Zufall

Annäherungen aus Mathematik und Informatik

Romseminar 2023

Version: 11. November 2023

Inhalt

Vorwort

> Was wir Zufall nennen, ist der
> Zufluchtsort der Unwissenheit.
>
> *(Baruch de Spinoza (1632–1677))*

Im Romseminar 2023 haben wir versucht, einem schillernden Begriff auf die Schliche zu kommen: dem Zufall. »Zufällige Ereignisse« treten innerhalb und außerhalb der Mathematik auf, doch was ist damit überhaupt gemeint? Soll die Rede vom Zufall nur unsere Unwissenheit kaschieren? Oder gibt es tatsächlich einen »objektiven Zufall«, etwa im Rahmen der Quantentheorie? Was müssen, was sollten, was dürfen wir »dem Zufall überlassen«? Und sind wir selbst, schicksalhaft, dem Zufall anheimgestellt, vielleicht sogar ausgeliefert?

Diese Fragen stecken nur grob das Feld ab, das wir im Romseminar betreten haben. Wie stets wurde der Blick über den engeren Bereich von Mathematik und Informatik hinaus geweitet; im Einzelnen ging es unter anderem um die folgenden Themen:

- Inwiefern wird der »unberechenbare« Zufall durch Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik »gezähmt«? Wie geht sie mit Extremereignissen um?

- Wie kam es historisch zur mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie und welche Folgen hat dies auf individuelle Lebensbedingungen und Gesellschaft?

- Wie ist der Umgang mit (mathematischen) Wahrscheinlichkeiten in einer didaktischen Perspektive?

- (Wie) kann man am Computer »zufällige Zahlen« erzeugen, Zufallsereignisse produzieren?

- Wie gehen andere Wissenschaften mit Zufällen, Störungen, Rauschen um? Welche Rolle spielt der Zufall etwa in der statistischen Mechanik, in Evolutionsbiologie, Psychologie und Neurowissenschaften?

- Gibt es überhaupt einen Zufall im philosophischen Sinne, sind Zufall und Determinismus unvereinbar oder nur zwei Seiten ein und derselben Medaille?
- Welche Zusammenhänge gibt es zwischen Zufall und Gerechtigkeit, wie geht etwa auch die Rechtsprechung (heute und in früheren Zeiten) mit Unsicherheiten um?
- Ist Zufall nur Fluch oder nicht auch Chance? Welche Rolle spielt der Zufall in der Kunst, welche gesellschaftliche Funktion haben (geplante) Zufallsereignisse, wie z.B. Glücksspiele oder Losverfahren?

Im Jahr 2023 wurde das vor mehr als einem Vierteljahrhundert in Tübingen begründete Romseminar bereits zum sechzehnten Mal in Kooperation der Hochschulen in Dresden, Siegen, Tübingen und Kiel veranstaltet. Nach den Erfahrungen der vergangenen Jahre war es ein großes Glück, dass das Romseminar im Jahr 2023 nahezu unbeeinträchtigt vom Infektionsgeschehen der abklingenden Pandemie und zu seinem 'traditionellen' Zeitpunkt Ende Februar stattfinden konnte. Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung des größten Teiles der in Rom gehaltenen Vorträge und repräsentiert so die Vielfalt der Themen.

In der Stadt Rom konnten wir wieder eine breite Palette Römischer Institutionen besuchen. Besonders faszinierend war in diesem Jahr ein erstmaliger Besuch im **Deutschen Archäologischen Institut**, dessen Direktor, Prof. Dr. Ortwin Dally, uns einen wunderbaren Einblick in die Aufgabenfelder der Archäologie gab, wobei sich insbesondere spannende Berühungspunkte mit der Informatik zeigten. Nachdem wir in der Mittagspause die gesamte Tagesproduktion einer Pizzeria al Taglio in der Nähe des DAI verspeist hatten, folgte am Nachmittag ein Empfang in der **Deutschen Botschaft beim Heiligen Stuhl**. Dabei schilderte uns der Deutsche Botschafter Dr. Bernhard Erhard Kotsch diverse Facetten der Vatikanischen Diplomatie. Wie schon so oft bei früheren Romseminaren hatte uns Monsignore Oliver Lahl den Zugang zur Botschaft ermöglicht, und er stand uns gemeinsam mit dem Botschafter in einer intensiven Diskussionsrunde zur Verfügung. Nach langer Zeit konnten wir schließlich wieder einmal die **Casa di Goethe** am *Corso* in unser Programm integrieren; nach einer facettenreichen und intensiven Führung durch Dr. Claudia Nordhoff durften wir die historische Bibliothek für unser Seminarprogramm nutzen.

Führungen zu den Ausgrabungen unterhalb der Petersbasilika und der – per Zufall in der Renaissance-Zeit wiederentdeckten – Domus Aurea des Kaisers Nero rundeten das Römische Besuchs-Programm ab.

So bot auch das 26. Romseminar ganz besondere Ein- und Ausblicke in der Ewigen Stadt. All denen, die uns mit ihrem persönlichen Engagement diese Höhepunkte unseres Programms ermöglicht haben, möchten wir auch an dieser Stelle unseren großen Dank aussprechen! Das Romseminar durfte auch im Jahr 2023 die bewährte Gastfreundschaft der traditionsreichen **Accademia Nazionale dei Lincei** genießen, sie war erneut unser zentraler Tagungsort. Hierfür sagen wir insbesondere dem Kanzler der Akademie, Dott. Angelo Cagnazzo, ein herzliches Dankeschön.

Ein herzlicher Dank gilt nicht zuletzt Michael Zimmermann für die unermüdliche Hilfe bei der Redaktion des Bandes.

Für die finanzielle Unterstützung danken wir der Helga und Martin Lowsky-Stiftung und dem Mathematischen Seminar der CAU (Kiel), dem DAAD, dem *International Office* sowie vielen Kollegen aus dem Departement Mathematik der Universität Siegen, dem Akademischen Auslandsamt und der Fakultät Informatik/Mathematik der HTW Dresden, dem Mathematischen Institut der Universität Tübingen, den Firmen d-fine und WTW sowie den Spendern unter den ehemaligen Teilnehmern des Romseminars.

