

Philosophie der Mathematik

Sommersemester 2011 — Quellentexte

GREGOR NICKEL

*Les mathématiciens ont autant besoin d'être philosophes
que les philosophes d'être mathématiciens.*
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

LITERATUR:

- OSKAR BECKER: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, 1975.
- THOMAS BEDÜRFTIG, ROMAN MURAWSKI: Philosophie der Mathematik, 2010.
- WILHELM BÜTTEMEYER: (Hg.): Philosophie der Mathematik, 2003.
- PHILIP J. DAVIS, REUBEN HERSH: The Mathematical Experience, 1981 (Dt., 1994).
- HERBERT MESCHKOWSKI: Wandlungen im mathematischen Denken, 1969.
- HERBERT MEHRTENS: Moderne Sprache Mathematik, 1990.
- KNUT RADBRUCH: Mathematik in den Geisteswissenschaften, 1989.
- KNUT RADBRUCH: Bausteine zu einer Kulturphilosophie der Mathematik, 2009.
- STEWART SHAPIRO: Thinking about Mathematics, 2000.
- HANS WUSSING: 6000 Jahre Mathematik. 2 Bände, Berlin 2008.

2 Zu den Wurzeln — Mathematik und Philosophie im antiken Griechenland

2.3 Die Urväter — Thales und Pythagoras

Als man ihm [Thales] wegen seiner Armut einen Vorwurf machte, als ob die Philosophie zu nichts taue, habe er, sagen sie, da er aufgrund seiner astronomischen Kenntnisse vorausgesehen hatte, dass die Olivenernte reichlich sein würde, noch im Winter mit dem wenigen Geld, das ihm zur Verfügung stand, als Handgeld, sämtliche Ölpresen in Milet und Chios für einen niedrigen Preis gemietet, wobei niemand ihn überbot. Als aber die Zeit [der Ernte] gekommen war und auf einmal und gleichzeitig viele Pressen verlangt wurden, da habe er seine Pressen so teuer verpachtet, wie er nur wollte, und auf diese Weise sehr viel Geld verdient: zum Beweis dafür, dass es für die Philosophen ein leichtes ist, reich zu werden, wenn sie dies wollten, dass es aber nicht das ist, was sie interessiert. ARISTOTELES Politika, A 11.

Es wird erzählt, [...] dass Thales, als er astronomische Beobachtungen anstellte und dabei nach oben blickte, in einen Brunnen gestürzt sei und dass eine witzige, reizende thrakische Magd ihn verspottet habe: Er strengte sich an, die Dinge im Himmel zu erkennen, von dem aber, was ihm vor Augen und vor den Füßen liege, habe er keine Ahnung. PLATON Theaitet (174a).

In der Geometrie ein Schüler der Ägypter, hat er [Thales], wie Pamphile berichtet, zuerst das rechtwinklige Dreieck in den (Halb)kreis eingetragen und daraufhin einen Stier geopfert. Andere schreiben dies dem Pythagoras zu. DIOGENES LAERTIOS, [Di, I25].

Mit Natur und Harmonie [Zusammenfügung] verhält es sich folgendermaßen: Das Wesen der Sachen, welches ewig ist, und ihre Natur selbst lassen nur göttliche, keine menschliche Erkenntnis zu. Es wäre jedoch ausgeschlossen, dass eines von den seienden und von uns Menschen erkannten Dinge entstanden wäre, wenn es nicht auch schon das Wesen der Dinge gäbe, aus denen die Welt zusammengesetzt ist: der Begrenzenden und der Unbegrenzten. Da aber die Prinzipien, welche es schon gab, nicht gleich sind und nicht verwandt, wäre es unmöglich gewesen, dass sie eine Weltordnung bilden könnten, wenn nicht Harmonie hinzugekommen wäre, auf welche Weise auch immer diese entstanden sein mag. Gleiches und Verwandtes hätte der Harmonie nicht bedurft. JOHANNES STOBAIOS, (DK 44 B 11)

Sie [die Pythagoreer] waren die ersten, welche diesen Studien [der Mathematik] einen bedeutenden Platz einräumten; und als sie darin erzogen worden waren, waren sie davon überzeugt, dass die konstitutiven Prinzipien des Mathematischen auch die konstitutiven Prinzipien der seienden Dinge seien. Da nun im Mathematischen die Zahlen der Natur nach das erste sind und sie, statt in Feuer, Erde, Wasser, eben in den Zahlen viele Übereinstimmungen mit den seienden und werdenden Dinge zu erkennen glaubten — eine bestimmte Eigenschaft von Zahlen sei ‘Gerechtigkeit’, eine andere ‘Seele’(...) da nun die gesamte Natur ihnen in allen übrigen Hinsichten den Zahlen nachgebildet zu sein schien und die Zahlen das erste seien in der gesamten Natur, nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller seienden Dinge, und die ganze Welt sei (...) Harmonie und Zahl. Was sie nun in den Zahlen und Harmonien als übereinstimmend mit den Eigenschaften und Teilen der Welt und der ganzen Weltordnung nachweisen konnten, das sammelten sie und setzten es damit in Einklang. Wenn dabei irgendwo eine offene Stelle blieb, so bastelten sie gerne noch etwas hinzu, damit ihre Theorie konsistent wurde. [bsp. ‘Gegenerde’] Offenbar betrachten sie die Zahlen als Prinzip (...) als Elemente der Zahl das Gerade und das Ungerade, während die Eins aus beiden sei. Aus der Eins entstehe die Zahl und die ganze Welt bestehe, so behaupten sie, aus Zahlen. Andere Anhänger derselben Richtung sagen, der Prinzipien seien zehn, die in angemessener Zusammenstellung aufgezählt werden: Grenze-Unbegrenztes, Ungerades-Gerades, Eines-Menge, Rechtes-Linkes, Männliches-Weibliches, Ruhendes-Bewegendes, Gerades-Krummes, Licht-Finsternis, Gutes-Böses, Quadrat-Rechteck. ARISTOTELES, Metaphysik A5

