662-43421-5/ebook).

Handbuch Didaktik der Mathematik

In dem hier vorgestellten Handbuch soll Mathematikdidaktik als Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik verstanden werden. Das Handbuch Mathematikdidaktik möchte einen Einblick in zentrale Bereiche fachdidaktischer Forschung geben und einen Überblick über aktuelle Entwicklungen in der Mathematikdidaktik vermitteln. Insbesondere sollen gegenwärtig diskutierte und damit zukünftigrelevante Fragen aufgezeigt werden. Das Handbuch ist kein enzyklopädisches Nachschlagewerk, das die Mathematikdidaktik vollständig abdecken sowie aktuelle Diskussionen und Strömungen erschöpfend darstellen wollte. Es ist vielmehr eine Zusamenstellung von etwa 20–40 Seiten starken Artikeln. Jeder Artikel dieses Handbuchs soll eine Einführung in ein Teilgebiet der Mathematikdidaktik mit seinen Problemstellungen und Forschungsansätzen geben, als Grundlage für weitere Forschungen dienen und zur kritischen Auseinandersetzung mit den angebotenen Informationen anregen. Natürlich kann das alles nur aus der individuellen Perspektive der jeweiligen Autoren der einzelnen Artikel geschehen. Der Fokus liegt auf dem deutschsprachigen Raum, wobei die internationale Einbindung mitbedacht und einbezogen wird.
Zum Inhalt: Die einzelnen Kapitel sind in 5 Teile aufgeteilt, die im Folgenden mit den ihnen zugeteilten Kapiteln aufgeführt werden. Jeder Artikel ist in sich geschlossen und für sich lesbar, fügt sich aber in das dargestellte Gesamtkonzept ein.
Teil I „Mathematik als Bildungsgegenstand“ umfasst die drei Kapitel: 1 Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik, 2 Schulmathematik und Realität-Verstehen durch Anwenden, 3 Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts.
Der folgende Teil II „Mathematik als Lehr- und Lerninhalt“ enthält die Kapitel zu zentralen Inhalten: 4 Arithmetik: Leitidee Zahl, 5 Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung, 6 Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung, 7 Geometrie: Leitidee Raum und Form, 8 Stochastik: Leitidee Daten und Zufall.
Teil III Mathematik als Denkprozesse enthält die sechs Artikel: 9 Begriffsbildung, 10 Problemlösen lernen,

11. Algorithmik, 12 Argumentieren und Beweisen, 13 Anwendungen und Modellieren, 14 Darstellen und Kommunizieren.

Der Teil IV zu wesentlichen Determinanten der Gestaltung von Mathematikunterricht „Mathematik im Unterrichtsprozess“ enthält die 5 Artikel: 15 Unterrichtsmethoden und Instruktionsstrategien, 16 Aufgaben in Forschung und Praxis, 17. Medien, 18 Diagnostik und Leistungsbeurteilung sowie 19 Individualisieren und differenzieren.

Schließlich werden im letzten Teil V „Didaktik der Mathematik als Forschungsdisziplin“ Forschungsansätze zu allen diesen Bereichen, welche die Didaktik der Mathematik als Forschungsdisziplin mit einer eigenen Entwicklungsgeschichte, eigenen Zielen, Theorieansätzen und Methoden ausweisen die fünf Kapitel behandelt: 20 Zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin, 21 Forschungsgegenstände und Forschungsziele, 22 Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und Adaption von Untersuchungsmethoden, 23 Quantitative Forschungsmethoden in der Mathematikdidaktik, 24 Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung.

Die Herausgeber waren sich bewusst, dass mit der hier dargestellten Auswahl keineswegs das Gebiet der Mathematikdidaktik erschöpfend dargestellt sei. Im Vorwort führen sie dazu aus: Neben den in den fünf Kapiteln behandelten Forschungsgebieten gibt es weitere Bereiche, deren Bedeutung unbewusst ist, die jedoch nicht mit einem eigenen Beitrag vertreten, aber – zumindest teilweise – in Artikeln mit bedacht sind. Dazu gehören u. a. Dyskalkulie, Inklusion, Begabtenerkennung und Begabungsförderung, Mathematikwettbewerbe, Leistungsbewertung, frühkindmathematische Bildung, Kindergarten, fachübergreifender Unterricht, außerschulische Bildungsangebote und Lernorte, Übergänge in der Bildungslaufbahn, Erwachsenenbildung sowie die fachdidaktische Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Wegen der eben aufgezeigten Lücken und der stringenten Auswahl haben die Herausgeber es geschafft, statt eines unhandlichen Schinkens ein Handbuch von 670 Seiten zu schaffen, „das im wörtlichen Sinne in eine Hand passt“.