Markus Haase	Sören Christensen	Universität Kiel
Michael Korey		Staatl. Kunstsammlungen Dresden
Rainer Nagel	Stefan Teufel	Universität Tübingen
Gregor Nickel		Universität Siegen
Markus Wacker		HTW Dresden

Die Agenda

Sonntag, 26. Februar 2023
Ankunft in Rom, Bezug der Unterkunft, Kennenlernen beim Pizzaessen: Pizzeria »Wanted« an der Ecke Via Leonina Via dei Serpenti (ca. 19 Uhr)

Montag, 27. Februar 2023 – Accademia dei Lincei

9^{15} Begrüssung, Vorstellungsrunde
10^{15} **Robert Boehringer & Noa Bihlmaier:** *Bunte Biester und wo sie zu finden sind — Zur mathematischen Modellierung von Extremereignissen.*
11^{45} **Jule Beineke & Hannes Wagener:** *Schlauer als die Bank? — Strategien beim Blackjack.*
13^{15} Mittagspause
14^{30} **Theresa Minister, Judith Pahlke & Paul Werner:** *(K)AIn Zufall — Aktuelle Entwicklung von KI aus der Text- und Bildgenerierung.*
16^{00} **Henrik & Wiete Valett:** *Gibt es überhaupt Zufall? Eine theo-teleologische Diskussion.*
18^{15} Cena (Pizzeria Da Baffetto, Via del Governo Vecchio 114)

Dienstag, 28. Februar 2023 – Deutsches Archäologisches Institut / Deutsche Botschaft beim Heiligen Stuhl

9^{30} **Prof. Dr. Ortwin Dally:** *Das DAI in Rom.*
9^{45} **Manuel Lubetzki:** *Everlasting Entropie — Warum strebt das Universum nach Langeweile?*
10^{45} **Hannah Keller & Alexander Vinnen:** *Ist das Chaos beherrschbar? Beispiele aus Meteorologie, fraktaler Geometrie und Computergrafik.*
12^{15} **Julian Gauger:** *Zufall in der klassischen und quantenmechanischen Physik.*
13^{15} Mittagspause
15^{15} **Botschafter Dr. Bernhard Erhard Kotsch:** *Zufälle in der Vatikanischen Diplomatie.*

Mittwoch, 01. März 2023 – Casa di Goethe / Il Rosario

10^{00} **Dr. Claudia Nordhoff:** *Die Casa di Goethe – Ein Rundgang.*

11^{00} **Noemi Hiller & Sophie Hoff:** *Der Analphabetismus im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten — Wie gehen wir damit um?*

12^{30} **Kaja Ehmke & Jonathan Willer:** *Weshalb fällt es uns so schwer, statistisch zu denken?*

14^{00} Mittagspause

15^{15} **Anne Glaser & Clemens Teupe:** *Bayesian Brain in der Psychiatrie.*

20^{00} Glücksfall, Reinfall, Einfall: Eine literarische Zufalls-Soirée

Donnerstag, 02. März 2023 – Accademia dei Lincei / Il Rosario

9^{15} **Tim-Jonas Peter & Jenny Schrage:** *Mittelalterliche Rechtsprechung: Damals und heute — Über den Einfluss von Wahrscheinlichkeit und Statistik im Recht.*

10^{45} **Freya Geishecker & Ilja Karpenko:** *Das Schicksal spielt unser Leben. Wie Zufall und Gerechtigkeit zusammenhängen.*

12^{15} **Moritz Harnisch:** *Zufällig sicher – Sicher zufällig. Was muss der Kryptograph über den Zufall wissen?*

13^{15} Mittagspause

17^{30} Musische Unterhaltung

Freitag, 03. März 2023 – Accademia dei Lincei

9^{15} **Jelle Kuiper & Hanna Unfug:** *Zufall in der Evolution.*

10^{45} **Sophia Schmidt:** *Jack the Dripper unter der Lupe der Mathematik.*

11^{45} Abschlussgespräch

14^{15} *Besuch des Petrusgrabes und der Nekropole unter der Vatikanischen Basilika*

20^{00} Cena sociale (Gino e Pietro, Via del Governo Vecchio 106)

Samstag, 4. März 2023 – Römische Spaziergänge / Domus Aurea

11^{15} *Besichtigung der Domus Aurea*

Sonntag, 5. März 2023

Abreise

Bunte Biester und wo sie zu finden sind Zur mathematischen Modellierung von Extremereignissen

Noa Bihlmaier & Robert Boehringer

> We demand rigidly defined areas of doubt and uncertainty!
>
> *(Douglas Adams)*

Ob im Finanzwesen, der Wissenschaft oder im politischen Leben: Statistische Modellierungen sind nicht mehr wegzudenken. Doch oft werden unsere so gedachten Welten der statistischen Sicherheiten von Ereignissen erschüttert, die nicht vorausgesehen werden können, aber unser Leben nachhaltig beeinflussen: Den schwarzen Schwänen. Im Folgenden wird die Existenz dieser Ereignisse und deren potentielle mathematische Modellierung diskutiert.

Die Mathematiker und der Zufall

> If you hear a prominent economist using the word equilibrium, or normal distribution, do not argue with him; just ignore him, or try to put a rat down his shirt.
>
> *(Nassim Nicholas Taleb)*

Egal ob man den Zufall nun als fundamentalen Bestandteil unserer Welt oder nur als ein Resultat unseres Unwissens (und mangelnder Rechenkapazitäten) betrachtet, wir müssen anerkennen, dass wir in aller Regelmäßigkeit mit Ereignissen konfrontiert werden, die von einem »echten Zufall« nicht zu unterscheiden sind. Für eine menschliche Zivilisation sind solche Ereignisse aber inhärent problematisch, denn diese bedarf konkreter Planung und Kohärenz. Daher muss sie Strategien entwickeln, ihn zu bewältigen. Die Geschichte brachte viele solcher Strategien hervor. Die Interpretation des Zufalls als ein transzendenter göttlicher Wille und Rituale zu dessen Lenkung geben Sicherheiten und Handlungsempfehlungen, aber auch die Wissenschaften brachten solche Strategien hervor. In den Geisteswissenschaften werden neue Sichtweise auf den Zufall entwickelt und die Naturwissenschaften versuchen, durch Modellierung die Zufälle berechenbarer und verständlicher zu machen. Die daraus hervorgehende Disziplin der Statistik wird in der Moderne zur dominanten Form des Umgangs mit dem Zufall. Während der Mystiker die Ungewissheiten auf eine ihm unbekannte Entscheidungsmacht zurückführt, die er vielleicht sogar beeinflussen kann, betrachtet der Statistiker sie als relative Häufigkeiten und weist ihnen eine Wahrscheinlichkeit zu: Der Zufall wird mathematisch gefasst. Eine Bewältigung des Zufalls ergibt sich also als eine Abschätzung des Möglichen, zum Beispiel in Form einer Risikoabschätzung. Extreme Ereignisse, wie zum Beispiel ein Wunder im Mystischen, sind hier schlicht Ereignisse mit extrem geringer Wahrscheinlichkeit.

