EUKLID

DIE ELEMENTE

BUCH I–XIII

HERAUSGEGEBEN
UND INS DEUTSCHE ÜBERSETZT VON
CLEMENS THAER

1962
WISSENSCHAFTLICHE BUCHGESELLSCHAFT
DARMSTADT

I. Buch.

Definitionen.

1. *Ein* ***Punkt*** *ist, was keine Teile hat,*

2. *Eine* ***Linie*** *breitenlose Länge.*

3. *Die Enden einer Linie sind Punkte.*

4. *Eine* ***gerade Linie (Strecke)*** *ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.*

5. *Eine* ***Fläche*** *ist, was nur Länge und Breite hat.*

6. *Die Enden einer Fläche sind Linien.*

7. *Eine* ***ebene*** *Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.*

8. *Ein ebener* ***Winkel*** *ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.*

9. *Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel* ***geradlinig.***

10. *Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein* ***Rechter****;*

und die stehende gerade Linie heißt ***senkrecht*** *zu* ***(Lot*** *auf) der, auf der sie steht.*

11. ***Stumpf*** *ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,*

12. ***Spitz****, wenn kleiner als ein Rechter.*

13. *Eine* ***Grenze*** *ist das, worin etwas endigt.*

14. *Eine* ***Figur*** *ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.*

15. *Ein* ***Kreis*** *ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die* ***Umfang (Bogen)*** *heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;*

16. *Und* ***Mittelpunkt*** *des Kreises heißt dieser Punkt.*

17. *Ein* ***Durchmesser*** *des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke;*

eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

18. *Ein* ***Halbkreis*** *ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur;*

[*und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise*].

19. (20—23) ***Geradlinige Figuren*** *sind solche, die von Strecken umfaßt werden,*

dreiseitige *die von drei,*

vierseitige *die von vier,*

vielseitige *die von mehr als vier Strecken umfaßten.*

20. (24—26) *Von den dreiseitigen Figuren ist ein* ***gleichseitiges Dreieck*** *jede mit drei gleichen Seiten,*

ein ***gleichschenkliges*** *jede mit nur zwei gleichen Seiten,*

ein ***schiefes*** *jede mit drei ungleichen Seiten.*

21. (27—29) *Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein* ***rechtwinkliges*** *Dreieck jede mit einem rechten Winkel,*

ein ***stumpfwinkliges*** *jede mit einem stumpfen Winkel,*

ein ***spitzwinkliges*** *jede mit drei spitzen Winkeln.*

22. (30—34) *Von den vierseitigen Figuren ist ein* ***Quadrat*** *jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist,*

ein ***längliches Rechteck*** *jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist,*

ein ***Rhombus*** *jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,*

ein ***Rhomboid*** *jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;*

die übrigen vierseitigen Figuren sollen ***Trapeze*** *heißen.*

23. (35) ***Parallel*** *sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.*

Postulate.

Gefordert soll sein:

1. *Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,*
2. *Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,*
3. *Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,*

4. (Ax. 10) *Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,*

5. (Ax. 11) *Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.*

Axiome.

1. *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*
2. *Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.*
3. *Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.*
4. [*Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.*]
5. (6) [*Die Doppelten von demselben sind einander gleich.*]
6. (7) [*Die Halben von demselben sind einander gleich.*]
7. (8) *Was einander deckt, ist einander gleich.*
8. (9) *Das Ganze ist größer als der Teil.*
9. (12) [*Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.*]

§ 1 (A. 1).

Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

Die gegebene Strecke sei $A B$. Man soll über der Strecke $A B$ ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Mit A als Mittelpunkt und $A B$ als Abstand zeichne man den Kreis $B C D$ (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und $B A$ als Abstand den Kreis $A C E$; ferner ziehe man vom Punkte C, in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken $C A$, $C B$ (Post. 1).

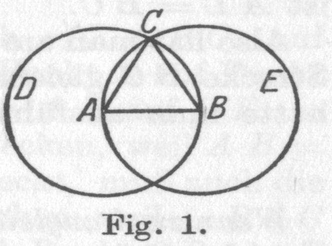

Fig. 1.

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises $C D B$ ist, ist $A C = A B$ (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises $C A E$ ist, $B C = B A$. Wie oben bewiesen, ist auch $C A = A B$; also sind $C A$

Man lege am Punkte A eine Strecke $AD = c$ hin (I, 2) und zeichne mit A als Mittelpunkt und AD als Abstand den Kreis DEF.

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises DEF ist, ist $AE = AD$; aber auch $c = AD$. Also sind AE, c beide $= AD$; folglich ist auch $AE = c$.

Also hat man, während zwei ungleiche Strecken AB, c gegeben waren, auf AB, der größeren, eine c, der kleineren, gleiche abgetragen, nämlich AE — dies hatte man ausführen sollen.

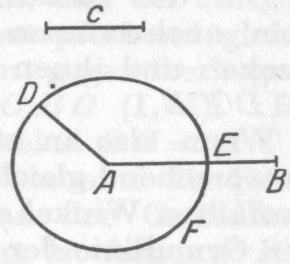

Fig. 3.

§ 4 (L. 1).

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten AB, AC zwei Seiten DE, DF entsprechend gleich sind, nämlich $AB = DE$ und $AC = DF$, ferner $\angle\ BAC = \angle\ EDF$. Ich behaupte, daß auch Grdl. $BC =$ Grdl. EF, ferner $\triangle\ ABC = \triangle\ DEF$ und die übrigen Winkel den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein müssen, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $ABC = DEF$ und $ACB = DFE$.

