

Heinrich Winter

Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht

**Einblicke in die Ideengeschichte
und ihre Bedeutung für die Pädagogik**

Herausgegeben von Erich Ch. Wittmann

Mit 98 Figuren



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig / Wiesbaden

1. Die Verdoppelung des Quadrats in Platos "Menon" — die erste Mathematikstunde in der Menschheitsgeschichte

1.1 Der Menon-Dialog

Der griechische Philosoph Plato (429 ? bis 348 ? v.Chr.) ist die erste Bezugspersonlichkeit für mathematikpädagogisches Denken. Mathematik ist für ihn Bildungsgrundlage, und in seinem Werk setzt er sich mit der Natur mathematischer Objekte, mit Erkenntnistheorie und mit Lehren und Lernen auseinander.

Besonders bedeutsam ist für uns der Dialog "Menon". Das Hauptthema in dem Dialog (griech.: *diálogos* = Unterredung) zwischen dem Lehrer Sokrates (469 - 399) und dem Schüler Menon, einem jungen Mann aus dem thessalischen Adel, ist die Frage nach dem Begriff und der Lehrbarkeit von Tugend. Nachdem der Versuch, Tugend zu definieren, gescheitert ist, wirft Sokrates die Frage auf, ob man denn überhaupt etwas suchen könne, was man nicht wisse. Er führt dann die Lehre von der Unsterblichkeit der Seele und damit die Idee ein, daß es möglich sei, sich an ein Wissen aus früherer Existenz zu erinnern. Diese Fähigkeit des Wiedererinnerns (Anamnese; griech.: *anamnesis* = Erinnerung) ist ihm die Erklärung dafür, daß man offenbar Erkenntnisse in jemandem erwecken kann, ohne ihn zu unterweisen; man muß ihn nur geschickt fragen, dann erinnert er ein — sogar echtes und nicht nur irgendwie überkommenes und ungeklärtes — Wissen.

Um den zweifelnden Menon von der These des Erkennens als eines Wiedererinnerns zu überzeugen, wird ein (scheinbar) unwissender Sklave herbeigerufen, der in einem Zwiegespräch mit Sokrates das Problem der Verdoppelung des Quadrates in der Sicht des Sokrates selbständig (ohne Belehrung) löst.

Der Anfang des Gespräches zwischen Sokrates und dem Sklaven lautet (wobei man sich noch vorstellen muß, daß Figuren in den Sand gezeichnet werden) (vgl. Figur 1.1):

"Sokrates: Sage mir also, Knabe, weißt du wohl, daß ein Viereck eine solche Figur ist?"

Sklave: Das weiß ich.

Sokrates: Gibt es also ein Viereck, welches alle diese Seiten, deren vier sind, gleich hat?

Sklave: Allerdings.

Sokrates: Hat es nicht auch diese beiden, welche durch die Mitte hindurchgehen, gleich?

Sklave: Ja.

Sokrates: Ein solcher Raum nun kann doch größer und kleiner sein.

Sklave: Freilich.

Sokrates: Wenn nun diese Seite zwei Fuß hätte und diese auch zwei; wieviel Fuß enthielte das Ganze? — Überlege es dir so. Wenn es hier zwei Fuß hätte, hier aber nur einen, enthielte dann nicht der ganze Raum einmal zwei Fuß?

Sklave: Ja.

Sokrates: Da er nun aber auch hier zwei Fuß hat, wird er nicht von zweimal zwei Fuß ?

Sklave: Das wird er.

Sokrates: Zweimal zwei Fuß ist er also?

Sklave: Ja.

Sokrates: Wieviel nun zweimal zwei Fuß sind, das rechne aus und sage es.

Sklave: Vier, o Sokrates.

Sokrates: Kann es nun nicht einen anderen Raum geben, der das doppelte von diesem wäre, sonst aber ein ebensolcher, in dem alle Seiten gleich sind wie in diesem?

Sklave: O ja.

Sokrates: Wieviel Fuß muß der halten?

Sklave: Ja.