Mathematische Modellierung des Zufalls

Die moderne mathematische Konzeption der Wahrscheinlichkeit wird ab 1931 maßgeblich von Kolmogorov geprägt: Im auf Deutsch erschienenen *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* wird die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Sprache der Maßtheorie und der Analysis formalisiert. Die Zufallsereignisse sind Elemente einer σ-Algebra über einer Menge Ω, denen über ein Maß P Zahlen zwischen 0 und 1 zugeordnet werden. Dies bezeichnet man als einen **Wahrscheinlichkeitsraum** (Ω, Σ, P). Eine Interpretation der den Ereignissen zugeordneten Zahlen als Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Ereignisses ist die der »relativen Häufigkeit«. Wird der Umstand, der dieses Ereignis hervorgebracht hat, oft wiederholt, dann nähert sich das Verhältnis des Vorkommens dieses Ereignisses zur Anzahl der Wiederholungen dieser Zahl an. Über den Begriff der Zufallsvariable, einer messbaren Funktion vom Grundraum in die reellen Zahlen, können weiterhin Zufallsexperimente modelliert werden, indem den Ereignissen reelle Zahlen zugeordnet werden. Zum Beispiel lässt sich einem geraden Würfelwurf ein Gewinn zuordnen und einem ungeraden ein Verlust. Damit lässt sich über

$$E(X) = \int_\Omega X dP$$

der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen für ein Maß P definieren. Die **Zufallsverteilung** P_X ist nun definiert als das Bildmaß einer solchen Zufallsvariable mit

$$P_X : \mathrm{B} \to [0,1] \text{ mit } P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right).$$

Ein **Zufallsprozess** ist definiert als Familie $(X_n,\, n \in T)$ von Zufallsvariablen über einer Indexmenge T. In unserem Fall ist $T = \mathbb{N}$. Das ist eine Funktion

$$\Omega \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}.$$

Im Falle von identischen Zufallsvariablen X_n lässt sich $X : \Omega \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ auf natürliche Weise mit $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ identifizieren, wobei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_{i=0}^{\infty} \sigma_i := \sigma\left(\{\pi_n^{-1}(A_n) \,|\, n \in \mathbb{N}, A_n \in \sigma_n\}\right)$ mit $\pi_n : \Omega \mapsto \Omega_n$ als Projektion auf die n-te Komponente, versehen ist.

Ein Zufallsprozess X_n auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega_n, \sigma_n, P_n)$ heißt *unabhängig verteilt*, falls die Zufallsverteilung von X_n der Zufallsverteilung des Produktmaßes entspricht. Für die Indexmenge $\mathbb{N}$ ist das Produktmaß P auf

$$\left(\Omega^{\mathbb{N}}, \sigma^{\mathbb{N}}\right) := \left(\prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i, \bigotimes_{i=0}^{\infty} \sigma_i\right)$$

definiert als

$$P\left(A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_i \times \prod_{n=i+1}^{\infty} \Omega_n\right) = P_0(A_0) \cdot P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_i(A_i)$$

für alle $A_n \in \sigma_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nennen einen Zufallsprozess *unabhängig identisch verteilt*, falls dieser unabhängig verteilt ist und die Zufallsvariablen X_n eine identische Verteilung P_X besitzen.

Theorem Falls (X_n) unabhängig identisch verteilt zu $X \in L^1$ ist, so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (X_j - E(X)) \to 0.$$

Dies liefert z. B. den durchschnittlichen Gewinn (oder Verlust) bei einem Würfelwurf. Dabei muss dieser Wert allerdings niemals tatsächlich realisiert werden. Die Verteilung des Prozesses beschreibt der **zentrale Grenzwertsatz**.

Theorem Falls (X_n) unabhängig identisch verteilt zu $X \in L^2$ ist, so gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} (X_j - E(X)) \to \mathcal{N}(\sigma)$$

in Verteilung, wobei σ die Standardabweichung $\|X - E(X)\|_2$ von X und $\mathcal{N}(\sigma)$ die Normalverteilung zu Erwartungswert 0 und Standardabweichung σ ist.

Die Normalverteilung ist von zentraler Bedeutung für die Statistik. Da sie schnell fallend ist, können Randereignisse vernachlässigt werden. Es reichen nur zwei Parameter aus, um sie vollständig zu beschreiben. Der **zentrale Grenzwertsatz** liefert die Rechtfertigung, die Normalverteilung für viele Phänomene anzunehmen, da uns eine unabhängige identische Verteilung und die L^2-Integrierbarkeit der Zufallsvariablen als natürlich erscheinen. Damit wurde sie eines der wichtigsten Werkzeuge der Statistik und fand vor allem in den Wirtschaftswissenschaften viel Anwendung, wenn auch oft fälschlicherweise.

Extreme Ereignisse

Das zentrale Thema unseres Vortrages ist nun aber die Modellierung von Extremereignissen, also Ereignisse, die sehr unwahrscheinlich sind, aber einen großen Einfluss auf den Verlauf eines Systems haben. Die Existenz solcher Ereignisse ist unmittelbar klar, es finden sich zahlreiche Beispiele in unserer Geschichte. Insbesondere kann also die Normalverteilung nicht ausreichend sein, um den Zufall zu kontrollieren, da sie eben solche Ereignisse notwendigerweise vernachlässigt. Wir können allerdings unsere Modelle anpassen, um Verteilungen zu erhalten, die extreme Ereignisse zulassen.