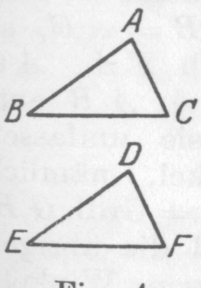

Fig. 4.

Deckt man nämlich $\triangle\ ABC$ auf $\triangle DEF$ und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muß auch Punkt B E decken, weil $AB = DE$; da so AB DE deckt, muß auch die gerade Linie AC DF decken, weil $\angle BAC = EDF$; daher muß auch Punkt C Punkt F decken, weil gleichfalls $AC = DF$. B deckte aber E; folglich muß die Grundlinie BC die Grundlinie EF decken [denn würde, während B E und C F deckt, die Grundlinie $B\,C$ $E\,F$ nicht decken, so würden zwei Strecken einen Flächenraum umfassen; das ist aber unmöglich (Ax. 9). Also muß die Grundlinie $B\,C$ $E\,F$ decken] und ihr gleich sein (Ax. 7); folglich muß auch das ganze Dreieck $A\,B\,C$ das ganze Dreieck $D\,E\,F$ decken und ihm gleich sein, auch müssen die übrigen Winkel die übrigen Winkel decken und ihnen gleich sein, $A\,B\,C = D\,E\,F$ und $A\,C\,B = D\,F\,E$.

Wenn also in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Winkel gegenüberliegen — dies hatte man beweisen sollen.

§ 5 (L. 2).

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein.

$A\,B\,C$ sei ein gleichschenkliges Dreieck (I, Def. 20) mit den Seiten $A\,B = A\,C$, auch seien $A\,B$, $A\,C$ um die geraden Linien $B\,D$, $C\,E$ verlängert. Ich behaupte, daß $\angle\ A\,B\,C = A\,C\,B$ und $C\,B\,D = B\,C\,E$.

Man wähle nämlich auf $B\,D$ Punkt F beliebig, trage auf $A\,E$, der längeren Strecke, $A\,G = A\,F$, der kürzeren, ab (I, 3) und ziehe die Strecken $F\,C$, $G\,B$.

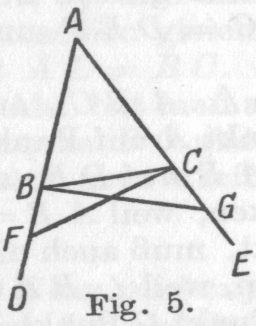

Fig. 5.

Da $A\,F = A\,G$ und $A\,B = A\,C$, so sind zwei Seiten, nämlich $F\,A$, $A\,C$ zwei Seiten, nämlich $G\,A$, $A\,B$ entsprechend gleich, und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel, nämlich $F\,A\,G$; also ist Grdl. $F\,C$ = Grdl. $G\,B$, $\triangle\ A\,F\,C = \triangle\ A\,G\,B$, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, $A\,C\,F = A\,B\,G$ und $A\,F\,C = A\,G\,B$ (I, 4). Und da die ganzen Strecken $A\,F = A\,G$, sowie von ihnen die Teile $A\,B = A\,C$, so sind die

Reste $BF = CG$ (Ax. 3). Wie oben bewiesen, ist aber auch $FC = GB$; mithin sind zwei Seiten, BF, FC, zwei Seiten, CG, GB entsprechend gleich; auch ist $\angle BFC = \angle CGB$ und die Grundlinie BC ihnen gemeinsam; also muß auch $\triangle BFC = \triangle CGB$ sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen, also $\angle FBC = GCB$ und $BCF = CBG$ (I, 4). Da nun, wie oben bewiesen, die ganzen Winkel $ABG = ACF$ und von ihnen die Teile $CBG = BCF$, so sind die Restwinkel $ABC = ACB$; diese liegen an der Grundlinie des Dreiecks ABC. Wie oben bewiesen, ist ferner $FBC = GCB$; und diese liegen unter der Grundlinie — S.

§ 6 (L. 3).

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

ABC sei ein Dreieck mit $\angle ABC = \angle ACB$. Ich behaupte, daß auch Seite AB = Seite AC.

Wäre nämlich AB ungleich AC, so wäre von ihnen die eine größer; AB sei größer; dann trage man auf AB, der größeren Strecke, $DB = AC$, der kleineren, ab und ziehe DC.

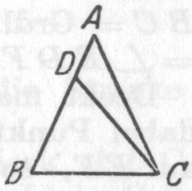

Fig. 6.

Da dann $DB = AC$ wäre und BC gemeinsam, so wären zwei Seiten, nämlich DB, BC, zwei Seiten, nämlich AC, CB, entsprechend gleich und $\angle DBC = \angle ACB$; also wäre Grdl. DC = Grdl. AB und $\triangle DBC = \triangle ACB$ (I, 4), das kleinere dem größeren (Ax. 8); dies wäre Unsinn; also kann AB nicht ungleich AC sein, ist ihm also gleich — S.

§ 7 (L. 4).

Es ist nicht möglich, über derselben Strecke zwei weitere Strecken, die zwei festen Strecken entsprechend gleich sind, an denselben Enden wie die ursprünglichen Strecken ansetzend, auf derselben Seite in verschiedenen Punkten zusammenzubringen.

Wäre dies nämlich möglich, so bringe man über derselben Strecke AB zwei den festen Strecken AC, CB entsprechend