Das Wieviel, das ist die Zahl, definierte Thales als Zusammenfassung von Einheiten (nach der Ägyptischen Weise, da er ja dort gelernt hatte); die arithmetische Eins im eigentlichen Sinne wird nun nicht unter diese Definition fallen, weder die Einheit noch das Eine. Pythagoras aber als die Entfaltung und Verwirklichung der in der Einheit liegenden erzeugenden Prinzipien; oder in anderer Weise als das vor allen Dingen im göttlichen Geist Vorhandene, aus dem alles zusammengefügt wird und dann durchgezählt in einer unauflöselichen Ordnung bestehen bleibt. Andere wieder als fortschreitende Reihe von der Einheit aus bis zu ihr hin. Der Pythagoreer Eudoxos sagt: Zahl ist begrenzte Vielheit indem er Gattung und Art angibt, (...) Die Akusmatiker aus dem Kreis um Hipposos sagten, sie sei das erste Vorbild der Weltschöpfung und wiederum das Unterscheidungs Werkzeug des göttlichen Weltschöpfers.

Philolaos sagt: Die Zahl ist das herrschende und unerschaffene Band des Beharrens der innerweltlichen Dinge. IAMBlichOS (ca. 250-330 n.Chr.),

Kommensurabilität und Inkommensurabilität — Die antike Grundlagenkrise

Definition 1 (kommensurabel, Euklid X.1) Zwei Größen derselben Art a, b heißen **kommensurabel**, wenn sie ein gemeinsames Maß e besitzen, d.h. es gibt eine Größe derselben Art e und zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, so dass

$$ne = a, \quad me = b.$$

Im umgekehrten Fall heißen a und b **inkommensurabel**.

Bemerkung 2 (Wechselwegnahme) Ein gemeinsames Maß zweier Größen kann mittels „Wechselwegnahme“ ermittelt werden. Dazu zieht man die kleinere a_1 von der größeren a_0 so oft ab, bis der Rest a_2 kleiner als a_1 ist,

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2, \quad n_1 \in \mathbb{N}, \quad a_2 < a_1$$

Anschließend wird diese Prozedur für a_1 und a_2 wiederholt, und so weiter:

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3, \quad n_2 \in \mathbb{N}, \quad a_3 < a_2,$$

$$a_2 = n_3 a_3 + a_4, \quad n_3 \in \mathbb{N}, \quad a_4 < a_3,$$

⋮

Bricht dieses Verfahren (Euklidischer Algorithmus) ab, d.h. $a_{k+1} = 0$ beim (letzten) Schritt Nummer k , so ist $a_{k-1} = n_k a_k$ und a_k ist ein gemeinsames Maß von a_0 und a_1 .

Man sagt, sie hätten jenen, der als erster die Natur des Kommensurablen und des Inkommensurablen denen ausgeplaudert habe, die nicht würdig waren, an den Lehren teilzuhaben, als einen so widerlichen Menschen betrachtet, dass sie ihn nicht nur vom Zusammenleben in ihrem gemeinsamen Kreis ausschlossen, sondern sogar einen Grabstein für ihn errichteten, als wäre der Freund von einst aus dem Leben der Menschen überhaupt ausgeschieden. IAMBlichUS (DK 18.4)

2.4 Vollendung und Vorbild — Euklid

Definitionen 3

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
2. Eine **Linie** [ist] breitenlose Länge,
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine **Strecke** ist eine Linie, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.

¹Die Definitionen, Axiome und Postulate des I. Buches der Elemente des EUKLID VON ALEXANDRIA (ca. 325-265 v.Chr.); nach [Be, pp. 88].

7. Eine **ebene Fläche** ist eine, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der **Winkel geradlinig**.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine andere Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder beiden gleichen Winkel ein **Rechter** [...]
14. Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfasst wird.
15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind. [...]
19. **Geradlinige Figuren** sind solche, die von Strecken umfasst werden, **dreiseitige** die von drei, **vierseitige** die von vier, **vielseitige** die von mehr als vier Strecken umfassten.
20. Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges** Dreieck jede mit drei gleichen Seiten, ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten.
21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein **rechtwinkliges** Dreieck jede mit einem rechten Winkel [...]
23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Postulate 4 Gefordert soll sein:

1. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. dass alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass die innen auf derselben Seite entstehenden Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome 5 (Allgemein angenommene Meinungen)

1. Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich.
2. Wenn Gleiches zu Gleichem hinzugefügt wird, sind die Summen (die Ganzen) gleich.
3. Wenn Gleiches von Gleichem weggenommen wird, sind die Reste gleich.
7. Was einander deckt, ist einander gleich.
8. Das Ganze ist größer als der Teil.
9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Definitionen 6 (Zahl, Buch VII)

1. Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
2. Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.

2.5 Trouble-shooter und Anwender — Archimedes

Einiges von dem, was mir auf 'mechanische' Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser 'mechanischen' Art der (strengen) Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgehend durch die 'mechanische' Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne derartige Vorkenntnis. ARCHIMEDES [Arc, p. 383].