Definition Seien X und Y Zufallsvariablen. Wir sagen, X *strebt gegen* Y, wenn Y nicht degeneriert ist und für X_i unabhängig identisch verteilt zu X gilt, dass es $a_i > 0$ und $b_i \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$a_n \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right) - b_n \to Y$$

in Verteilung konvergiert.

Eine nicht degenerierte Zufallsvariable Y heißt **stabil**, falls für unabhängige Y_1 und Y_2 sowie $a \in \mathbb{R}$ stets $c,\ d \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $Y_1 + aY_2$ wie $cY + d$ verteilt sind. Die Verteilungen stabiler Zufallsvariablen X sind von der Form

$$f_X(t) = \mathcal{F}^{-1} \exp\left(it\mu - |ct|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sgn}(t)) \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log|t| & \alpha = 1 \end{cases} \right)$$

mit $\alpha \in (0,2]$, $\beta \in [-1,1]$, $c \in (0,\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Daraus lässt sich nun ein **verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz** ableiten, wie man ihn in ähnlichen Versionen beispielsweise als Theorem 4.5 bei MEERSCHAERT & SIKORSKII [2] oder Theorem XVII.5.2 bei FELLER [1] finden kann.

Theorem Seien X und Y Zufallsvariablen. Falls X gegen Y strebt, so ist Y stabil. Ferner gilt Folgendes:

1. Für Y normalverteilt strebt X genau dann gegen Y, wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{E\left(X^2 1_{|X|\leq \lambda x}\right)}{E\left(X^2 1_{|X|\leq x}\right)} = 1 \qquad \text{für alle } \lambda > 0.$$

2. Für Y stabil bezüglich eines Parameters $0 < \alpha < 2$ strebt X genau dann gegen Y, falls für alle $\lambda > 0$ und ein $0 \leq \beta \leq 1$ gilt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(|X| > \lambda x)}{P(|X| > x)} = \lambda^{-\alpha} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{P(X > x)}{P(|X| > x)} = \beta.$$

Die so erhaltene Verteilung enthält die Normalverteilung als Grenzfall, enthält aber auch Verteilungen, die nicht schnell fallend sind. Extreme Ereignisse können dann damit modelliert werden. Auch diese Verteilungen sind eindeutig durch einige wenige (4) Parameter bestimmt. Es stellt sich deshalb die grundsätzliche Frage, ob wir mit solchen Methoden mathematische Modelle entwickeln können, mit denen wir alle Formen des Zufalls kontrollieren können.

Schwarze Schwäne

Diese Frage wurde im Detail vom Finanzmathematiker Nassim Nicholas TALEB [3] untersucht und negativ beantwortet. Dafür prägte er im gleichnamigen Buch den Begriff des **schwarzen Schwans**: *Ein nicht modellierbares extremes Ereignis.* Er sieht in ihnen elementare Ereignisse unserer Geschichte, die von unseren Modellen nicht adäquat vorhergesagt werden können. Als Beispiele für schwarze Schwäne nennt Taleb Wirtschaftskrisen, Kriege und wissenschaftliche Innovationen. Dass sich die Normalverteilung im Allgemeinen nicht zu deren Modellierung eignet, also viele schwarze Schwäne produziert, ist schnell eingesehen, auch wenn sie dennoch oft verwendet wurde. Doch auch ausgefeiltere Modelle, wie der hier vorgestellte verallgemeinerte zentrale Grenzwertsatz, könnten nach

Taleb schwarze Schwäne nicht verhindern. Man kann diese also nicht *grau* machen, indem man die Modelle immer weiter verfeinert, bis am Ende kein schwarzer Schwan übrig bleiben würde. Als die Gründe der Fehlerhaftigkeit dieser Modelle und dem falschen Vertrauen in sie benennt Taleb vier kognitive Verzerrungen.

Die **narrative Verzerrung** bezeichnet unsere Angewohnheit, das nicht vorhergesehene Ereignis im Nachhinein in eine Geschichte einzubinden, die es scheinbar plausibel macht. Diese Geschichte gibt uns die Illusion einer kontrollierbaren und nun verstandenen Welt und liefert uns ein neues auf dieses Ereignis angepasstes Modell. Dieses ist aber weiterhin unvollständig und kann höchstens den exakt gleichen schwarzen Schwan modellieren, nicht aber andere. Paradoxerweise führt damit ein schwarzer Schwan zusammen mit der narrativen Verzerrung zu einem kurzfristig höheren Vertrauen in dieses neue Modell und begünstigt damit direkt den nächsten schwarzen Schwan. Der Fehlschluss ist also, aus der möglichen Erklärung von Vergangenem eine mögliche Vorhersehbarkeit der Zukunft abzuleiten.

Die **statistisch-regressive Verzerrung** beschreibt unseren Glauben, Zufallsverteilungen überhaupt aus Messreihen ableiten zu können. Taleb stellt unsere Möglichkeit infrage, Messdaten korrekt zu interpretieren. Als Beispiel nennt er den Versuch eines Truthahns basierend auf seinen Messdaten, ein Modell über die Menschen zu erstellen. Dieser müsse davon ausgehen, dass der Mensch ihm zuträglich und ein Freund sei. Seine Schlachtung für Weihnachten kann er nicht vorhersagen, da ihm die Möglichkeit fehlt, seine Messungen korrekt einzuordnen.

Zuletzt benennt Taleb die **ludische Verzerrung**, den Glauben der reale Zufall würde sich so verhalten wie unser strukturierte Zufall, also zum Beispiel wie bei Glücksspielen im Kasino und bei unseren idealisierten mathematischen Modellen. Als wichtiger Angriffspunkt sei hier die in allen hier aufgeführten Sätzen angenommenen identischen Verteilung einer Zufallsvariablen genannt, die in der Realität nicht gegeben sein muss. Echter Zufall folgt nicht unseren strengen mathematischen Voraussetzungen.

Insgesamt können wir also nicht darauf vertrauen, dass wir in der Lage sind, mathematische Modelle zu entwickeln, die alle schwarzen Schwäne grau machen können. Insbesondere werden schwarze Schwäne sogar durch das falsche Vertrauen in solche Modelle begünstigt, da selbst deren mögliches Vorkommen nicht mehr beachtet wird, und wir Absicherungen gegen sie nicht für nötig erachten.

