

2. Kurzessay: Mathematisches Wissen

Prof. Dr. Gregor Nickel
Philosophie der Mathematik (SoSe 2018)

Um mathematisches Wissen richtig definieren zu können, sollte man sich zunächst mit dem allgemeinen Begriff „Wissen“ auseinandersetzen. Wenn man eine allgemeine Definition für den Wissensbegriff haben möchte, ist es nicht zu vermeiden, dass man auf verschiedene Ansichten trifft, da jeder eine eigene und individuelle Definition besitzt, die jedoch weder richtig noch falsch ist, sondern aus einer anderen Perspektive betrachtet wurde. Hierfür nehme ich als Beispiel die Philosophie, die keine eindeutige Definition für den Wissensbegriff aufweisen kann. Da jeder eine eigene Definition zu Wissen hat, werde ich aus meiner eigenen Sicht schreiben und mich auf keine konkrete Definition beziehen. Wichtig wäre es, wenn es um Wissen geht, dass man zwischen „informiert sein“ und „etwas wissen“ unterscheiden kann. Ersteres, so meiner Ansicht nach, ist die reine Informationsflut von dem, wovon der Mensch bestimmte Informationen zur Verfügung stehen hat, aber kein tieferes Verständnis entwickelt wurde, da die Auseinandersetzung kaum oder bis gering stattgefunden hat. Dies würde ich als „oberflächliches Wissen“ bezeichnen. Etwas zu wissen hingegen, wäre somit die richtige Auseinandersetzung mit der Materie, sodass auch Problemstellungen in der Regel keine Probleme bereiten würden, da man sich auch tiefer mit der Problematik beschäftigen kann, ohne sich mit dem Grundproblem „Was genau ist das?“ beschäftigen zu müssen.

Somit würde ich mathematisches Wissen als eine Art Grundwissen über die mathematische Geschichte und ihre Entwicklung bezeichnen, sowie die Anwendung, die man während der Schulzeit miterlebt hat, wenn man sich nicht nur grob auf die einfachen Rechenoperatoren beschränkt. Um die oben genannte Differenzierung nochmal in einem Beispiel aufzugreifen, wäre es für die Person, die sich mit Mathematik beschäftigen möchte, viel interessanter, sich nicht nur die Anwendungen anzuschauen, sondern auch den geschichtlichen Aspekt zu studieren. Natürlich kommt der geschichtliche Aspekt während der Schulzeit wesentlich kürzer zum Zuge, als die reine Anwendung, jedoch würden die Schüler und Schülerinnen (SuS) somit einen anderen Eindruck bekommen, wieso sich Mathematiker mit solchen Problem beschäftigt haben. Den SuS fehlt es in der Regel das Wissen um gewisse Fakten und Informationen zuzuordnen.

Wie eine Beurteilung über das mathematische Wissen stattfinden kann, könnte durch ein einfaches Gespräch zwischen Lehrperson und Lernenden herausgefunden werden. Wenn der Lernende „mitreden“ und die Stellung der Lehrperson versteht, ist er soweit im Sachverhalt drin, sodass er sich zu gewissen Fragen und Problemen äußern kann und somit kein „Halbwissen“ verfügt. SuS, die unsicher oder gar keine Antworten geben können, wie zum Beispiel die Vorgehensweise einer Rechnung, oder gar ihre Stellung nicht fachlich vertreten können, sind meines Erachtens nach nicht in dem mathematischen Sachverhalt drin und wissen nicht was das Problem ist, da sie nur ein vielleicht nur ein „oberflächliches Wissen“ Verfügung und dieser nicht ausreicht um Mitreden zu können. Somit verlieren die SuS auch die Motivation sich mit Mathematik auseinanderzusetzen, da den meisten Lernenden einfach bestimmte Kenntnisse fehlen, die sich im Laufe der Zeit angesammelt haben und so nur zur einer Blockade führen.

A.A.

Mathematisches Wissen ist das Kennen und Anwenden von Methoden in verschiedenen Sachverhalten. Hierbei ist es wichtig, den Sachverhalt zu erkennen und mit einer möglichst (für jeden) verständlichen und nachvollziehbaren Strategie zu lösen.

Bei dieser Art von Sachverhalten handelt es sich um konkret gestellte Fragen und Probleme die gelöst werden müssen, aber auch um den alltäglichen Umgang mit Zahlen.

Ein Schüler ‚weiß‘ einen Sachverhalt, wenn er eine Methode kennt, um zu einer Lösung des Problems zu gelangen. Falls der Schüler nicht zu der richtigen Lösung gelangen sollte, kann man anhand des Rechenwegs, bzw. anhand von Erklärungen des Schülers, nachvollziehen, wo er Probleme hat und wie diese aussehen.

Sarah-Maria Althaus

Mathematisches Wissen im Allgemeinen bezieht sich auf ein grundlegendes mathematisches Verständnis, das die betreffende Person besitzen sollte, um mit den Inhalten der Mathematik umgehen zu können. Der Anspruch an das mathematische Wissen einer Person sollte je nach Status, damit meine ich, ob es sich um einen Grundschüler oder Studenten, um ein Kleinkind oder Teenager handelt, angepasst werden. Dieses grundlegende Verständnis sollte gelehrt, sich angeeignet werden oder schon vorhanden sein. Somit besitzt die Person, Wissen über mathematische Sachverhalte, mit dem verschiedenste Aufgabenstellungen korrekt verstanden und gelöst werden können und das Erlernte auf weitere Themenbereiche übertragen werden. Übertragen auf den Schulalltag kann es allerdings kompliziert sein, zu beurteilen, inwieweit ein Schüler oder eine Schülerin einen mathematischen Sachverhalt „weiß“. Eine Möglichkeit wäre zum Beispiel „stumpf“, die Anzahl der korrekt bearbeiteten Aufgaben zu zählen. Oder aber könnte auch die Strategie mit der ein Schüler oder eine Schülerin die Aufgabe bearbeitet, beobachtet und analysiert werden. Folgt der Schüler oder die Schülerin einer bestimmten Strategie, um die Aufgabe zu lösen? Überträgt der Schüler oder die Schülerin diese Strategie auf andere Aufgabenteile, die komplexer aufgebaut sind und ist trotzdem in der Lage die Strategie dementsprechend anzupassen? Kann das neu erlernte Wissen auf weitere Themenbereiche übertragen werden? Viele Aspekte haben einen Einfluss auf den Grad des „mathematische Wissens“, den ein Schüler oder eine Schülerin haben kann. Dementsprechend sollte auch mit Vorsicht und genauer Beobachtung des einzelnen Schülers oder der einzelnen Schülerin darüber geurteilt werden, ob ein Schüler oder eine Schüler „mathematisches Wissen“ zu haben, scheint.