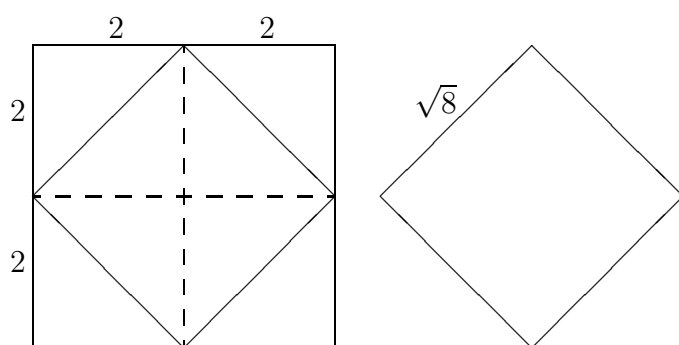
Ich glaube, dass dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird, den mathematisch gebildeten Menschen, die über die Abstände und die Größenverhältnisse der Erde, der Sonne, des Mondes und des ganzen Weltalls nachgedacht haben, aber keineswegs. ARCHIMEDES [Arc, p. 360]

3 Platon — Mathematik kurz vor dem „Ideenhimmel“

*Die Westliche Philosophie besteht aus Fußnoten zu Platon.
ALFRED NORTH WHITEHEAD (1861–1947)*

3.1 Menon — Tugend-Anamnese und Quadratverdopplung

Sokrates: Sage mir also, nennst Du etwas Ende, und meinst wie eine Grenze und ein Letztes? (... Menon: O ja ...) Auch Fläche nennst du etwas und etwas anderes wiederum Körper, eben wie die in der Geometrie? (...) Hieraus wirst du schon verstehen, was ich meine unter der Gestalt. Denn von allen Gestalten sage ich, dass, was den Körper begrenzt, eigentlich die Gestalt ist, so dass ich im allgemeinen sagen möchte, die Gestalt sei die Grenze des Körpers. (76a)



Menon: Und auf welche Weise willst du denn dasjenige suchen, Sokrates, wovon du überhaupt gar nicht weißt, was es ist? Denn als welches Besondere von allem, was du nicht weißt, willst du es dir denn vorlegen und so suchen? Oder wenn du es auch noch so gut träfest, wie willst du denn erkennen, dass es dieses ist, was du nicht wusstest? (80e)

Sokrates: Daß nämlich ein Mensch unmöglich suchen kann, weder was er weiß, noch was er nicht weiß. Nämlich weder was er weiß kann er suchen, denn er weiß es ja und es bedarf dafür keines Suchens mehr; noch was er nicht weiß, denn er weiß ja dann auch nicht, was er suchen soll. (80e)

Wenn die Wahrheit schon immer in der Seele ist, ist sie unsterblich. (86b)

In dem Nichtwissenden also sind von dem, was er nicht weiß, dennoch richtige Vorstellungen. Indem ihn also niemand belehrt, sondern nur ausfragt, wird er wissen und wird die Erkenntnis nur aus sich selbst hervorgeholt haben. (85c)

[Es] scheint die Tugend durch eine göttliche Schickung denen einzuwohnen, denen sie einwohnt. Das Bestimmtere darüber werden wir aber erst dann wissen, wenn wir, ehe wir fragen, auf welche Art und Weise die Menschen zur Tugend gelangen, zuvor an und für sich untersuchen, was die Tugend ist. Jetzt aber ist Zeit, dass ich wohin gehe... (100c)

3.2 Phaidon — $1 + 1 = 2$ und die Unsterblichkeit der Seele

Wenn es nicht möglich ist, mit dem Leibe irgend etwas rein zu erkennen, so können wir nur eines von beiden, entweder niemals zum Verständnis gelangen oder nach dem Tode. (66e)

Notwendig also kennen wir das Gleiche schon vor jener Zeit, als wir zuerst gleiches erblickend bemerkten, dass alles dergleichen strebe zu sein wie das Gleiche, aber doch dahinter zurückbleibe. (75a)

Sollen wir also (...) zwei Arten der Dinge setzen, sichtbar die einen und die anderen unsichtbar? (...) Und die unsichtbare als immer auf die gleiche Weise sich verhaltend, die sichtbare aber niemals gleich? (79a)

(...) dass dem Göttlichen, Unsterblichen, Vernünftigen, Eingestaltigen, Unauflöslchen und immer einerlei und sich selbst gleich sich Verhaltenden am ähnlichsten ist die Seele, dem Menschlichen, Sterblichen und Unvernünftigen und Vielgestaltigen und Auflöslichen und nie einerlei und sich selbst gleich Bleibenden wiederum der Leib am ähnlichsten ist? (80b)

Denn ich wundere mich, wie doch, als jedes für sich war, jedes von ihnen eines gewesen sein soll und sie damals nicht zwei waren, nun sie aber einander nahegekommen sind, dieses die Ursache gewesen ist, dass sie zwei geworden sind, die Vereinigung, dass man sie nebeneinander gestellt hat. Und ebensowenig, wenn jemand eines zerspaltet, kann ich mich noch überreden, dass wiederum dieses, die Spaltung, Ursache geworden ist, dass zwei geworden sind. Denn dies wäre ja eine ganz entgegengesetzte Ursache des Zweierwerdens als davor. (97a)

Und wie, wenn eines zu einem hinzugesetzt worden ist, dass dann die Hinzufügung Ursache sei, dass zwei geworden sind, und wenn eines gespalten worden ist, dann die Spaltung, würdest du dich nicht scheuen, das zu sagen? Sondern vielmehr laut erklären, du wüsstest nicht, dass irgendwie anders jegliches werde, als indem es teilnehme an dem eigentümlichen Wesen eines jeglichen, woran es teilhat, und so fändest du gar keine andere Ursache des Zwei-geworden-Seins als eben die Teilnahme an der Zweiheit, an welcher alles teilnehmen müsse, was zwei sein solle, so wie an der Einheit, was eins sein solle? (101c)