Sokrates: Diese nun nennen die Gelehrten die Diagonale; so daß, wenn diese die Diagonale heißt, alsdann aus der Diagonale, wie du behauptest, das zweifache Viereck entsteht.

Sklave: Allerdings, Sokrates.

Sokrates: Was dünkt dich nun, Menon? Hat dieser irgendeine Vorstellung, die nicht sein war, zur Antwort gegeben?

Menon: Nein, nur seine eigenen.

Sokrates: Und doch wußte er es vor kurzem noch nicht, wie wir gestanden?

Menon: Ganz recht.

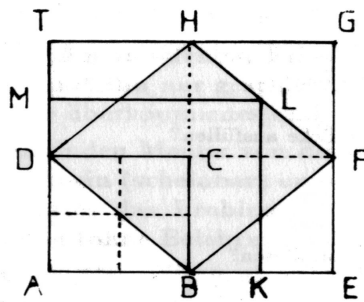
Sokrates: Es waren aber doch diese Vorstellungen in ihm.

Menon: Ja.“

Das Wort "Fuß" wird einmal als Längen- und einmal als Flächenmaß benutzt.

A B C D ist das flächenvierfüßige Ausgangsquadrat.

D B F H ist das flächenachtfüßige Zielquadrat.



Figur 1.1

Als Quintessenz dieses Intermezzos mit dem Sklaven verstärkt Sokrates im weiteren Gespräch mit Menon die Behauptung, daß der menschliche Geist zu sicherer, unbestreitbarer Erkenntnis durch Wiedererinnerung gelangen kann.

Im letzten Teil des Dialogs wird die Frage nach der Lehrbarkeit der Tugend erneut aufgenommen. Sie bleibt offen. Skeptisch und ironisch setzt sich Sokrates jedenfalls mit Anytos (seinem späteren Ankläger) auseinander, der auf das unreflektierte Nachahmen der (göttlichen) Männer als Mittel der Tugendvermittlung setzt. Am Schluß wird die wichtige Unterscheidung zwischen echtem Wissen einerseits, wie es der Sklave gewonnen hat, und der richtigen Vorstellung andererseits, mit der man sich im Alltag begnügt, herausgearbeitet.

1.2 Die Tiefenstruktur des Gesprächs über die Quadratverdoppelung

Das Gespräch zwischen Sokrates und dem Sklaven, das ich im folgenden so betrachte, als ob es wirklich einmal stattgefunden hätte, ist einerseits als das Urmuster des gerade danach benannten sokratischen Lehrens gepriesen worden, wonach der Schüler nicht durch Informationsvermittlung belehrt wird, sondern eigenständig zur Erkenntnis kommt, und andererseits gerade umgekehrt als Urmuster kleinschrittig gängelnden Unterrichts kritisiert worden, in dem der Schüler nur scheinbar etwas selbst findet, in Wirklichkeit jedoch — höchst reaktiv und hilflos — dem Szenarium des suggestiven Fragespiels ausgeliefert wird.

Tatsächlich stützt der Text des Dialogs zunächst einmal die negative Deutung: Die Redebeiträge des Sklaven beschränken sich weitgehend darauf, die in der Regel sehr eng

gestellten Fragen von Sokrates mit einem Einwortsatz zu beantworten oder die Aussage des Lehrers schlicht zu bestätigen ("Ja." "Allerdings, Sokrates."). Der Sklave hat offenbar überhaupt keine Chance, etwas anderes zu sagen, als das, was der Lehrer Sokrates in einer vorbedachten Regie als Antwort hervorzulocken gedenkt und darin auch nicht getäuscht wird. Der Lehrer führt das Gespräch, und zwar absolut dominant, der Sklave folgt ihm lediglich, den kunstvollen Fragen preisgegeben.

In dieser kommunikationstheoretisch orientierten Sicht verkörpert also das Gespräch geradezu das Gegenteil von dem, für was es in verbreiteter Weise Vorbild sein sollte: für das entdeckende Lernen.