Don’t Panic

> We know what happens to people
> who stay in the middle of the road.
> They get run over!
>
> *(Aneurin Bevan)*

Sind wir also den schwarzen Schwänen hoffnungslos ausgeliefert? Kann die Mathematik keinen Beitrag zu ihrer Bewältigung leisten? Es stellt sich die legitime Frage, wie wir konstruktiv mit Talebs Kritik umgehen können. Der Einwand, dass wir nichts wirklich wissen und vorhersehen können, ist weder neu noch sonderlich nützlich, mit grundsätzlichem Skeptizismus ist kein Blumentopf zu gewinnen. Offensichtlich ist auch, dass es Systeme gibt, die wir sehr wohl erfolgreich modellieren können. Zwar kann man Taleb schon vorwerfen, sich etwas zu sehr auf seiner Kritik auszuruhen, allerdings beschäftigt er sich durchaus mit konstruktiven Methoden, den negativen Einfluss schwarzer Schwäne zu mindern. Grundsätzlich ist nach Taleb mit dem Vertrauensverlust in unsere Modelle schon ein wichtiger Schritt getan. Talebs Motto lautet hier: *Don’t be a sucker*. Wir sollen *kontrafaktisch denken* und nicht eingetretene Ereignisse in unsere Überlegungen mit einbeziehen. Es stellt sich dabei aber die Frage nach dem richtigen Maß dieser Skepsis, und worauf wir uns dabei fokussieren sollten, damit dies ein praktikabler Ratschlag wird. Wir müssen also eine Möglichkeit finden, unsere Modelle auf ihre Anfälligkeit für schwarze Schwäne zu untersuchen, um daraus **robuste Systeme** aufzubauen. Es gilt dabei, das richtige Maß an und den richtigen Ort für Skeptizismus zu finden.

Eine zunächst naive Lösung, wie das Absichern gegen scheinbar alle Eventualitäten, ist nicht praktikabel. Wollen wir uns beispielsweise wie bei *Pascals Wette* gegen die Eventualität absichern, dass es einen Gott gibt, durch den wir mit entsprechenden Handlungen zum ewigen seligen Leben gelangen, so müssten wir uns mit demselben Argument auch gegen beliebig viele andere Götter und deren Regeln absichern. Insbesondere dürfen wir nicht jede Eventualität als gleich wichtig und wahrscheinlich betrachten. Um dieses Problem zu lösen, liefert Taleb Kriterien, mit denen wir die Relevanz und den Einfluss von schwarzen Schwänen einschätzen können.

Zunächst können wir das Wissen, auf dem unser Modell aufgebaut ist, betrachten. Taleb unterscheidet grundsätzlich zwischen **fragilem** und **antifragilem Wissen**. Antifragiles Wissen ist bewährtes Wissen, wie zum Beispiel Alltagserfahrungen, während fragiles Wissen theoretisches Wissen, wie zum Beispiel Wirtschaftsprinzipien, ist. Das Risiko für falsche Vorhersagen ist offenbar bei antifragilem Wissen geringer, allerdings muss oft auch fragiles Wissen verwendet werden. Die Klassifikation sorgt dann dafür, dass wir uns diese Fragilität bewusst machen und ein geringeres Vertrauen in Modelle haben, die auf viel fragilem Wissen beruhen. Im Idealfall können wir Vorhersagen des Modells auf ihre Voraussetzungen untersuchen, um damit ihre Zuverlässigkeit einzuschätzen. Es liefert also ein Maß für das Risiko eines falschen Modells, kann aber schwarze Schwäne nicht ausschließen, da wir die Unterscheidung zwischen fragilem und antifragilem Wissen nicht abschließend klären können.

Das zweite Kriterium ist das der **Skalierbarkeit**. Dabei wird betrachtet, inwiefern und wo es überhaupt extreme Ereignisse in unserem System geben kann. Als skalierbar definieren wir Teile eines Systems, deren Verteilung um den Mittelwert wir auch bei (quasi) beliebig hohen (und niedrigen) Werten finden können. So ist beispielsweise das Gehalt von Autoren skalierbar, während das Gehalt eines Lehrers nicht skalierbar ist. Das Argument ist nun, dass extreme Ereignisse bei nicht skalierbaren Systemen weniger oft (oder gar nicht) vorkommen. Schwarze Schwäne spielen dort also eine geringere Rolle. Wir können nun komplexere Systeme auf ihre skalierbaren und nicht skalierbaren Teile untersuchen und unseres besonderes Augenmerk auf die riskanten Teile legen.

Insgesamt können wir also robuste Systeme aufbauen, indem wir uns gegen die so identifizierten riskanten Teile absichern, also zum Beispiel Rücklagen für diese bilden und auf Optimierungen und systemrelevante Entscheidungen basierend auf fragilem Wissen verzichten. Mathematische Modelle sind also sehr wohl nützlich für die Modellierung des Zufalls, solange man sich klarmacht, dass wir uns auch gegen ihre fragilen und skalierbaren Teile absichern müssen.

Eine sinnvolle Auseinandersetzung mit dem Zufall kann also nicht nur aus idealisierter Mathematik bestehen. Sie kann aber ein Teil einer umfassenderen Analyse unsere Realität sein, bei der wir uns immer bewusst sein müssen, dass sie nicht vorhersagbare Ereignisse beinhaltet.

Literatur

[1] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* John Wiley & Sons (1991).

[2] M. M. Meerschaert & A. Sikorskii: *Stochastic Models for Fractional Calculus.* Walter de Gruyter GmbH (2019).

[3] N. N. Taleb: *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable.* Random House (2007).

Schlauer als die Bank? - Strategien beim Blackjack.

Jule Beineke & Hannes Wagener

Seit Generationen faszinieren Glücksspiele die Menschheit. Spieleinflüsse wie das zufällige Kartenmischen oder Würfeln scheinen unberechenbar zu sein. Doch das Spiel Blackjack ist dafür bekannt, dass man durch Kartenzählen Gewinn erzielen kann. Dieses wurde in vielen Büchern und Filmen thematisiert. Ein bekanntes Beispiel ist das sogenannte MIT Blackjack Team: in den 1980er Jahren gelang es einer Gruppe von Studenten des MIT durch geschicktes Spielen mit Blackjack Millionen zu verdienen.