Glaubst du nicht, dass [die drei] immer sowohl mit ihrem Namen genannt werden muss als auch mit dem des Ungeraden, ungeachtet dieses nicht dasselbe ist wie die Dreiheit? (104a)

Wollen wir nicht sagen, die Drei werde eher untergehen und sich alles andere gefallen lassen als aushalten, Drei zu sein und zugleich gerade zu sein? (104c)

O Kriton, wir sind dem Asklepios einen Hahn schuldig... (118a)

3.3 Theaitetos — Auch Mathematiker wissen nicht, was sie wissen

Und gar keine schlechte Erklärung scheinst du gegeben zu haben von der Erkenntnis, sondern welche auch Protagoras gibt; nur dass er dieses nämlich auf eine etwas andere Weise

ausgedrückt hat. Er sagt nämlich, der Mensch sei das Maß aller Dinge, der seienden, dass sie sind, der nichtseienden, dass sie nicht sind. (152a)

Das übrige hat mir alles sehr wohl gefallen, was er sagt, dass nämlich, was jedem scheint, für ihn auch ist, nur über den Anfang seiner Rede wundere ich mich, dass er nicht gleich seine „Wahrheit“ so beginnt: das Maß aller Dinge ist das Schwein oder der Affe oder was man noch unter allem, Wahrnehmung hat, Unvernünftigeres nennen könnte, damit er recht hochsinnig und herabwürdigend begönne zu uns zu reden, indem er zeigte, dass wir zwar ihn bewunderten wie einen Gott seiner Weisheit wegen, er aber doch um nichts besser wäre an Einsicht als ein Molch... (161c)

Sollen wir sagen, dass die Menschen immer richtig vorstellen? Oder bisweilen richtig, bisweilen falsch? Denn aus beiden ergibt sich auf jeden Fall, dass sie nicht immer richtig, sondern auf beide Weisen vorstellen. Denn bedenke nur, o Theodoros, ob wohl einer von denen, die es mit dem Protagoras halten, oder du selbst behaupten wolltest, dass niemand glaube, ein anderer sei unverständlich und mache falsche Vorstellungen? (170a)

Wie auch den Thales [...] als er, um die Sterne zu beschauen, den Blick nach oben gerichtet in den Brunnen fiel, eine artige und witzige thrakische Magd soll verspottet haben, dass er, was am Himmel wäre, wohl strebte zu erfahren, was aber vor ihm läge und zu seinen Füßen, ihm unbekannt bliebe. (174a)

Hört er [der Philosoph] aber von tausend Morgen Landes oder noch mehr, als hätte, wer sie besitzt, ein ungeheuer großes Besitztum: so dünkt ihn, er höre einer großen Kleinigkeit erwähnen, gewohnt wie er ist, über die ganze Erde zu schauen. Und wenn sie gar die Geschlechter besingen, wie irgend ein Edler sieben reiche Ahnherren habe aufzuweisen: so dünkt ihn, ein sehr kurzsichtiges Lob zu hören von solchen, die nur auf das Kleine merken und aus Unwissenheit nicht vermögen immer auf das Ganze zu blicken noch zu berechnen, dass Großväter und Vorfahren unzählige Tausende ein jeder gehabt hat, worunter Reiche und Arme, Könige und Knechte, Ausländer und Hellenen oftmals zehntausend können gewesen sein. (175a)

[Heraklit und andere behaupten,] dass nämlich nicht ein an und für sich Bestimmtest ist, und dass du einem Dinge mit recht welche Eigenschaften auch immer beilegen kannst, vielmehr wenn du etwas groß nennst, wird es sich auch klein zeigen, und wenn schwer auch leicht (...) denn niemals ist eigentlich irgend etwas, sondern immer nur wird es. (152d)

(...) denn ordentlich, wie es in ihren Schriften heißt, fließen sie auch, festen Fuß aber zu fassen bei einem Satz und einer Frage, und gelassen jeder nach seiner Ordnung zu fragen und zu antworten, davon ist ihnen weniger verliehen als nichts. (...) Zu Ende bringen wirst du aber niemals etwas mit einem von ihnen, noch auch sie selbst untereinander. (179e)

andere wiederum [haben] gerade das Gegenteil von diesem behauptet, nämlich das Unbewegliche sei der richtige Name des Ganzen, und was sonst Melissos und Parmenides allen diesen zuwider behaupten, dass alles eins ist und selbst in sich besteht, indem es keinen Raum hat, worin es sich bewegen könnte. (180e)

HERAKLIT: Der Gott ist Tag-Nacht, Winter-Sommer, Krieg-Frieden, Sättigung-Hunger — alle Gegensätze, das ist die Bedeutung (...) (DK 22 B 67) Der Weg hinauf und hinab ist ein und derselbe. (DK 22 B 60) Dasselbe ist: lebendig und tot und wach und schlafen und

jung und alt. Denn dieses ist umschlagend in jenes und jenes umschlagend in dieses. (DK 22 B 88)

PARMENIDES: Seiendes [ist] nicht hervorgebracht und unzerstörbar, einzig, aus einem Glied, unerschütterlich und nicht zu vervollkommen; weder war es, noch wird es einmal sein, da es jetzt in seiner Ganzheit beisammen ist, eins, zusammengeschlossen. (...) Welche Verbindlichkeit könnte es dazu veranlasst haben, vom Nichts anfangend, sich an einem späteren oder früheren Zeitpunkt zu entwickeln? Also ist es unumgänglich, dass es entweder ganz und gar ist oder überhaupt nicht. (...) Entweder ist es, oder es ist nicht; und entschieden worden ist ja, den einen Weg als unerkennbar und unbenennbar aufzugeben, da er kein wahrer Weg ist, während es den anderen Weg gibt und dieser auch wirklich stimmt. Wie könnte deshalb Seiendes erst nachher sein, wie könnte es entstehen? Denn weder ist es, wenn es entstanden wäre, noch wenn es künftig einmal sein sollte. Also ist Entstehen ausgelöscht und unerfahrbar Zerstörung. (DK 28 B 8-20)