Janina Bäumer

Das Ergebnis zum Beispiel einer Schulaufgabe bestimmen zu können wird häufig, meiner Meinung nach fälschlicher Weise, mit dem Beherrschen eines mathematischen Themas verwechselt.

Um einen mathematischen Sachverhalt, sei es eine Problemstellung, eine Methode oder ein einfacher Zusammenhang, vollständig zu wissen, reicht es also nicht das Endprodukt zu kennen oder bestimmen zu können. Gerade die Herkunft des Sachverhaltes, also sein mathematischer Ursprung, beziehungsweise die Begründung für seine Richtigkeit oder seine Herleitung/ Beweis, müssen nicht nur gekannt, sondern verstanden sein. Erst dann können auch die Auswirkungen und die Bedeutung für andere Bezüge vollständig klar sein. Zusätzlich muss natürlich die Logik des Sachverhaltes an sich ebenfalls bewusst sein und nicht nur hingenommen werden.

Da die Mathematik oft als Werkzeug für viele andere Angelegenheiten genutzt wird, ist es auch notwendig, so wie ich finde, eine Vorstellung davon zu haben, wofür der Sachverhalt nützlich sein

kann. Dabei ist es egal ob es sich um eine konkrete Anwendung außerhalb der Mathematik oder als Hilfe für die Mathematik selbst handelt. Dazu ist es vorteilhaft ein Beispiel mit dem Sachverhalt in Verbindung bringen zu können.

Zusammenfassend sind also nicht nur der Sachverhalt selbst zu verstehen, sondern auch sein *Ursprung* und der *Weg* auf den er führt um wirklich von „*Wissen*“ sprechen zu können.

Ein Lehrer kann nur schwer beurteilen, ob tiefes mathematische Wissen über einen Sachverhalt vorhanden sind, da in einer Abfrage/ Klausur selten genug Zeit eingeplant werden kann, um Ursprung, Eigenverständnis des Sachverhaltes und Anwendung abzufragen. Meist bleibt es bei der Überprüfung durch Anwendung, selten durch Beweis oder Herleitung. Ich persönlich würde eine mündliche Besprechung vorschlagen, in der der Schüler sozusagen „*Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft*“ des mathematischen Sachverhaltes darbringen soll. Das hieße für mich seine Herleitung/ sein Beweis/ seine Legitimierung, sowie eine Verständlichkeit oder Logik selbst und seine Anwendung beziehungsweise ein Beispiel vorzustellen und zu erklären. So kann man gut überprüfen, an welchen Stellen Verständnisprobleme auftauchen, sofern sie auftauchen und was noch fehlt zum „*Wissen*“ eines mathematischen Sachverhaltes.

Niklas Becher

Mathematisches Wissen bezieht sich auf das inhaltliche und begriffliche Kennen eines mathematischen Sachverhalts und geht aber nun noch weiter darüber hinaus. Es beinhaltet also nicht nur das auswendig können von mathematischen Definitionen, Sätzen und Regeln und die Fähigkeit des Abarbeitens von Konzepten, sondern darüber hinaus eine viel tiefer gehende Verinnerlichung. Wenn jemand über mathematisches Wissen zu einem Sachverhalt verfügt, so kann er diesen in das Gesamtkonzept Mathematik einordnen, seine Relevanz bestimmen, kennt sich in verschiedensten Anwendungsmöglichkeiten aus und kann ihn auf bisher unbekannte Situationen übertragen. Eine besonders weitreichende Form des Wissens ist festzustellen, wenn die Person durch Erklären oder Anleiten eine andere Person dazu bringen kann, ebenfalls tiefes mathematisches Wissen über diesen Sachverhalt zu besitzen.

Daraus ergeben sich Überprüfungsmöglichkeiten für das mathematische Wissen von SuS. Man kann ihnen Aufgaben stellen, in denen sie das Erlernte auf eine neue Situation übertragen müssen, d.h. sie müssen das Erlernte eventuell abwandeln, mit anderem Wissen kombinieren oder weiterführen. Außerdem kann man sie dazu auffordern das Wissen erklärend darzustellen, sei es einem Mitschüler, einem imaginären Partner oder als potenziellen Lehrbucheintrag und das Ergebnis auf Richtigkeit, Schlüssigkeit und Nachvollziehbarkeit prüfen.

Mathematisches Wissen zeichnet sich außerdem durch ein langzeitiges Bestehen aus. Das Kennen von Fakten wird mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit nach einem gewissen Zeitraum verloren gehen, wenn es nicht dauerhaft präsent ist. Wissen sollte allerdings auch nach längerer Zeit noch abrufbar sein, da die SuS die Fähigkeit besitzen sollten, den Sachverhalt zu rekonstruieren.

Annika Birlenbach

Mathematisches Wissen kann man in 3 Stufen des Verstehens einteilen. Die Erste Stufe des Verstehens bildet das Kennen einer Definition oder Formel. Die Zweite Stufe bildet das operative Anwenden einer Definition oder Formel beispielsweise für einen mathematischen Beweis oder einer Berechnung. Die letzte Stufe bildet die Reflexionsfähigkeit über den jeweiligen mathematischen Sachverhalt. Es besteht ein tieferes Verständnis über einen mathematischen

Sachverhalt konkret bedeutet dies, dass erklärt werden kann wieso der Beweis so geführt wurde und geklappt hat oder bei einer Berechnung die Bedeutung hinter dem Ergebnis versteht.

Um einen mathematischen Sachverhalt zu wissen müssen alle 3 Stufen verinnerlicht sein. Also muss ein Sachverhalt erst erkannt und eingeordnet werden, dann kennt man Methoden im Zusammenhang mit dem Sachverhalt und anschließend ist ebenso ein Verständnis dafür vorhanden wieso dieser Sachverhalt so erklärt werden kann.