Wie funktionieren diese Strategien und kann man dadurch wirklich gegen die Bank gewinnen?

1 Regeln

Die Regeln beim Blackjack variieren je nach Umfeld, wir legen zunächst folgende Spielregeln fest. Diese wurden aus Baldwin, Cantey, Maisel & McDermott

[1] übernommen.

- Beim Blackjack spielen bis zu sechs Spieler alleine gegen die Bank, den »Dealer«.
- Dabei wird mit einem normalen Deck mit 52 Karten gespielt.
- Die Spieler machen ihre Einsätze, bevor die Karten ausgeteilt werden.
- Die Spieler und der Dealer bekommen jeweils zwei Karten, wobei bei den Spielern beide Karten offen liegen. Der Dealer hat eine offenliegende und eine verdeckte Karte.
- Bildkarten (Bube, Dame, König) zählen 10 Punkte, Asse zählen einen oder 11 Punkte (je nachdem, was der Spieler wählt), und die restlichen Karten werden wie ihr Zahlenwert gewertet. Der Handwert ergibt sich aus der Addition der Kartenwerte.
- Ziel der Spieler ist es, möglichst nahe an 21 Punkte heranzukommen, ohne dass der Handwert 21 Punkte übersteigt.
- Sobald Spieler oder Dealer mit zwei Karten einen Handwert von genau 21 Punkten haben, nennt man dies »Blackjack«.
- Wenn jeder Spieler zwei Karten hat, entscheidet jeder der Reihe nach, ob er eine oder mehrere Karten ziehen will (»Hit« oder »Draw«) oder keine weitere Karte ziehen will (»Stand«).
- Falls sich der Spieler »überkauft«, d. h. sein Handwert beträgt mehr als 21 Punkte, verliert er sofort seinen Einsatz.
- Nachdem jeder Spieler seinen Zug gemacht hat, deckt der Dealer seine verdeckte Karte auf. Danach folgt er einer klaren Entscheidungsregel: Solange sein Handwert weniger als 16 Punkte oder genau 16 Punkte beträgt, muss er eine weitere Karte ziehen. Wenn der Handwert mehr als 16 Punkte beträgt, nimmt er keine weitere Karte.
- Wenn der Dealer sich »überkauft«, haben alle noch am Spiel teilnehmenden Spieler gewonnen, d. h. sie bekommen ihren Einsatz zurück und einen Gewinn in Höhe ihres Einsatzes ausgeschüttet. Hat der Dealer einen Handwert der 21 nicht überschreitet, gewinnen die Spieler, deren Handwert näher an 21 Punkten liegt als der des Dealers. Bei gleichem Handwert von Dealer und Spieler behält der Spieler seinen Einsatz, d. h. es wechselt kein Einsatz zwischen Dealer und Spieler. Im Falle eines »Blackjacks« eines Spielers, bekommt dieser einen 3:2 Gewinn ausgeschüttet.

– Wenn ein Spieler zwei gleiche Kartenwerte hat (z. B. zwei Damen, zwei Fünfen), so hat er die Möglichkeit seine Karten in zwei separate Hände zu teilen (»Splitting Pairs«). Der Spieler muss seinen Einsatz verdoppeln, da er nun zwei separate Gewinnchancen hat. Des Weiteren bekommt er pro Hand eine weitere Karte. Anschließend kann der Spieler für beide Hände entscheiden, ob er weitere Karten ziehen möchte oder nicht.

– Nachdem der Spieler die Karten gesehen hat, hat er die Möglichkeit, seinen Einsatz zu verdoppeln (»Doubling Down«). Danach erhält er genau eine weitere Karte.

2 Basisstrategie

Eine ausführliche mathematische Analyse des Spiels wurde 1956 von R. Baldwin W. Cantey, H. Maisel und J. Mc Dermott veröffentlicht (vgl. BALDWIN, CANTEY, MAISEL & MCDERMOTT [1]). Diese war die erste ernstzunehmende mathematische Analyse des Spiels (vgl. BEWERSDORFF [2, S.90]). Im Folgenden wird diese als »Basisstrategie« benannt.

Eine Spielstrategie soll klären, in welchen Situationen der Spieler eine Karte ziehen sollte oder in welchen er stehen bleiben soll. Es wird angenommen, dass nach den oben eingeführten Regeln gespielt wird. Grundidee der Basisstrategie ist die folgende: Sollte es sich für den Spieler lohnen, bei einem Handwert keine weitere Karte zu ziehen, so lohnt es sich auch bei allen höheren Kartenwerten. Es wird also der minimale Wert gesucht, bei dem es sich für den Spieler lohnt stehenzubleiben.

Grundsätzlich wird in »hard hands« und »soft hands« unterschieden. Eine hard hand bezeichnet eine Hand, die einen eindeutigen Handwert hat, also ohne ein Ass, welches zweideutig zählen könnte. Soft hands dagegen sind Hände, die mindestens ein Ass enthalten, welches mit Wert 1 oder 11 zählen kann, ohne dass der Handwert 21 überschritten wird. Für die Herleitung der Entscheidungsregel beschränken wir uns ausschließlich auf die etwas einfacher zu analysierenden hard hands. Soft hands müssten gesondert mit analogen Methoden betrachtet werden.

Im Weiteren bezeichne $x \leqslant 21$ den eindeutigen Handwert des Spielers, sowie $D \in \{2, 3, ..., 10, (1, 11)\}$ den Wert der offenen Dealerkarte. Mit $M(D) \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir die sog. »minimum standing number«, d. h. falls der Spieler den Handwert x und der Dealer die Karte D hat, sollte der Spieler keine weitere Karte ziehen, falls $x \geqslant M(D)$ gilt, während er mindestens eine weitere Karte ziehen sollte, falls $x < M(D)$ gilt.