Σ: [D]ie elf, die jemand sich nur denkt, wird er wohl diesem zufolge niemals können für zwölf halten, welche er sich auch nur denkt? (...) Θ: Ich werde antworten, dass im Sehen und Betasten wohl jemand die Elf für Zwölf halten kann; von denen aber, welche er nur in Gedanken hat, könnte er sich wohl dies niemals vorstellen. Σ: Wie aber? Glaubst du wohl, es habe einer einmal bei sich selbst etwa Fünf und Sieben, ich meine aber nicht, er habe sich sieben und fünf Menschen vorgenommen zu betrachten oder dergleichen etwas; sondern die Fünf und Sieben selbst, (...) von denen wir gesagt haben, es sei unmöglich, in Hinsicht ihrer falsch vorzustellen. Wenn also diese selbst einmal der und jener bei sich betrachtet hat, zu sich selbst sprechend und sich fragend, wieviel sie wohl sind, und der eine nun seine Meinung dahin gegeben, sie machten Elf, der andere aber Zwölf — oder werden sie alle glauben und sagen, dass sie Zwölf machen? Θ: Nein, beim Zeus, sondern viele auch werden Elf glauben. Und wenn es einer gar bei einer größeren Zahl versucht, irrt er sich noch leichter (...) Σ: Kommt es also nun nicht auf die vorige Rede zurück? Denn der, welchem dieses begegnet, hält etwas, wovon er weiß, für etwas anderes, wovon er ebenfalls weiß, welches wir als unmöglich annahmen und eben dadurch bewiesen, dass es keine falsche Vorstellung gebe, damit man nicht annehmen müsste, dass derselbe dasselbe wisse und zugleich auch nicht wisse. (195e-196c)

Wir werden also zeigen müssen, dass das Falschvorstellen etwas anderes ist als eine Verwechslung der Gedanken und der dazugehörigen Wahrnehmungen. Denn wenn dies wäre: so würden wir uns nicht in den Gedanken selbst irren. (196c)

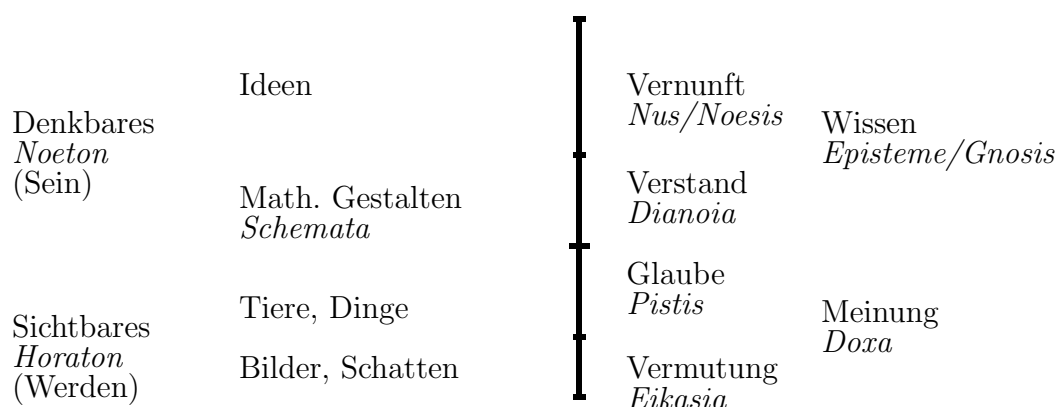
Und es scheint Dir nicht unverschämt, dass wir, die wir nicht wissen, was Erkenntnis ist, dennoch das Wissen zeigen wollen, worin es besteht? Aber, Theaitetos, schon seit langer Zeit sind wir ganz tief darin verstrickt, dass wir gar nicht rein und tadellos das Gespräch führen. Denn tausendmal haben wir schon gesagt „wir kennen“ und „wir kennen nicht“, „wir wissen davon“ und „wissen nicht davon“, als ob wir einander hierüber verständen, während wir immer noch nicht wissen, was Erkenntnis ist. (196e)

Und das ist doch auf alle Weise einfältig, denen, welche die Erkenntnis suchen, zu sagen, sie sei richtige Vorstellung verbunden mit Erkenntnis, gleichviel ob des Unterschiedes oder sonst etwas ändern. Weder also die Wahrnehmung, o Theaitetos, noch die richtige Vorstellung verbunden mit Erklärung, kann Erkenntnis sein. (210b)

3.4 Politeia — Mathematik für die Staats- und Seelenführung

Wenn nicht (...) entweder die Philosophen Könige werden in den Staaten oder die jetzt so genannten Könige und Gewalthaber wahrhaft und gründlich philosophieren und also dieses beides zusammenfällt, die Staatsgewalt und die Philosophie (...) eher gibt es keine Erholung von dem Übel für die Staaten. (473d)

Liniengleichnis, Politeia 509d-511e



(...) dass die, welche sich mit Geometrie, Arithmetik und dgl. befassen, das Ungerade, das Gerade, die Figuren, die drei Arten der Winkel und anderes (...) bei jeder Untersuchung voraussetzen. Sie machen diese Voraussetzungen, als wüssten sie darüber Bescheid, und meinen, weder sich noch anderen weiter Rechenschaft darüber ablegen zu sollen, als wären diese Dinge für alle ohnehin völlig einleuchtend. So leiten sie von diesem Ausgangspunkt aus das Weitere ab und gelangen schließlich folgerichtig zu dem, was sie mit ihrer Untersuchung anstrebten. (510c)