Um dieses Verständnis bei einem Schüler zu prüfen braucht man Aufgaben, die alle 3 Stufen abdecken.

Andreas Borovski

Mathematisches Wissen ist eine Eigenschaft die jeder Mensch besitzt, jedoch bei allen unterschiedlich ausgeprägt ist. Sowohl die Kenntnis über Zahlen als auch komplexe Beweise sind mathematisches Wissen. Man darf dieses jedoch nicht mit mathematischem Verständnis verwechseln. Dieses beinhaltet nicht nur das Wissen einer Lösung sondern auch das Verstehen des Lösungsweges.

Einen mathematischen Sachverhalt zu verstehen, bedeutet ihn erklären und über ihn diskutieren zu können.

Ob Schüler einen mathematischen Sachverhalt verstehen, hängt nicht nur von der Lösung ab. Die Schüler müssen ebenfalls in der Lage sein, den Lösungsweg zu verstehen und am besten auch erklären können. Außerdem ist es wichtig das sie selbst auf den Lösungsweg gekommen sind, damit man sicher sein kann das sie den Sachverhalt wissen. Die beste Möglichkeit herauszufinden ob ein Schüler den Sachverhalt verstanden hat, ist jedoch mit ihm darüber zu diskutieren. Nur wenn der Schüler das Problem erklären kann und Fragen dazu beantworten kann, hat er den Sachverhalt verstanden.

Alice Bremerich

Um mathematisches Wissen charakterisieren zu können, sollte man sich grundsätzlich Gedanken über den allgemeinen „Wissensbegriff“ machen. Der Begriff Wissen wird im Alltag ubiquitär verwendet, sei es in der Schule, im Alltag, oder auch bei politischen Diskussionen.

Versucht man ihn genau zu definieren wird deutlich, dass keine konkrete Definition von Wissen existiert, die allgemein gültig ist. So wird der Wissensbegriff von verschiedenen Philosophen sehr unterschiedlich aufgefasst. Platon beispielsweise macht sich im Dialog „Theaitetos“ erste Gedanken und Definitionsversuche zum allgemeinen Wissensbegriff: Nach Platon ist Wissen demnach nicht nur eine begründete, wahre Überzeugung, sondern der Zustand, auch einen Gegenstand oder eine Sache zu „kennen“, und eine vollständige Erklärung dafür zu haben. Zu diesem Wissen zählt u.a. auch mathematisches Wissen.

Mathematisches Wissen ist seiner Ansicht nach keine „beliebig“ festgelegte Definition, sondern folgt aus „mathematisch und geometrisch wahren Sätzen“. Er geht noch weiter und behauptet, dass die objektiv existierenden Gegenstände uns die richtigen Definitionen vorgeben. Konträr dazu wird das im Konzeptualismus existierende Bild des mathematischen Wissens vornehmlich von uns Menschen geprägt. Es sind schließlich Menschen, die analysieren und Begrifflichkeiten festlegen, sodass das scheinbar objektive, mathematische und geometrische Wissen eine subjektive Komponente erhält, die abhängig von demjenigen ist, der sie festlegt.

Meiner Meinung nach gilt es für den schulischen Alltag einen Mittelweg zu finden, sowohl zwischen dem Konzeptualismus, als auch dem Platonismus. Dies bedeutet einerseits bereits bestehende, festgelegte Definitionen, Entdeckungen, aber auch den allgemeinen wissenschaftlichen Fortschritt und die daraus wachsenden Erkenntnisse nicht einfach unüberlegt hinzunehmen, sondern zu hinterfragen, ggf. selbst zu erforschen. Den Schülern sollte zudem vermittelt werden, dass auch mathematische Erkenntnisse, die durch Menschen gewonnen wurden ebenso durch diese widerlegt werden und ggf. durch neue wissenschaftliche Errungenschaften, verbessert werden können. Dies fördert einerseits die Neugierde der Schüler und motiviert sie grundsätzlich Dinge zu hinterfragen und ggf. Interesse für eine Fragestellung zu entwickeln, der sie nachgehen möchten.

Nichtsdestotrotz ist es speziell in der Schule und allgemein gesellschaftlich bedeutsam einen allgemeingültigen „mathematischen Wissenskanon“ zu haben, an dem man sich orientieren kann und denn man weltweit als gültig anerkennt. Schließlich ist es für die Schüler von enormer Bedeutung sich zunächst Grundlagenwissen anzueignen, um im alltäglichen Leben und im Berufsalltag gewappnet zu sein.

A.C.

Mathematisches Wissen ist eine Auffassung über einen Sachverhalt innerhalb der Mathematik, die auf Grund der grundlegenden mathematischen Axiome als „wahr“ und „richtig“ verifiziert werden kann. Der Wahrheitsgehalt, der das Wissen von einer gewöhnlichen Auffassung oder Überzeugung unterscheidet, kann somit nur inner-mathematisch begründet werden. Da mathematisches Wissen strenggenommen kein mathematisches Verständnis voraussetzt (beispielsweise kann der Schüler wissen, dass die Wurzel aus neun drei ist, ohne die Wurzelfunktion zu verstehen) kann mathematisches Wissen auch nur durch gezieltes Fragen (beispielsweise: Wie lautet der Satz des Pythagoras?) überprüft werden. Zum Lösen von Standardaufgaben in einem Mathematikbuch wird häufig neben dem reinen Wissen auch ein gewisses Maß an Verständnis benötigt, um die jeweilige Aufgabe zu lösen. Dementsprechend gehen diese zumeist über eine reine Wissensabfrage/-überprüfung hinaus.

Tobias Dahm

Um zu charakterisieren, was unter mathematischem Wissen zu fassen ist, muss man sich zunächst mit der Definition des Wissensbegriffes auseinandersetzen. In der Literatur findet sich bis heute keine übergreifend anerkannte Definition von Wissen. Vielmehr findet man zahlreiche ähnlich gefasste Festlegungen, die, je nach Fachgebiet des Definierenden, leicht differieren. Eine für viele Jahrhunderte unbestrittene Definition des Wissen stammt von Platon. Nach der platonischen Wissensdefinition ist Wissen ein gerechtfertigter wahrer Glaube. Wissen muss demnach einerseits begründet sein, ansonsten ist es nur eine Vermutung. Zudem kann man nur das wissen, wovon man überzeugt ist, und was man für wahr hält.