Das Handbuch Mathematikdidaktik wurde geschrieben:

- für im Studium fortgeschrittene Studierende als eine grundlegende und einführende Lektüre für ein Referat, eine Hausarbeit oder eine Abschlussarbeit in der Didaktik der Mathematik;
- für Masterstudierende und angehende Promovierende zu Beginn einer eigenen Forschungsarbeit in der Mathematikdidaktik;
- für Lehrer zum Kennenlernen forschungsbasierter Fragestellungen in der Mathematikdidaktik sowie als Grundlage für theoriegeleitete Reflexionen über eigenen oder fremden Unterricht;
- für Mathematikdidaktiker, die sich einen Überblick über derzeit aktuelle Forschungsfragen in verschiedenen Teilbereichen ihrer Disziplin verschaffen möchten.

Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B.,· Weigand H-G. (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
ISBN: 978-3-642-35118-1

IMPRESSUM

Der Mathematikunterricht wird herausgegeben vom Friedrich Verlag in Velber in Zusammenarbeit mit Klett und in Verbindung mit Stefan Deschauer (v.i.S.d.P.), Henning Körner und Jörg Meyer.

Herausgeber: Stefan Deschauer (v.i.S.d.P.)
TU Dresden, Didaktik der Mathematik, 01062 Dresden
Tel.: 03 51/463-37552 • E-Mail: www.friedrich-verlag.de

Redaktionssekretariat: Katrin Franke
Tel.: 05 11/4 00 04-2 28 • Fax: 05 11/4 00 0 4-2 19
franke@friedrich-verlag.de

Verlag: Friedrich Verlag GmbH
Im Brande 17, 30926 Seelze
www.friedrich-verlag.de

Geschäftsführung: Michael Conradt, Robert Erber

Programmleitung: Kai Müller-Weuthen

Anzeigenmarketing: Bianca Schwabe
Adresse siehe Verlag
Tel.: 05 11/4 00 04-1 23 • Fax: 05 11/4 00 04-9 75
schwabe@friedrich-verlag.de

Bettina Wohlers
Adresse siehe Verlag
Tel.: 05 11/4 00 04-2 43 • Fax: 05 11/4 00 04-9 75
wohlers@friedrich-verlag.de

Verantwortlich für den Anzeigenteil:
Robert Erber (v.i.S.d.P.)
Adresse siehe Verlag
Anzeigenpreise gültig ab 01.01.2014

Leserservice:
Tel.: 0511/4 00 04-1 50 • Fax: 0511 – 4 00 04-1 70
E-Mail: leserservice@friedrich-verlag.de

Realisation: le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Titel: Karl H. Hofmann

Druck: Zimmermann Druck + Verlag GmbH,
Widukindplatz 2, 58802 Balve

Bezugsbedingungen:
Der Mathematikunterricht erscheint 6 mal jährlich für EUR 99,50 zzgl. Versand EUR 15,50. Als Abonnenten-Extra erhalte ich das Friedrich Jahresheft und Magazin SCHÜLER. Die Mindestabodauer beträgt ein Jahr. Eine Kündigung ist schriftlich bis vier Wochen nach Erscheinen des letzten Heftes innerhalb des aktuellen Berechnungszeitraums möglich, ansonsten verlängert sich der Bezug um weitere 12 Monate. Es gelten unsere aktuellen Allgemeinen Geschäftsbedingungen. Auslandspreise auf Anfrage.

Bei Umzug bitte Nachricht an den Verlag mit alter und neuer Anschrift sowie der Kundennummer (siehe Rechnung).

Der Mathematikunterricht ist zu beziehen durch den Buch- und Zeitschriftenhandel oder direkt vom Verlag. Auslieferung in der Schweiz durch Balmer Bücherdienst AG, Kobiboden, 12, CH-8840 Einsiedeln. Weiteres Ausland auf Anfrage.

Bei Nichtlieferung infolge höherer Gewalt oder Störungen des Arbeitsfriedens bestehen keine Ansprüche gegen den Verlag.

ISSN-Nr. 0025-5807 Best.-Nr. 524186

HERAUSGEBER

Mitherausgeber:
Prof. Dr. Stefan Deschauer
E-Mail: stefan.deschauer@tu-dresden.de

StD Henning Körner
E-Mail: Hen.Koerner@t-online.de

StD Dr. Jörg Meyer
E-Mail: J.M.Meyer@t-online.de

Schriftleiter kleingedrucktes:
Gerhard König
E-Mail: koenig@math.uni-karlsruhe.de

VORSCHAU

1-2016
Mathematik wirklich verstehen
StD. Henning Körner (Oldenburg)

2-2016
Mathematikgeschichte des 16./17. Jahrhunderts im Mathematikunterricht
Jun-Prof. Dr. Silvia Schöneburg (Leipzig)

3-2016
Fehler beim mathematischen Denken und Problemlösen
Prof. Dr. Frank Heinrich (Braunschweig)

4-2016
Didaktik der Analytischen Geometrie
Prof. Dr. Andreas Filler (Berlin)

5-2016
Geometrie in der Sekundarstufe I
Dr. Jörg Meyer (Hameln)

6-2016
Thema noch offen