(...) dass sie sich der sichtbaren Gestalten bedienen und ihre Reden auf diese beziehen, obwohl sie gar nicht über diese nachdenken, sondern über jene, denen diese gleichen; und dass sie ihre Erörterungen wegen des Quadrats selbst und der Diagonale selbst anstellen, nicht aber wegen derjenigen, die sie zeichnen; und so immer aber jenes selbst zu erkennen trachten, was man nicht anders erkennen (sehen) kann, als mit dem Verstand (*Dianoia*). (510d)

Sie behandelt die Voraussetzungen nicht als ersten Anfang, sondern wirklich als Voraussetzungen, gleichsam als Durchgangspunkte und Denkanstöße, um — bis zum Voraussetzungslosen, zum Anfang von allem gelangend — diesen zu erfassen und so wieder — sich an alles haltend, was mit ihm zusammenhängt — zum Ende herabzusteigen. Dabei nimmt sie überhaupt nichts wahrnehmbares zu Hilfe, sondern nur die Idee selbst, geht von Idee zu Idee und endet bei Ideen. (511b)

Wohl, sagte ich, wenn wir außer diesen [Musik und Sport] nichts mehr finden können, so lass uns etwas von dem nehmen, was sich auf sie alle bezieht. (...) dessen alle Künste und Wissenschaften noch dazu bedürfen, was auch jeder mit zuerst lernen muss. (...) Jenes Schlichte, sprach ich, die eins und zwei und drei zu verstehen; (...) Zahl und Rechnung. Oder ist es nicht

so, dass jegliche Kunst und Wissenschaft daran teilnehmen muss? — Gar sehr, sagte er — Nicht auch, sprach ich, die Kriegskunst? — Diese nun ganz notwendig, sagte er. (522c)

(...) dass sie sich an die Rechenkunst geben und sich mit ihr beschäftigen, nicht auf gemeine Weise, sondern bis sie zur Anschauung der Natur der Zahlen gekommen sind durch die Vernunft selbst, nicht Kaufs und Verkaufs wegen wie Handelsleute und Krämer darüber nachsinnend, sondern zum Behuf des Krieges und der Seele selbst und der Leichtigkeit ihrer Umkehr von dem Werden zum Sein und zur Wahrheit. (525c)

Denn Du weißt doch, die sich hierauf verstehen, wenn einer die Einheit selbst in Gedanken zerschneiden will, wie sie ihn auslachen und es nicht gelten lassen; sondern wenn du sie zerschneiden willst, vervielfältigen jene wieder, aus Furcht, dass die Einheit etwa nicht als Eins, sondern als viele Teile angesehen werde. (525e)

Hast du wohl schon bemerkt, wie die, welche von Natur Rechenkünstler sind, auch in allen anderen Kenntnissen sich schnelle fassend zeigen, die von Natur Langsamen aber, wenn sie im Rechnen unterrichtet und geübt sind, sollten sie auch keinen anderen Nutzen daraus ziehen, wenigstens darin alle gewinnen, dass sie in schneller Fassungskraft sich selbst übertreffen. (...) Und gewiss auch, wie ich denke, wirst du nicht leicht vieles finden, was dem Lernenden und Übenden soviel Mühe machte wie eben dieses. (526b)

Sie reden gar lächerlich; denn es kommt heraus, als ob sie bei einer Handlung wären und als ob sie eines Geschäftes wegen ihren ganzen Vortrag machten, wenn sie quadrieren, eine Figur anfügen, hinzusetzen und was sie sonst für Ausdrücke haben; die ganze Sache aber wird bloß der Erkenntnis wegen betrieben. (...) wegen der Erkenntnis des immer Seienden, nicht des bald Entstehenden, bald Vergehenden. (...) Denn offenbar ist die Geometrie die Erkenntnis des immer Seienden. (527b)

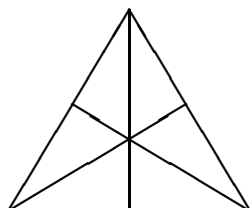
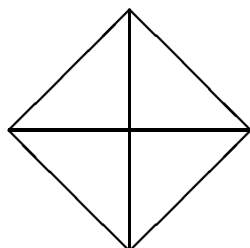
Die übrigen aber, denen wir zugaben, dass sie sich etwas mit dem Seienden befassen, die Messkunde und war mit ihr zusammenhängt, sehen wir wohl, wie sie zwar träumen, von dem Seienden, ordentlich wachend aber es wirklich zu erkennen nicht vermögen, solange sie, Annahmen voraussetzend, diese unbeweglich lassen, indem sie keine Rechenschaft davon geben können. Denn wovon der Anfang ist, was man nicht weiß, Mitte und Ende also aus diesem, was man nicht weiß zusammengeflochten sind, wie soll wohl, was auf solche Weise angenommen wird, jemals eine Wissenschaft sein können? (533b)

Die dialektische Methode [geht] allein auf diese Art, alle Voraussetzungen aufhebend, gerade zum Anfange selbst, damit dieser fest werde, und das in Wahrheit in barbarischem Schlamm vergrabene Auge der Seele zieht sie gelinde hervor und führt es aufwärts, wobei sie als Mitdienerinnen die angeführten Künste [d.i. Mathematik] gebraucht, welche wir zwar mehrmals [nach der Gewohnheit] Wissenschaften genannt haben, die aber eines anderen Namens bedürfen, der mehr besagt als Meinung, aber dunkler ist als Wissenschaft. (533d)