Geht es allerdings um die Frage, was mathematisches Wissen ist, ist nicht das Wissen allgemein von Interesse, sondern das spezifische Fachwissen einer Person. Um als Fachwissen angesehen werden zu können, darf das mathematische Fachwissen nicht zum Alltagswissen gehören. Mathematisches Fachwissen kann auch nach der platonischen Wissensdefinition gefasst werden, da in der Mathematik eine These als wahr bezeichnet werden kann, wenn sie mittels Beweis auf bekannte Axiome zurückzuführen ist. Damit gilt sie zugleich als gerechtfertigt. Ebenfalls wird hierdurch der Charakter mathematischen Wissens als etwas Objektives, das immer gültig und wahr ist, deutlich.

Um beurteilen zu können, ob eine Schülerin oder ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt „weiß“, muss man berücksichtigen, dass in dem schulischen Kontext neben dem reinen (mathematischen) Wissen auch die Anwendung in Problemlösungssituationen von Bedeutung ist. Dazu sind wiederum zusätzlich eine gewisse kognitive Flexibilität, Motivation und der Wille, das Wissen zu nutzen, notwendig. Aus diesem Grund wird zur Überprüfung des „Unterrichtserfolges“ häufig auf den Kompetenz- an Stelle des Wissensbegriffs rekurriert. Um die Kompetenz von Schülern zu testen, sind unterschiedliche Test verfügbar. Bei diesen wird die Kompetenz der Schülerinnen und Schüler bspw. hinsichtlich einzelner Stufen abgefragt, wobei es dabei dann neben dem einfachen Anwenden von Regeln und Basiswissen auch um die Fähigkeit des Begründens und Argumentierens geht. Gerade hinsichtlich des Begründens und Argumentierens zeigt sich auch diesbezüglich wieder der Zusammenhang mit der platonischen Wissensdefinition: Wenn ein Schüler etwas nicht beweisen kann, kann er es nur glauben, aber nicht wirklich wissen, da ihm dazu die Rechtfertigung fehlt.

Ina Freyaldenhoven

Mathematisches Wissen bezüglich eines Sachverhaltes zu haben, heißt nicht nur reines Faktenwissen ("Die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180° "), sondern auch eine Antwort auf die Frage nach dem Warum, eine Art Begründung/Beweis(-idee) zu haben. Erst dadurch gewinnt dieses Wissen an Bedeutung und kann durch Überzeugen des Gegenübers kommuniziert werden. Schüler auf ihr Verständnis zu prüfen, das über Faktenwissen hinausgeht ist schwierig, da man selbst einen Beweis/Beweisidee auswendig lernen kann, ohne diesen zu "verstehen". Am ehesten sind hier wohl Aufgaben geeignet, bei denen die Schüler ihr Wissen auch auf andere Gebiete transferieren müssen.

Jan Friedrichs

Mathematisches Wissen ist nicht nur das auswendig lernen von Lösungswegen, sondern das tiefe Verständnis für die Vorgänge und Prozesse hinter Definitionen und Formeln. Der Schüler kann vor allem dadurch getestet werden, dass er Transfer-Aufgaben gestellt bekommt. Also Aufgaben bei denen er das Wissen und das Verständnis mehrerer Themen verbinden muss um zur Lösung zu kommen.

Sehr interessant und ausschlaggebend ist hierbei seine Vorgehensweise und damit auch sein 'wahres' Verständnis für die Mathematik.

Justus Graessner

Einen mathematischen Sachverhalt zu wissen bedeutet seine Definition zu kennen, aber vor allem sich mit ihm auseinandergesetzt zu haben. Unvermeidlich ist außerdem, dass man den Sachverhalt nicht nur theoretisch verstanden hat, sondern auch praktisch anwenden können muss. Es genügt also nicht die Theorie verinnerlicht zu haben, sondern man muss diese auch in anderen Kontexten wieder finden und dort anwenden können.

Um zu beurteilen, ob ein Schüler oder eine Schülerin einen gewissen mathematischen Sachverhalt „weiß“, ist es also nötig sowohl die Theorie abzufragen als auch die Praxis. Dabei ist vor allem die Umsetzung des Theoretischen (beispielsweise einer einfachen Formel) in Anwendungsaufgaben zu beobachten. Hier stellt man leicht fest, ob der Schüler beziehungsweise die Schülerin den

mathematischen Sachverhalt verstanden hat und sein/ ihr mathematisches Wissen in verschiedenen Aufgaben und Kontexten anwenden kann.

F.H.

Wissen allgemein besteht aus Fakten, Theorien und Regeln, baut sich durch Interaktion mit der Umwelt auf und wird im Gehirn jedes Menschen geordnet und gespeichert. Wissen ist also das Ergebnis eines Lernprozesses, wobei man sich jedoch auch falsche oder unvollständige Sachverhalte aneignen kann. Bezogen auf die Mathematik bedeutet Wissen also das Aneignen von mathematischen Theorien und Zusammenhängen, welche sowohl wiedergegeben als auch angewandt werden können. Mathematisches Wissen kann angeeignet werden durch das Lesen von Büchern, das Bearbeiten von Aufgaben oder das Interagieren mit Mitmenschen, wobei diese Faktoren sich in einigen Aspekten voneinander unterscheiden. Häufig ist der Grad und die Menge des angeeigneten Wissens am höchstens, wenn alle diese Faktoren zusammenspielen. Das Wissen eines mathematischen Sachverhaltes lässt sich zwar teilweise, aber nie vollständig durch anwendungsbezogene Aufgaben überprüfen. Das liegt daran, dass das Abrufen von Wissen immer auch mit dem situativen Kontext zusammen hängt. Beispielsweise lässt sich mathematisches Wissen in einer Prüfungssituation nicht unbedingt abrufen, obwohl es vorhanden ist. Ob jemand einen mathematischen Sachverhalt wirklich weiß, kann man also oft gar nicht oder nur ansatzweise überprüfen.

M.H.

Der Begriff Wissen beinhaltet verschiedene Dimensionen und ist nicht eindeutig definierbar.