Verlassen wir jedoch die Oberflächenstruktur des Frage-Antwort-Spiels und decken seine Tiefenstruktur auf, so zeigt sich ein anderes Bild, eben doch das Schema einer möglichen entdeckenden Lösungsentwicklung mit folgenden Phasen (vgl. Figur 1.1):

- (1) Problemstellung, gegeben durch den Lehrer
- (2) Erster Lösungsvorschlag durch den Schüler (Verdoppelung der Seitenlänge), A E G T
- (3) Gemeinsame Analyse dieses Lösungsvorschlags und Bewertung als falsch
- (4) Zweiter Lösungsvorschlag durch den Schüler (Ver-1,5-fachung der Seitenlänge)
A K L M
- (5) Gemeinsame Analyse dieses Lösungsvorschlags und Bewertung als falsch
- (6) Krisis; Eingeständnis der Unwissenheit durch den Schüler
- (7) Entdeckungshilfe durch den Lehrer (Hinweis auf die Diagonalen), D B usw.
- (8) Schrittweiser und gemeinsamer Aufbau dieses dritten Lösungsansatzes, D B F H
- (9) Bestätigung dieses Lösungsversuches als richtig durch beide.

Die Tiefenstruktur des Gespräches, die ja nicht direkt beobachtbar ist, habe ich hier im Rahmen der Philosophie Platons rekonstruiert.

Platos Auffassung von (mathematischem) Wissen und Wissensverbreitung wird offenbar: Mathematische Ideen existieren als objektive und wahre Gegebenheiten; sie sind in sich unwandelbar, bestehen seit Ewigkeit her. Ihr Sein ist unabhängig von erkennenden Subjekten. Der Mensch kann nicht Mathematik erfinden und herstellen, er kann nur (in Grenzen) das bereits Existierende entdecken, aufdecken. Er besitzt kraft seiner unsterblichen Seele bereits dieses wahre Wissen von Anfang an in sich. Aber es ist verdeckt durch falsches Wissen und Scheinwissen (an dem die von Sokrates zeitlebens bekämpften Sophisten interessiert sind). Um des wahren Wissens bewußt zu werden, muß zunächst dieses oberflächliche und dünkelfhafte (wenn auch in der Welt erfolgreiche) Scheinwissen abgetragen werden. Und dies geschieht dadurch, daß ein geschickt fragender Lehrer Lösungen des Scheinwissens induziert, die dann als Trugschlüsse entlarvt werden; das währt so lange, bis aus diesem Scheinwissen keine Lösung mehr produziert werden kann. Dann ist die kritische Grenzstelle zwischen Schein- und wahren Wissen erreicht, das Eingeständnis der Unwissenheit. Durch weiteres Fragen angeregt, wird sich der Schüler mehr und mehr seines wahren Wissens bewußt, er erinnert sich seiner.

Mathematiklernen ist damit Abbauen von Fehlvorstellungen und Erinnern an bereits vorhandenes wahres Wissen. Und Mathematiklehren besteht darin, diesen Abbau/Erinnerungsprozeß zu initiieren und zu unterstützen, und zwar durch kunstvolles Fragen.

Die Funktion des Lehrers, so wird es von Plato im Dialog "Theätetos" auch ausdrücklich gesagt, ist vergleichbar mit der Hebammenkunst (Mäeutichen techne): Wie die Hebamme (die Mutter Sokrates' war eine) nicht das Kind macht und für seine Eigenschaften nicht verantwortlich ist, sondern nur hilft, es ans Licht zu bringen, so unterstützt der Lehrer das Hervorbringen des wahren Wissens im Schüler. Er legt es nicht in diesen

hinein, und schon gar nicht hat er Einfluß auf das Wissen selbst, dies ist vielmehr schon unwandelbar und fertig vorhanden.