Um die »minimum standing numbers« zu finden, vergleicht man den Erwartungswert eines Spielers 1 mit $M(D) = x$ und Spieler 2 mit $M(D) = x + 1$ für ein beliebiges $x \in \{1, 2, ..., 21\}$. Spieler 1 und Spieler 2 haben also fast die gleiche Strategie, außer die Spieler haben genau den Handwert x. In diesem Fall bleibt Spieler 1 stehen, während Spieler 2 genau eine Karte zieht. Es reicht also den Erwartungswert $E_{s,x}$ eines Spielers der bei einem Handwert x stehen bleibt mit dem Erwartungswert $E_{d,x}$ eines Spielers der bei einem Handwert x eine Karte zieht zu vergleichen. Die Idee ist nun, falls $E_{d,x} - E_{s,x}$ monoton fallend in x ist, so ist $M(D)$ identifizierbar als kleinstes x mit der Eigenschaft $E_{d,x} - E_{s,x} < 0$.

Für die Analyse von $E_{d,x} - E_{s,x}$ wird zunächst $E_{s,x}$, die Erwartung eines Spielers, der bei einem Handwert x stehen bleibt, bestimmt. Sei dazu T eine Zufallsvariable, die den finalen Kartenwert des Dealers beschreibt. Aus den Regeln folgt sofort, dass $T \geqslant 17$ gilt. Überkauft sich der Dealer ($T > 21$) oder hat der Spieler einen höheren Handwert als der Dealer nach dem Ziehen ($T < x$), so gewinnt der Spieler. Haben Dealer und Spieler den gleichen Wert ($T = x$), so ist es ein Unentschieden. Überkauft sich der Dealer nicht und hat der Spieler eine Hand von niedrigerem Wert ($x < T \leqslant 21$), so verliert der Spieler. Nimmt man als Einsatz eine Einheit an, so folgt für den erwarteten Gewinn

$$E_{s,x} = P(T > 21) + P(T < x) - P(x < T \leqslant 21).$$

Für die Betrachtung von $E_{d,x}$, die Erwartung eines Spielers, der bei einem Handwert x noch eine Karte zieht, sei zusätzlich J eine Zufallsvariable, die den finalen Kartenwert nach dem Ziehen einer weiteren Karte beschreibt. Für die Berechnung von $E_{d,x}$ machen wir eine Fallunterscheidung in J. Gilt $J < 17$, so gewinnt der Spieler genau dann, wenn sich der Dealer überkauft, sonst verliert der Spieler. Für die Erwartung E_1 in diesem Fall, folgt

$$E_1 = P(T > 21) - P(T \leqslant 21).$$

Gilt $J > 21$, sich also der Spieler überkauft, so verliert der Spieler immer, unabhängig von dem Ergebnis des Dealers. Also gilt in diesem Fall

$$E_2 = -1.$$

Gilt $17 \leqslant J \leqslant 21$, so gewinnt der Spieler, falls $T > 21$ oder $T < J$ gilt, und der Spieler verliert, falls $J < T \leqslant 21$ gilt. Also folgt im letzten Fall

$$E_3 = P(T > 21) + P(T < J) - P(J < T \leqslant 21).$$

Wir nehmen an, dass T und J unabhängig sind. So vernachlässigt man, dass der Dealer die Karte mit Wert $J - x$, die zuletzt auf dem Kartenstapel oben lag und vom Spieler gezogen wurde, nicht mehr ziehen kann. Dies ist jedoch bei der großen Anzahl an Karten vernachlässigbar. So kann man den erwarteten Gewinn schreiben als

$$\begin{aligned} E_{d,x} = {} & P(J<17)\left[P(T>21)-P(T\leqslant 21)\right]-P(J>21) \\ & +\sum_{j=17}^{21} P(J=j)\left[P(T>21)+P(T<j)-P(j<T\leqslant 21)\right]. \end{aligned}$$

Nun können wir zusammenfassen:

$$\begin{aligned} E_{d,x}-E_{s,x} = {} & P(J<17)\left[P(T>21)-P(T\leqslant 21)\right]-P(J>21) \\ & +\sum_{j=17}^{21} P(J=j)\left[P(T>21)+P(T<j)-P(j<T\leqslant 21)\right] \\ & -P(T>21)+P(T<x)-P(x<T\leqslant 21) \end{aligned}$$

Diesen Term kann man noch mit einfachen algebraischen Umformungen vereinfachen, sodass man die sog. »decision equation« in der allgemeinsten Form erhält:

$$\begin{aligned} E_{d,x}-E_{s,x} = {} & -2P(T<x)-P(T=x)-2P(T>21)\,P(J>21) \\ & +2P(T<J\leqslant 21)+P(T=J\leqslant 21). \end{aligned}$$

Für die Analyse der »decision equation« unterscheidet man in x:

- Gilt $x<12$, so sind die ersten drei Summanden gleich null, denn es gilt $T\geqslant 17$. Also ist in diesem Fall $E_{d,x}-E_{s,x}\geqslant 0$, d. h. der erwartete Gewinn ist größer, wenn man eine Karte zieht. Damit folgt, dass $M(D)>11$ für alle D ist. Dies ergibt sich auch aus der Überlegung, dass ein Spieler mit Handwert $x<12$ sich beim Zug einer weiteren Karte gar nicht überkaufen kann. Er kann seine Hand also nur verbessern.

- Gilt $12\leqslant x\leqslant 16$, so sind die ersten zwei Summanden der »decision equation« gleich null. Die übrigen Terme kann man schreiben als

  $$\begin{aligned} E_{d,x}-E_{s,x} = {} & -2P(T>21)\,P(J>21) \\ & +\sum_{t=17}^{21} P(T=t)\left[2P(t<J\leqslant 21)+P(J=t)\right], \end{aligned}$$

  wobei wieder T und J als unabhängig angenommen werden. Nun sollen die Wahrscheinlichkeiten, die mit der Zufallsvariable J zusammenhängen, berechnet werden. Es wird vereinfachend angenommen, dass jede einzelne Karte mit Wahrscheinlichkeit $1/52$ gezogen wird. Das stimmt nicht genau, kann aber aufgrund der Größe des Stapels nähernd angenommen werden. Die Zufallsvariable J gibt den Handwert eines Spielers an, der zu dem