Wissen gilt als Grundlage reflektierter Handlungsfähigkeit, dem Treffen von nicht-instinkt geleiteten Entscheidungen, dem Denken und Problemlösen.

Bezogen auf mathematisches Wissen bedeutet das, mathematische Sachverhalte zu kennen und auf Basis dieser Handlungs,- und Entscheidungsfähig zu sein, Probleme anhand bekannter Phänomene zu lösen, Sachverhalte weiter zu denken und auf andere Ebenen zu übertragen.

Das (mathematische) Wissen über z.B. einen Sachverhalt, beeinflusst das Denken und Handeln der jeweiligen Person.

Wissen ist schwer messbar, da es nie isoliert betrachtet werden kann. Es lässt sich nur in Verbindung mit weiteren Faktoren überprüfen. Daraus folgt, dass eine Überprüfung nicht immer den eigentlichen Wert des Wissens repräsentieren kann (z.B. durch Zeitdruck in Prüfungen).

Ein möglicher Indikator für den Wissensstand eines Schülers, ist die Weitergabe seines Wissens.

Weiß ein Schüler mathematische Zusammenhänge, so kann er diese einer Person, die den Sachverhalt noch nicht weiß/ kennt erklären und eventuelle Rückfragen beantworten.

Zudem zeigt die Anwendung des gelernten Sachverhalts auf verschiedenen Ebenen, inwieweit ein Schüler diesen „weiß“.

Joana Haardt

Man kann einen mathematischen Sachverhalt auf verschiedenen Ebenen Wissen. Zunächst kann man einen Satz, eine Folgerung, einen Algorithmus, einen Lösungsweg, usw. hinnehmen, auswendig lernen und auch in der Lage sein ihn anzuwenden. Allerdings ist man dann mit schon der geringsten Abweichung überfordert

und ist nicht mehr in der Lage darauf als Basis weiter aufzubauen, oder mit anderen Worten, man kennt ihn zwar, versteht ihn aber nicht. Auf dieser Ebene einen Sachverhalt zu wissen ist alles andere als ausreichend, wenn man über das stupide Auswendiglernen und Anwenden (wie man es aus der Schule kennt) hinauszugehen gedenkt.

Damit kommen wir zur nächsten Ebene. Hier ist einem nicht nur der Sachverhalt an sich bekannt, sondern auch die hinführenden Sachverhalte; d.h. Definitionen, Sätze, Axiome, usw. aus denen der Sachverhalt resultiert.

Oder abgekürzt: man kennt und versteht den Sachverhalt.

Dadurch sollten man in der Lage sein, den Sachverhalt aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten und damit auf andere Sachverhalte auszuweiten um sich neue Sätze, Folgerungen, Lösungswege, usw. anzueignen.

Das ist dann die dritte und höchste Ebene, bei der man nicht nur die hinführenden Sachverhalte kennt, sondern auch diejenigen, aus denen diese Sachverhalte resultieren.

Anders ausgedrückt: Man versteht den Sachverhalt und die Sachverhalte aus denen er resultiert. Diese Ebene sollte stets anzustreben sein, da mathematische Sachverhalte in der Regel aufeinander aufbauen und man sonst auch gar nicht in der Lage wäre von seinen gewonnenen Erkenntnissen zu profitieren.

Man erkennt schnell, ob jemand diese Ebene erreicht hat, in dem er den Sachverhalt erläutern und relativ problemlos auf Bekanntes sowie Unbekanntes anwenden kann.

Letzteres kennt man aus der Schule vielleicht als Anwendungsbereich 3.

Jonathan Kurz

Als Wissen bezeichnet man in der Regel eine Gesamtheit an Kenntnissen und Fähigkeiten, die einer Person zur Verfügung steht. Bezogen auf mathematisches Wissen, handelt es sich vor allem um mathematische Sachverhalte, Theorien oder Regeln deren Gültigkeit oder Wahrheit vorausgesetzt wird. Dieses Wissen wird von Menschen im Allgemeinen zur Lösung von Problemen angewendet, also hier hauptsächlich zur Lösung von mathematischen Problemen. Wie hoch der Grad an mathematischem Wissen einer Person ist hängt ab von vielen verschiedenen Faktoren, wie z.B. Alter oder Bildung. Man kann einer Person jedoch nicht durch Äußerlichkeiten ansehen, ob diese ein großes mathematisches Wissen hat. Um beurteilen zu können, ob dies der Fall ist, könnte man dieser Person verschiedene mathematische Probleme stellen. Je schwierigere Probleme diese Person lösen kann, desto größer ist das mathematische Wissen.

Marie Leuwen

Wenn es um „mathematisches Wissen“ geht, sollte unterschieden werden zwischen „einen mathematischen Sachverhalt KENNEN“ und einen mathematischen Sachverhalt „VERSTEHEN“. Der Umstand des „Wissens“ sollte eher dem Verstehen zugeordnet werden können. Wichtige Sätze oder Sachverhalte können einem Schüler bekannt sein, jedoch „weiß“ er sie erst, wenn er sie verstanden hat, da beispielsweise nur das Kennen des Satzes des Pythagoras noch kein mathematisches Wissen bedeutet, wenn dieser nicht auch verstanden wurde und folglich wieder erklärt und angewendet werden kann.

So kann man das „wissen“ eines Sachverhaltes, also das Verständnis, prüfen, indem man überprüft ob der Schüler das Wissen anwenden kann. Kann er das gelernte, beispielsweise den Satz des Pythagoras sowohl in eigenen Worten einem Dritten erklären, welcher noch nicht Bescheid weiß, als auch auf verschiedenste Sachverhalte anwenden, dann kann davon ausgegangen werden, dass er diesen Satz wirklich beherrscht. Wird jedoch nur die Anwendung überprüft, ist es möglich, dass Schüler in ihrem Kopf einen Algorithmus abarbeiten, jedoch nicht wissen, wieso sie es überhaupt tun.