1.3 Das Sokratische Lehren

Platos "Menon" ist ein Werk der Philosophie, die damals freilich noch allumfassend war und unsere Unterscheidungen in Erkenntnislehre, Psychologie, Pädagogik usw. noch nicht kannte. Das über Jahrhunderte währende beständige und auch heute noch lebhaftes Interesse seitens der Didaktik (insbesondere der Mathematikdidaktik) an diesem Dialog, der ja ein philosophischer Disput ist und nicht tatsächlich geschehenen Unterricht protokolliert, erklärt sich m.E. durch die bestechende und überaus mathematikfreundliche Theoriehaltigkeit. Lehren besteht hier nicht etwa im Ausführen von überkommenen Vermittlungspraktiken (Aufmerksamkeit erregen, Inhalt in viele Teile zerlegen, Veranschaulichen, Üben usw.), sondern ist eingeordnet in ein faszinierend stimmiges Bild vom Menschen und seinen intellektuellen Möglichkeiten.

Obwohl nur Geburtshelfer, ist der (Mathematik)Lehrer durch eine höchstrangige Funktion ausgezeichnet, insofern er daran mitwirkt, wahres Wissen ans Licht des Bewußtseins zu bringen. Er selbst ist bereits im Besitz wahren Wissens und versteht es nun, diesesselbe in anderen hervorzuholen; damit fällt auch ein Abglanz der schönen Ideen der Mathematik auf ihn. Das Mittel des Hervorholens ist das Sokratische Lehren, die Sokratische Methode.

So, wie uns diese Lehrmethode im "Menon" vorgeführt wird, nämlich als gängelnder und kurzaktiger, fragend-entwickelnder Einzelunterricht (früher "Katechese"; griech.: katechesis = mündlicher Unterricht), muß sie überaus kritisch gesehen werden, gerade auch deshalb, weil sie — oft unter dem Schlagwort entdeckendes Lernen — in den Schulen so verbreitet ist. Einige Punkte, die sich direkt auf den Dialog beziehen, sind:

- (1) Das Problem wird nicht aus einem Kontext heraus entwickelt, sondern dem Sklaven unvermittelt vorgesetzt. Er hat keine Gelegenheit, über seine Sinnhaftigkeit nachzudenken. Es hat auch mit seiner sonstigen Lebenspraxis nichts zu tun.
- (2) Der erste Lösungsversuch (Verdoppelung der Seiten) wird nur als falsch beurteilt. Sein Zustandekommen bleibt aber unerörtert. Es wird nicht bewußt gemacht, daß der Flächeninhalt nicht proportional von der Seitenlänge abhängt sondern quadratisch, daß also hier das sonst überaus leistungsfähige Schema ("Wenn die eine Größe verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die von ihr abhängige") inadäquat ist.
- (3) Der zweite Lösungsversuch, der wiederum nur als falsch nachgewiesen wird, hat nicht nur eine gewisse Plausibilität für sich (die in anderen Situationen durchaus erfolgreich sein kann), sie hätte insbesondere als Ausgangspunkt einer approximativen Lösung dienen können. Der Lehrer Sokrates ist aber auf eine, die Lösung, seine Lösung festgelegt. Wie kann der Sklave das ahnen?
- (4) Das Eingeständnis der Unwissenheit wird vom Lehrer als notwendig und als positiv wirkend angesehen. Die Gefahr, daß der Schüler auch und sogar für längere Zeit entmutigt werden kann oder gar sich als inferior gegenüber dem im Besitz des wahren Wissens befindlichen und daher übermächtigen Lehrers vorkommen muß, wird nicht gesehen.
- (5) Der Verweis des Sokrates auf die Diagonale, die entscheidende Entdeckungshilfe, geschieht unvermittelt. Der Sklave erhält keinen Anreiz und keinen Spielraum, um womöglich selbst auf die Idee zu kommen. Er wird nur gehalten, nachzuvollziehen, welche problemlösende Wirkung das Einzeichnen von Diagonalen hat.

- (6) Am Ende der Lektion erfolgt weder ein Rückblick auf die Etappen der Lösung noch ein Vorausblick auf mögliche Fortsetzungen und Verallgemeinerungen; es bleibt auf Seiten des Sklaven bestenfalls bei einem einmaligen Aufleuchten einer Einsicht.
- (7) Entgegen den Beteuerungen des Sokrates gegenüber dem Menon muß sich Sokrates beim Abtragen des Scheinwissens doch auch schon auf vorhandene Bestandteile richtigen Wissens beim Sklaven stützen. Die Entlarvung von Scheinwissen und Trugschlüssen setzt ja schon ein Mindestmaß wahren Wissens voraus. Zumindest mußte der Sklave verstehen, was Quadrate sind und elementare Rechenoperationen vollziehen und deuten können.