Dieselbe Größe erscheint uns doch, durch das Gesicht wahrgenommen, von nahe und von ferne nicht gleich? — Nein freilich. — Und dasselbe als krumm und gerade, je nachdem wir es im Wasser sehen oder außerhalb, und als ausgehöhlt und erhoben wegen der Täuschung, die dem Auge durch die Farben entstehen. Und so ist dies insgesamt eine große Verwirrung in unserer Seele, auf welche Beschaffenheit unserer Natur dann die Schattierkunst lauert und keine Täuschung ungebraucht lässt, so auch die Kunst der Gaukler und viele andere Hand-

griffe. — Richtig. — Haben sich nun nicht Messen, Zählen und Wägen als die dienstlichen Hilfsmittel hiergegen erwiesen, so dass das scheinbar Größere oder Kleinere oder Mehrere und Schwerere nicht in uns aufkommt, sondern das Rechnende, Messende und Wägende? 602d)

3.5 Timaios — Eine erste mathematische TOE?



Wir aber, die wir über das All zu sprechen irgendwie im Begriffe sind, wie es entstanden ist oder auch ungeworden ist, müssen, sind wir nicht durchaus auf Irrwegen, notwendig unter Anrufung der Götter und Göttinnen, zu ihnen flehen, dass wir vor allem nach ihrem Sinne, in zweiter Linie nach unserm reden. (27c)

Was ist das stets Seiende und kein Entstehen Habende und was das stets Werdende, aber nimmerdar Seiende; das eine ist durch vernünftiges Denken (noesis) zu erfassen, ist stets sich selbst gleich, das andere dagegen durch bloßes mit vernunftloser Sinneswahrnehmung (aisthesis) verbundenes Meinen (doxa) zu vermuten, ist werdend und vergehend, nie aber wirklich seiend. (27d)

Wessen Form und Wirkkraft der Erzeuger (Demiurg) nun gestaltet, indem er auf das sich stets gleich Verhaltende hinblickt und etwas Derartiges als Vorbild benutzt, das muss so zwangsläufig insgesamt schön gestaltet werden, wessen Form und Kraft er jedoch gestaltet, indem er auf das Gewordene hinschaut und indem er ein Gewordenes als Vorbild benutzt, das nicht schön. (28b)

Jedem aber ist doch deutlich, dass [sein Blick] auf das Unvergängliche gerichtet war, denn [die Welt] ist das Schönste unter dem gewordenen, [der Schöpfer] der Beste unter den Ursachen. So also entstanden, ist sie nach dem durch Denken und Vernunft zu Erfassenden und sich gleichbleibenden auferbaut. (29b)

Daß sich zwei Bestandteile allein ohne einen dritten wohl verbinden, ist nicht möglich; denn ein bestimmtes Band in der Mitte muss die Verbindung zwischen beiden schaffen. Das schönste aller Bänder ist aber das, welches sich selbst und das Verbundene, soweit möglich, zu einem macht. Das aber vermag ihrer Natur nach am besten die Proportion zu bewirken. Wenn nämlich von drei Zahlen (...) sich die mittlere so zur letzten verhält wie die erste sich zu ihr und wiederum wie die letzte sich zur mittleren so die mittlere zur ersten, dann wird, da die mittlere zur ersten und letzten wird, die letzte und erste aber beide zu mittleren, daraus notwendig folgen, dass alle dieselben seien. (32a)

Dem Lebewesen aber, das bestimmt war, alle Lebewesen in sich zu umfassen, dürfte wohl die Gestalt angemessen sein, welche alle irgend vorhandenen Gestalten in sich schließt; darum drechselte er sie auch kugelförmig, mit gleichen Abständen vom Mittelpunkt aus nach allen Seiten zu den Endpunkten und kreisrund, die vollkommenste und sich selbst ähnlichste aller Gestalten, indem er das Gleichartige für unendlich schöner ansah als das Ungleichartige. (33c)

Da es (...) eine letzte Grenze gibt, ist es [das Seiende] allseits vollendet, gleich der Masse einer wohlgerundeten Kugel, vom Zentrum her in alle Richtungen sich gleichermaßen erstreckend. (...) Es gibt nämlich kein Nichtseiendes, das es hindern würde, die Einheitlichkeit zu erreichen, und es ist auch nicht seiend derart, dass es hier mehr oder dort weniger von Seiendem gäbe, weil es als Ganzheit unversehrt ist. PARMENIDES (DK 28 B45)

Gott habe das Sehvermögen uns erfunden und verliehen, damit wir die Umläufe der Vernunft am Himmel erblickten und sie für die Umschwünge unseres eigenen Denkens benutzten, welche jenen verwandt sind, als regellose den regelten, damit wir, nachdem wir sie begriffen und zur naturgemäßen Richtigkeit unserer Berechnungen gelangten, in Nachahmung (...) unsere eigenen einrichten mögen. (47c)

Weder die Seele ohne den Körper, noch den Körper ohne die Seele in Bewegung zu setzen, damit beide (...) gleichgewichtig und gesund werden. Der Mathematiker also (...) muss zum Ausgleich (...) die Bewegung des Körpers pflegen; wer dagegen seinen Körper eifrig bildet, der muss zum Ausgleich, indem er sich zusätzlich mit der musischen Kunst oder der Philosophie beschäftigt, die Bewegung der Seele pflegen. (88c)