Filiz Livan

Mathematisches Wissen bedeutet die Fähigkeit einen mathematischen Sachverhalt oder Schluss verstanden zu haben und so selbst wiederholen, anwenden und anderen erklären zu können. Zu beurteilen, ob ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt wirklich weiß ist schwierig. Das liegt daran, dass man viele Anwendungen zwar wie häufig in der Schule praktiziert, über verschiedene Aufgaben Typen überprüfen kann, es sich dabei aber meist nur um die Abfrage auswendig gelernte Schemas handelt. Daher ist es die beste Möglichkeit mathematisches Wissen zu beurteilen, indem man den Schüler dabei beobachtet, wie er das Wissen einem anderen Schüler in eigenen Worten erklärt.

L.M.

Um mathematisches Wissen zu erlangen müssen Axiome der Mathematik verstanden und richtig verknüpft werden. So können mit Hilfe eines Schemas verschiedene Aufgaben gelöst werden. Ich denke, dass ein Schüler einen Sachverhalt weiß beziehungsweise verstanden hat, wenn er diesen wiedergeben kann und einer dritten Person auch erklären kann. Allerdings ist außerdem wichtig für das Verstehen eines Sachverhaltes, dass nicht nur ein Beispiel gelöst werden kann, nachdem man die Lösung gehört hat (Reproduzieren). Viel mehr soll dieses Schema auch auf andere Aufgaben des gleichen Typs angewendet werden können. Am besten überprüfen kann man letzteres durch mehrere unterschiedliche Übungsaufgaben oder Textaufgaben, für welche alle der gleiche Sachverhalt als Schwerpunkt gelegt werden sollte. Ein Schüler der einen Sachverhalt verstanden hat, sollte die verschiedenen Aufgaben lösen können und einem weiteren Schüler näher erklären können.

Christopher Mai

Mathematisches Wissen charakterisiert den Wissenstand in verschiedenen Teilbereichen der Mathematik. Es ist allerdings nicht eindeutig, wie tief man eine Sache verstanden haben muss, um von Wissen zu sprechen.

Einen mathematischen Sachverhalt zu wissen bedeutet, dass auf gezielte Fragen dieses Wissen wiedergegeben werden kann. Dies bedeutet nicht, dass dieses Wissen auch verstanden wurde.

Dies kann man beurteilen, indem Frage- und Aufgabenstellungen in diese Richtung formuliert werden. Werden diese im richtigen Kontext beantwortet, so kann man von Wissen sprechen, können diese bis in die Tiefe erklärt werden, so von Verstehen.

Julian Plack

„Mathematisches Wissen“ ist nicht leicht zu charakterisieren, da es sehr facettenreich ist. So gibt es sowohl das theoretische Wissen als auch das praktische Anwenden seines theoretischen Wissens. So kann ein Schüler sehr gut im theoretischen Wissen sein, aber leider dieses dann in der Praxis im Leben nicht langfristig und passend anwenden.

Einen mathematischen Sachverhalt zu wissen, heißt daher für mich, dass man sich selbst sicher ist, was ein bestimmter Satz aussagt, sodass ich diesen direkt auch im richtigen Leben anwenden kann. Dabei fällt mir der Satz des Pythagoras ein, durch welchen ich bspw. schnell die fehlenden Seitenlängen ohne großes Messen bestimmen kann oder ebenso schnell einen 90° Winkel erzeugen kann (mittels Seitenlängen 3, 4 und 5) (z.B. im „Hobby-,Handwerk“).

Bei meinen künftigen Schülern würde ich zuerst ausprobieren, ob diese das/ den mathematische Modell/ Satz verstanden haben, indem ich ihnen Fragen dazu stelle bzw. Aufgaben zum Rechnen gebe. In der Realität wird es natürlich schwierig auch in der Praxis bei meinen Schülern zu kontrollieren, ob die Inhalte alle zweifelsfrei angewendet werden können. Daher würde ich sagen, dass man eigentlich nur mittels des theoretischen mathematischen Wissens beurteilen kann, ob ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt „weiß“. Letztendlich muss jeder Lehrer selber ein Gespür dafür haben/ entwickeln, die Leistungsstände seiner Schüler beurteilen zu können.

F.S.

Einen mathematischen Sachverhalt zu wissen - repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern bedeutet, ihn als Modell verstehen, anwenden und weiterentwickeln. Wenn die Schüler über die Kompetenzen wie

- das mathematische Argumentieren,
- das mathematische Lösen von Problemen,
- das mathematische Modellieren,
- das Verwenden mathematischer Darstellungen und Bezeichnungen,
- der Umgang mit symbolischen Elementen

verfügen, die Ergebnis und Voraussetzung zugleich für die Auseinandersetzung mit mathematischen Aspekten sind, dann `weiß` der Schüler einen Sachverhalt.

O.S.

Der Duden definiert Wissen als die "Gesamtheit der Kenntnisse, die jemand [auf einem bestimmten Gebiet] hat" und setzt Wissen mit Kenntnis gleich. Bezogen auf die Mathematik beinhaltet dies bspw. das Wissen von mathematischen Axiomen oder Sätzen, sowie die Kenntnis von deren Beweisstruktur. Aber auch Anwendungen wie das Rechnen oder Skizzieren in der Geometrie. Auch mathematikgeschichtliche Kenntnis zählt dazu.

Wissen über einen bestimmten Sachverhalt hat jeder, der Kenntnisse in diesem Bereich hat. Selbst, wenn sich diese auf das bloße Rezitieren der mathematischen Sätze beschränken, hat dieser ein Wissen darüber. Desto größer das Wissen über den Sachverhalt ist, desto größer wird auch das Verständnis. Optimal besteht das Wissen demnach aus vielen Facetten des Sachverhalts: Vom Wissen der Sätze über das Verstehen des Beweises hin zur mathematischen Anwendung.

Durch schriftliche Überprüfungen, mündliche Fragen, angewandte Problemsituationen und offene Klassengespräche lässt sich das Wissen zu einem gewissen Teil ergründen. Dabei fallen die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler unterschiedlich aus. Die einen kommen kaum über das

Rezitieren hinaus, andere wiederum schaffen es, das Wissen auf andere Bereiche zu abstrahieren oder anzuwenden. Wieder andere kennen die Lösungsidee einer Rechenaufgabe und können diese gut umsetzen. Alle diese Bereiche sind Teil des Wissens und müssen durch unterschiedliche Situationen erfragt werden, bis die Lehrkraft einen ausreichenden Einblick in das Wissen der Schülerinnen und Schüler hat.