Die Liste kritischer Punkte wird noch länger, wenn man die oft erhobene Forderung prüft, im Mathematikunterricht (durchgehend) sokratisch zu lehren und sich dabei des "Menon" als eines Musters zu bedienen. Schon Weierstraß in seiner pädagogischen Prüfungsarbeit vom Jahre 1841 benennt einige Problempunkte:

- (8) Im Dialog "Menon" gibt es nur einen Schüler, den Sklaven. Wenn ein Lehrer mehrere, ja viele Schüler hat, bleibt zunächst unklar, wie hier ein Dialog zu führen wäre, wenn dies überhaupt möglich erscheint.
- (9) "Die Sokratische Methode in ihrem wahren Geiste durchgeführt passt weniger für Knaben als für reifere Jünglinge" (Weierstraß, S. 327). Jedenfalls sind die Gesprächspartner in den Platonischen Dialogen nicht Kinder, sondern junge Männer, die schon eine hohe Stufe der Bildung erreicht haben. Das Problem ist also, welche Voraussetzungen in Sprachkultur und Wissensstand Schüler bereits mitbringen müssen, um Sokratische Dialoge erfolgreich bestreiten zu können.
- (10) Unsere allgemeinbildende Schule ist (bis zu einem bestimmten Ausmaß) Pflichtschule, in der Platonischen Akademie trafen sich hingegen Interessierte freiwillig. Die Frage ist, inwieweit die obligate Massenschule die geeignete Atmosphäre für Sokratisches Lehren bieten kann.
- (11) Ist jeder Lehrer imstande, Sokratische Lehrdialoge zu führen? "Wer in Sokrates' Weise unterrichten will, muss auch von Sokrates Geiste etwas in sich tragen" (Weierstraß, S. 327). Bekanntlich war Sokrates ein herausragender Lehrer, herausragend in seiner Liebe zur Wahrheit, in seinem Glauben an die Verbreitbarkeit der Tugend und an die Verbesserbarkeit des Menschen; und schließlich in seinem Mut beim Kampf gegen Unwissenheit und Scheinwissenschaftlichkeit. Die Frage ist, inwieweit die Sokratische Methode einen charismatischen Lehrer dieses Formats voraussetzt.
- (12) Ausdrücklich wird von Plato vorausgesetzt (und auch im "Menon" stillschweigend unterstellt), daß in den Menschen ein Streben nach wahrer Erkenntnis vorhanden ist und auch gestillt werden könne. Heute glauben wir zu wissen, daß die Lust an der Theorie, das Verlangen nach Einsicht und Durchblick (gegen alle Widerstände und unabhängig von Belohnungen externer Art) zumindest keine bare Selbstverständlichkeit ist. Vielmehr wird die Motivationsproblematik als besonders heikel eingeschätzt.
- (13) Ein letzter wichtiger Kritikpunkt: Ist das Sokratische Lehren daran gebunden, daß der Lehrer im grundlagentheoretischen Sinne ein Platonist ist? D.h. also grob gesagt der Auffassung, daß mathematische Objekte (in dem berühmten Platonischen Ideenhimmel) als Wirklichkeiten unveränderbar und kristallen existieren, unabhängig von denkenden Wesen? "Dem Platonismus zufolge ist ein Mathematiker ein ebenso empirischer Wissenschaftler wie ein Geologe; er kann nichts erfinden, da alles bereits vorhanden ist. Es bleibt ihm nur, die Dinge zu entdecken" (Davis, Hersh, S. 334). Möglicherweise gibt es eine Affinität zwischen der Hochschätzung Sokratischen Lehrens und Platonismus. In diesem Falle wäre es problematisch, das Sokratische

Lehren entschieden zu favorisieren oder gar als allgemein verbindliches Lehrverfahren auszuzeichnen.