3.6 Siebenter Brief

Bei einem jeden der Dinge gibt es drei Momente, durch welche nach ewiger Weltordnung die vollständige geistige Erkenntnis Schritt für Schritt zu Stande kommt, das vierte ist die Erkenntnis selbst, als das fünfte ist dasjenige zu setzen, was eben erst sich durch Vertiefung in der Vernunft erkennen lässt und das wahre Urbild des Dinges (Eidos) ist. Das erste dieser Momente ist der Name, das zweite ist die sprachlich ausgedrückte Begriffsbestimmung, das dritte ist das durch die körperlichen Sinne wahrnehmbare Bild, das vierte ist die begriffliche Erkenntnis. (...) Kreis ist zum Beispiel ein sprachlich bezeichnetes Ding, das eben den Namen hat, welchen wir eben laut werden ließen. Das Zweite von jenem Dinge würde die sprachliche ausgedrückte Begriffsbestimmung sein, welche aus Nenn- und Aussagewörtern zusammengesetzt ist, zum Beispiel: ‚das von seinem Mittelpunkt überall gleich weit Entfernte‘ wäre wohl die Erklärung von jenem Dinge, das den Namen Rund, Zirkel, Kreis hat. Das Dritte ist das in die äußeren Sinne fallende körperliche Bild davon, zum Beispiel vom Zeichner und vom Drechsler angefertigt, was sich wieder auslöschen und vernichten lässt, Zufälle welchen der Begriff des Kreises an sich, mit dem alle jene Meister sich beschäftigen, nicht unterworfen ist, weil er etwas Anderes und ganz davon Verschiedenes ist. Das Vierte ist das vernünftige Erkennen, das Begreifen durch den vernünftig denkenden Geist, die wahre Vorstellung von solchen Dingen, und diese ganze Tätigkeit muss man als eine zählen, da sie nicht in äußerlichen sprachlichen Lauten, nicht in den der körperlichen Wahrnehmung zugänglichen Gestalten, sondern innerhalb der Seele ist, und durch diese Innerlichkeit unterscheidet sich diese Erkenntnis erstlich von dem Urkreis an sich und zweitens auch von den drei vorhin genannten Erkenntnis-Momenten. Unter den Erkenntnis-Momenten aber ist das des zusammenfassenden Vermögens der Vernunft dem Fünften, dem Urkreis an sich an Verwandtschaft am nächsten, die andren aber stehen weit zurück.

Literatur

[] **Quellen**

- [Arc] ARCHIMEDES: Werke. Wiss. Buchges., Darmstadt 1983.
- [Ari] ARISTOTELES: Philosophische Schriften. Meiner, Hamburg 1995.
- [Be] OSKAR BECKER: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Suhrkamp, Frankfurt 1975.
- [Bü] WILHELM BÜTTEMEYER: (Hg.): Philosophie der Mathematik. Alber, Freiburg 2003.
- [Di] DIOGENES LAERTIUS: Leben und Meinungen berühmter Philosophen. Übersetzung von Otto Apelt. Meiner, Hamburg 2008.
- [Pl-Me] PLATON: Menon. (Griech.-Dt. Übers. u. hrsg. Margarita Kranz). Reclam, Leipzig 1994.
- [Pl-We] PLATON: Sämtliche Werke. (Übers. v. Friedrich Schleiermacher). Rowohlt, Reinbek 1970.
- [Pl] PLATON: Werke. (In acht Bänden; griechisch und deutsch. Hrsg. von Gunther Eigler). Wiss. Buchges., Darmstadt 1970.

Sekundärliteratur

- [Br] JAMES ROBERT BROWN: Philosophy of Mathematics. Routledge 1999.
- [Bu] M. F. BURNYEAT: *Plato on Why Mathematics is Good for the Soul*. In: T. Smiley (Hg.): Mathematics and Necessity. Oxford University Press, New York 2000, pp. 1-82.
- [Da-He] PHILIP J. DAVIS, REUBEN HERSH: The Mathematical Experience. Birkhäuser, Boston 1981.
- [Ha] IAN HACKING: *What Mathematics Has Done to Some and Only Some Philosophers*. In: T. Smiley (Hg.): Mathematics and Necessity. Oxford University Press, New York 2000, pp. 83-138.
- [Ha-Sc] HELMUT HASSE, HEINRICH SCHOLZ: Die Grundlagenkrise der Griechischen Mathematik. Pan-Verlag, Berlin 1928.
- [He] THOMAS HEATH: A History of Greek Mathematics. Clarendon, Oxford 1921 (Dover 1981).
- [La] IMRE LAKATOS: Beweise und Widerlegungen. Vieweg, Braunschweig 1979.
- [Ma] LUDWIG MARKUSE: Der Philosoph und der Diktator. Diogenes, ...
- [Me] HERBERT MEHRTENS: *Nachwort*. In: J.D. Barrow: Warum die Welt mathematisch ist. Campusverlag, Frankfurt 1992, pp. 91-104.
- [Meh] HERBERT MEHRTENS: Moderne Sprache Mathematik, Suhrkamp, Frankfurt, 1990.
- [Mei] UWE MEIXNER: (Hg.): Philosophie der Logik. Alber, Freiburg 2003.
- [Me] HERBERT MESCHKOWSKI: Wandlungen im mathematischen Denken. Vieweg, Braunschweig 1969.
- [Mu] ROBERT MUSIL: *Der wichtigste Versuch*. In: Ders.: Der Mann ohne Eigenschaften. Rowohlt, Reibek 1978, pp. 38-41.
- [Na] FRITZ NAGEL: Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften. Aschendorff, Münster 1984, pp. 26-86.
- [Pu-II] WALTER PURKERT, HANS JOACHIM ILGAUDS: Georg Cantor. Birkhäuser, Basel 1987.
- [Ra] KNUT RADBRUCH: Bausteine zu einer Kulturphilosophie der Mathematik, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009.
- [Sh] STEWART SHAPIRO: Thinking about Mathematics. Oxford University Press, New York 2000, pp. 49-72.
- [Wo] BRIGITTA-SOPHIE VON WOLFF-METTERNICH: Wider das mathematische Erkenntnisideal. De Gruyter, Berlin 1995.