Es kommt auf die richtige Umgebung an, die den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, optimal Wissen untereinander auszutauschen und somit preiszugeben.

Pascal Schäfer

Einen mathematischen Sachverhalt zu wissen bedeutet, die Information nicht nur aufgenommen zu haben und exakt wiedergeben zu können, sondern diese auch verstanden, auf andere Fragestellungen zu übertragen und modifizieren zu können.

Dazu gehört auch die entsprechenden Fachbegriffe und Symbole zu verwenden und den Sachverhalt, sofern möglich, mit einer geeigneten Darstellung zu veranschaulichen.

Mathematische Beweise sind meines Erachtens nach die Grundlage, um einen Sachverhalt zu verstehen. Beispielsweise gibt es in der Geometrie gute Möglichkeiten, dass die Schüler sich den neuen Sachverhalt durch einen enaktiven Beweis selbst erarbeiten. Dieses Wissen kann im Anschluss formal verfasst und somit präzisiert bzw. verallgemeinert werden.

Eine Möglichkeit zur Überprüfung, ob ein Schüler den Sachverhalt wirklich weiß, ist die Verwendung von Aufgaben, die so verändert wurden, dass der gezeigte Sachverhalt erst modifiziert werden muss, um angewendet werden zu können oder aber zwei gelernte Sachverhalte miteinander verknüpft werden müssen, um die Lösung zu erhalten.

Eine weitere Möglichkeit ist die Analyse und Interpretation einer Aufgabe mit vorgegebener Lösung. Hierbei müssen die Schüler ggf. von ihrer eigenen Standardlösungsstrategie abweichen, um die vorgegebene Lösung bzw. den vorgegebenen Lösungsweg zu erhalten.

Mittels Argumentieren können im Anschluss folgende Fragen erörtert werden:

- Ist meine Vorgehensweise wirklich effektiv und präzise?
- Ist der vorgegebene Lösungsweg eine sinnvolle Alternative?
- Warum hat der Verfasser diesen Lösungsweg gewählt?
- Was könnte an dem vorgegebenen Lösungsweg ggf. verbessert und präzisiert werden?

Eva Schlaak

Ich unterscheide mathematisches Wissen in zwei Teilgebiete. Dies ist zum einen das mathematische Wissen der Welt. Gemeint sind alle Inhalte, die der Mathematik zugeordnet werden können und im Laufe der menschlichen Geschichte entdeckt und entwickelt wurden. Dazu gehören Inhalte wie Definitionen, Sätze und Beweise aber auch das Wissen über Verknüpfungen zwischen den uns bekannten Teilbereichen der Mathematik.

Ebenso existiert auch das mathematische Wissen des Einzelnen. Dieses Wissen ist dadurch charakterisiert, dass ein Individuum mathematische Inhalte aus dem Gedächtnis abrufen und wiedergeben kann. Je nachdem wie viele Inhalte aus den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik abgerufen werden können, desto größer ist das mathematische Wissen des Einzelnen.

Mathematisches Wissen unterscheidet sich von mathematischem Verständnis. Während Ersteres sich auf die reine Abspeicherung und Wiedergabe von Inhalten beschränkt, bezeichnet der zweite Ausdruck die Anwendung dieser Inhalte in unterschiedlichen Kontexten. Durch

diese Unterscheidung lässt sich das mathematische Wissen eines Schülers über eine Abfrage der Inhalte beurteilen. Zum Beispiel: „Was besagt der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung?“.

Simon Schneider

Die Frage die sich stellt ist folgende, wie kann man kontrollieren ob ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt verstanden hat, also weiß. Ich denke wenn der zu kontrollierende Schüler den Sachverhalt einem dritten weiter geben kann, und erklären kann, weiß er das Wissen. Wichtig ist ebenfalls, dass das neu gewonnene Wissen nicht nur an Schema-aufgaben probiert und angewendet wird, sondern auch an Problemlöse-aufgaben. Denn dann wird deutlich, ob der Schüler das mathematische Wissen verstanden hat.

Till Schneider

Was ist „mathematisches Wissen“? Für mich persönlich ist das eine sehr schwere Frage. Zuerst einmal was ist überhaupt „Wissen“? Nach einem Wörterbuch ist das Wissen als Substantiv, Kenntnisse über einen Sachverhalt zu haben, oder sich an etwas zu erinnern. Wenn Wissen so definiert wird, dann ist mathematisches Wissen genau das. Man hat Kenntnisse darüber wie man, zum Beispiel den Flächeninhalt von einem Rechteck berechnet und rechnet dann nach diesem Schema den Flächeninhalt aus. Als Grundlage dafür gibt es Axiome, Definitionen oder Sätze, an denen man sich orientieren kann. Allerdings ist das meiner Meinung nach nicht ganz korrekt, nur weil jemand auswendig gelernt hat, wie man etwas berechnet, bedeutet das nicht, dass derjenige es auch wirklich verstanden hat. Für mich ist mathematisches Wissen nicht nur, dass man weiß, wie man etwas berechnet, sondern auch dass man es verstanden und verinnerlicht hat.

Letztes Jahr bevor ich mein Eignungs- und Orientierungspraktikum gemacht habe, habe ich mich genau mit dem Thema ein wenig beschäftigt. Dabei bin ich im Internet auf einen Artikel von 2014 gestoßen. Dieser Artikel hatte die Überschrift „Wie prüft man jemanden, ob er versteht?“. Ein Protokollant an einer Universität hatte diesen Artikel verfasst. Bei den mündlichen Prüfungen bei einem Dozenten wurden vorher immer Listen von den Studenten eingereicht, auf denen Fragen standen, die der Dozent stellen konnte, aus diesem Grund wurde dann immer nur das von den Studenten auswendig gelernt, was auf den Listen stand. Die erste Frage des Dozenten war immer „Was ist stetig?“, darauf antworteten alle Studenten gleich, da sie dies auswendig gelernt haben. Allerdings konnten die meisten nicht antworten, wenn es um eine Verständnisfrage ging (Warum oder wann hängt das Epsilon von dem x ab?). Dadurch merkte der Dozent, dass die meisten Studenten schon das Einfachste nicht verstanden hatten.