Diese Kritik kann indes nicht die überragende Bedeutung der Philosophie des Sokrates und Plato, speziell des Dialogs "Menon", für die Mathematikdidaktik mindern.

Was oft übersehen wird: Für Sokrates und Plato war das Ziel aller Wissenschaft und Philosophie die Bildung und Erziehung der Menschen. Und dabei räumten beide (wenn auch mit unterschiedlichen Akzenten) der Mathematik als der rationalsten Wissenschaft eine hervorragende Rolle zur Ausbildung von Verstandestugenden ein. Diese attischen Philosophen verfochten — als erste im Abendland — ein entschiedenes Programm der Aufklärung, setzten also auf die Entwicklung der Vernunft, die sie als notwendig ansahen zur Herbeiführung individueller und sozialer Glückseligkeit. Wie alle Aufklärer mußten sie freilich auch schmerzlich erfahren, wie äußerst mühselig die Verbreitung noetischer (griech.: noesis = das Denken) Tugenden ist, daß das Wissen um das Gute noch längst nicht gutes Handeln nach sich ziehen muß. Auf jeden Fall wird man dem Sokratischen Lehren nicht gerecht, wenn man es nicht in den Rahmen der Gesamtbemühungen der "Pädäia", der kunstvoll wissenschaftlich betriebenen und aufklärerischen Erziehung stellt. Bei Plato wird — zum erstenmal im Abendland — die Mathematik als Bildungsfach definiert, sogar implizit als Bildungsfach für alle, denn sie ist — wie es am Beispiel des Sklaven demonstriert wird — in allen Menschen als verdecktes Vorwissen erinnerbar. Daß andererseits Plato einen aristokratischen, scharf ständisch gegliederten und totalitär-spartanischen Erziehungsstaat anstrebte, widerspricht aus unserer Sicht seiner allgemein menschlichen Pädagogik der Aufklärung entschieden.

Ein zweites sollte bei aller berechtigten Kritik am Verlauf des Verdoppelungsgesprächs nicht aus dem Auge geraten: die Schlüsselrolle, die Plato dem dialogischen Gespräch überhaupt, dem Diskurs, dem argumentativen Wechselspiel zwischen Rede und Gegenrede bei der Bewußtwerdung wahren Wissens zuerkennt. Wahres Wissen ist geradezu dadurch als das Wissen charakterisiert, das die Gesprächspartner in gemeinsamen Bemühungen am Ende als deduktiv geordnet, als einsichtig und in sich folgerichtig ansehen. Insofern darf man in den Sokratischen Dialogen des Plato Prototypen mathematischer Beweisprechakte sehen: Im Gespräch versichert man sich, was man unter welchem Wort verstehen, was man als unbestreitbar ansehen und was man weshalb als begründet einsehen will. Das Platonische ist freilich dabei, daß die mathematische Wahrheit schon vorliegt und im Gespräch nur aufgedeckt, bewußt gemacht wird, während heute (im Gefolge von Wittgenstein) die Einschätzung verbreitet ist, daß der mathematische Inhalt während des Gesprächs überhaupt erst konstruiert wird; die "Sache" entsteht erst, die Bedeutung der Wörter wird "ausgehandelt".

1.4 Moderne Formen dialogischen Lehrens

Das Sokratische Lehren hat in unserer Zeit u.a. drei besondere und für die Mathematikdidaktik wichtige Ausformungen erfahren, an die hier nur kurz erinnert werden kann: das Sokratische Gespräch im Sinne Heckmanns, das Beweis-Widerlegungs-Spiel (Situationslogik) nach Lakatos und die Dialog-Logik von Lorenzen.

Damit soll nicht behauptet werden, daß die sokratische Tradition erst in diesem Jahrhundert wieder aufgenommen worden sei. Ich erinnere nur an die in Dialogform geschriebenen Werke des Galilei, der ganz bewußt auch an die Erkenntnistheorie Platons (Anamnese) anknüpft, und an die Bemühungen in der Didaktik des 19. Jahrhunderts, wo z.B. folgende Formen von Lehrgesprächen unterschieden werden (Schmidt, S. 2-19):