Durch diesen Artikel, finde ich kann man gut erkennen, was mathematisches Wissen ist. Natürlich ist es wichtig die Axiome und Definitionen zu kennen, aber man sollte sie auch verstehen und nicht nur wieder geben können. Nur weil jemand etwas auswendig gelernt hat, bedeutet das nicht, dass er es auch weiß.

Meiner Meinung nach kann man bei Schülerinnen und Schülern (SuS) nicht wirklich erkennen, ob sie einen mathematischen Sachverhalt wissen. Denn selbst wenn sie die Formel für etwas auswendig gelernt haben, bedeutet das nicht, dass sie es auch verstanden haben, und da das Verstehen zum Wissen gehört, kann man meiner Meinung nach nur sehr schwer erkennen, ob die SuS es wissen.

J.T.

"Eine Person „weiß“ oder ist hinreichend gut über einen mathematischen Sachverhalt informiert, wenn diese ihn einer anderen Person ausführlich in eigenen Worten und ggf. mit verschiedenen dazu passenden/geeigneten Beispielen erklären kann.

Das mathematische Wissen eines Schülers ist meiner Meinung nach nur schwer genau einzustufen. Je mehr verschiedene Aufgaben der Schüler in bezüglich eines mathematischen Sachverhalts lösen kann, desto wahrscheinlicher ist es, dass er gut über diesen informiert ist."

Halil Turan

Mathematisches Wissen beinhaltet das Wissen über bestehende mathematische Sachverhalte (Definitionen, Aussagen in Form von Sätzen, etc.) und wie mithilfe der Logik neue mathematische Sachverhalte erschlossen werden können. Ein mathematischer Sachverhalt besteht hierbei neben der reinen Aussage zu mathematischen Objekten auch aus sämtlichen dazugehörigen Voraussetzungen und Annahmen für deren Gültigkeit. Das Wissen um die Voraussetzungen umschließt das Wissen über die Bedeutung der verwendeten mathematischen Objekte und anderen vorkommenden mathematischen Ausdrücken (Variablen, Operatoren, etc.). Ein mathematischer Beweis bzw. das Nachvollziehen eines Beweises an sich können ebenso als ein Teil des mathematischen Wissens betrachtet werden.

Um zu beurteilen, ob ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt weiß, kann beobachtet werden, ob dieser Schüler in der Lage ist, anderen Mitschülern den mathematischen Sachverhalt schlüssig und in eigenen Worten zu erklären. Alternativ bietet es sich an, verschiedene Aufgabentypen mit unterschiedlich komplexen Beispielen vom Schüler lösen zu lassen, wobei, wenn möglich, insbesondere Sonderfälle vorkommen sollten, um ein schematisches Lösen zumindest in einem gewissen Rahmen ausschließen zu können.

J.V.

Wissen, so schreibt Liessmann in seiner *Theorie der Unbildung*, sei mit Bedeutung versehene Information, wobei Information ein Unterschied sei, der irgendwann auch einen Unterschied macht. Wie schnell einsichtig ist, kann diese Definition nicht greifen, da hier die Bedeutung schwer bis nicht zu fassen ist. Ein Satz, eine Erkenntnis oder Definition werden nicht wegen ihrer Bedeutung gesetzt oder bewiesen, sondern wegen ihrer logischen Notwendigkeit um das weitere Füllen des Systems der Logik voranzutreiben. Wenn es eine Bedeutung gäbe dann die um ihrer selbst willen. Sicherlich kann man in mind. zwei Kategorien unterscheiden. Als erstes sei hier das Wissen um die Systematik und der Methoden der Mathematik festgehalten. Als wichtiges Kriterium sei hier das widerspruchsfreie Konstruieren einer Definition und die gegebene Form des Logischen Schlusses genannt. Das diese beweisbar sind ist sicherlich unwahrscheinlich, zumindest gemessen an Leistungen wie der Bertrand Russels. Die zweite Kategorie ist das Wissen über die Geschichte der Mathematik und bereits definierte Bereiche. So ist mit dem Wissen um das logischen Schließen sicherlich der Begriff Differenzierbarkeit herleitbar, allerdings ist das *Abrufenkönnen* dieser Definition als solches auch eine Art Wissen.

Die Prüfung dieser Kategorien ist verhältnismäßig einfach. Man gibt Definitionen vor und gibt einen Satz vor den es zu beweisen gilt. Ist die Ausführung des Prüflings lückenlos, so gilt die Methode des Schließens als gesichert. Auch das Fehlerfinden in falschen Beweisen lässt diese

Fähigkeit vermuten. Bei der zweiten Kategorie eignen sich eher reine Abfragen der Definitionen, ähnlich dem eines Vokabeltestes.

Die Königsdisziplin, die Anwesenheit beider Arten dieses Wissen, gestaltet sich in der Überprüfung schwieriger. Wenn eine Abstraktion eines Sachinhaltes alle Facetten enthält, ich aber in einem endlichen Leben nur endliche Fragen stellen kann, wie soll ich die Fragen wählen? Stelle ich eine Textaufgabe zur Optimierung, weiß ich nicht ob der Prüfling nun genau *diese* Aufgabe beantworten konnte oder alle dieser Art. Auch weiß ich nichts über das Wissen über den Zusammenhang zu anderen Sachinhalten. Ich weiß der Prüfling kann lesen und er kann genau diese Aufgabe lösen.

Wenn wir annehmen, ein mathematikwissendes Wesen erkennt ein anderes, so könnten wir induktiv davon ausgehen, die Prüfung kann durch solche Personen durchgeführt werden. Aber um die hinreichende Beschreibung dieser Befähigung kämen wir um des Induktionsanfangs willen nicht herum.

Lovis Wagner

Die Kenntnis über mathematisches Wissen sagt aus, sich über die Axiome, Definition und Herleitungen der Mathematik bewusst zu sein und dessen Sachverhalte sowohl anzuwenden als auch konkret und verständlich wiederzugeben. Im Kontakt mit Schülern ist der erste und wichtigste Schritt die Kommunikation und Interaktion, welcher sich bereits im Unterricht stattfindet. Allerdings zeigt es sich erst in Prüfungen und Klausuren, ob ein Schüler einen mathematischen Sachverhalt weiß.

Martin Wrobel