Handwert x genau eine weitere Karte zieht, also gibt $J - x$ den Wert der gezogenen Karte an. Damit folgt dann, dass $P(J - x = 10) = 4/13$ und $P(J - x = i) = 1/13$ für $i \in \{2, 3, ..., 9, (1, 11)\}$ gilt. Mit kombinatorischen Überlegungen erhält man dann $P(J > 21) = \frac{x-8}{13}$ für $x \geqslant 12$ und $P(t < J \leqslant 21) = \frac{21-t}{13}$ sowie $P(J = t) = \frac{1}{13}$ für $17 \leqslant t \leqslant 21$. Das Einsetzen dieser Werte in die vorherige Gleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} E_{d,x} - E_{s,x} &= -2\frac{x-8}{13} P(T > 21) + \sum_{t=17}^{21} P(T = t) \left[2\frac{21-t}{13} + \frac{1}{13} \right] \\ &= -2\frac{x-8}{13} P(T > 21) + \sum_{t=17}^{21} P(T = t) \frac{43-2t}{13}, \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der in x linear monoton fallend ist. Um $M(D)$, das kleinste x, sodass $E_{d,x} - E_{s,x} < 0$ ist, zu finden, setze $E_{d,x_0} - E_{s,x_0} = 0$ und erhalte

$$x_0 = 8 + \frac{\sum\limits_{t=17}^{21} P(T = t)(21,5 - t)}{P(T > 21)}.$$

Ohne x_0 vorab genauer zu kennen, kann man festhalten, falls $x_0 < 12$ ist, dass $M(D) = 12$ gilt und falls $x_0 > 16$ ist, dass $M(D) > 16$ gilt sowie falls $12 \leqslant x_0 \leqslant 16$ ist, dass $M(D) = \lfloor x_0 \rfloor + 1$ gilt.

– Zuletzt wird noch $x = 17$ betrachtet. Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor erhält man

$$E_{d,17} - E_{s,17} = -\frac{18}{13} P(T > 21) - \frac{5}{13} P(T = 17) + \sum_{t=18}^{21} \frac{43-2t}{13} P(T = t).$$

Eine Berechnung der Dealerwahrscheinlichkeit $P(T = t)$ wird zeigen $E_{d,17} - E_{s,17} < 0$ für alle D, woraus $M(D) \leqslant 17$ für alle D folgt. Damit müssen keine weiteren Fälle in x betrachtet werden und es wird nur noch die Dealerwahrscheinlichkeit benötigt.

Die Dealerwahrscheinlichkeit lässt sich approximativ unter der typischen Annahme der Gleichverteilung der Karten berechnen. Approximativ erhält man für $P(T = t)$ bei offener Dealerkarte D:

Diese Werte und ihr Entstehen wurden ebenfalls in Baldwin, Cantey, Maisel & McDermott [1] veröffentlicht. Setzt man diese Werte in vorherige Formel ein, erhält man folgende »minimum standing numbers« für hard hands:

$$M(D) = \begin{cases} 13 & D = 2, 3 \\ 12 & D = 4, 5, 6 \\ 17 & D \geqslant 7, D = (1, 11). \end{cases}$$

D\t	17	18	19	20	21	BJ	>21
2	0,141781	0,134885	0,131432	0,123829	0,119581	0,000000	0,348492
3	0,133533	0,133052	0,126197	0,122563	0,114903	0,000000	0,369751
4	0,132206	0,116037	0,122553	0,117930	0,114292	0,000000	0,396983
5	0,121374	0,124511	0,117753	0,105446	0,107823	0,000000	0,423092
6	0,167625	0,107233	0,108018	0,101260	0,098364	0,000000	0,417499
7	0,372743	0,139017	0,077841	0,079409	0,073437	0,000000	0,257332
8	0,131202	0,363359	0,129634	0,068457	0,070026	0,000000	0,237322
9	0,122256	0,104217	0,357550	0,122256	0,061079	0,000000	0,232643
10	0,114756	0,113186	0,114756	0,328873	0,036324	0,078431	0,213674
A	0,128147	0,131284	0,129716	0,131284	0,051284	0,313725	0,114560

Tabelle 1: Die Dealerwahrscheinlichkeit $P\left(T=t\right)$ bei offener Dealerkarte D

Mit analogen Methoden, also Vergleich von Erwartungswerten, erhält man auch für soft hands »minimum standing numbers«:

$$M^{*}\left(D\right)=\begin{cases}18 & D\leqslant 8, D=\left(1,11\right)\\ 19 & D=9,10.\end{cases}$$

Der niedrige Wert 12, als standing number für hard hands, falls die Dealerkarte $D=4,5,6$ ist, scheint zunächst überraschend, rührt aber aus der sehr hohen Wahrscheinlichkeit her, dass sich der Dealer in diesen Fällen überkauft.

Für die Spezialfälle Splitten und Doppeln kann man mit gleicher Vorgehensweise folgende Entscheidungsregeln in Abhängigkeit der Dealerkarte angeben:

Paar mit	A, 8	9	7	6, 3, 2	4	10, 5
Splitten, falls	immer	$2\leqslant D\leqslant 6$, $D=8,9$	$2\leqslant D\leqslant 8$	$2\leqslant D\leqslant 7$	$D=5$	nie

Tabelle 2: Entscheidungsregel zum Splitten

hard hand Wert	$\geqslant 12$	11	10	9	$\leqslant 8$
Doppeln, falls	nie	$2\leqslant D\leqslant 10$	$2\leqslant D\leqslant 9$	$2\leqslant D\leqslant 6$	nie

Tabelle 3: Entscheidungsregel zum Doppeln bei hard hands

Es wurden für alle Spielsituationen optimale Entscheidungsregeln aufgestellt. Es stellt sich nun die Frage, welchen Gewinn ein Spieler, der nach obigen Regeln spielt, erzielt. Sei dazu W eine Zufallsvariable, die den Gewinn des Spielers bei

soft hand Wert	$\geqslant 19$	18	17	13-16	12
Doppeln, falls	nie	$D=4,5,6$	$D=3,4,5,6$	$D=5,6$	$D=5$

Tabelle 4: Entscheidungsregel zum Doppeln bei soft hands

einem Spiel angibt. Der Erwartungswert lässt sich dann mittels

$$E\left(W\right)=\frac{1}{13}\sum_{D\neq 10}E\left(W_D\right)+\frac{4}{13}E\left(W_{10}\right)$$

berechnen, wobei W_D den Gewinn eines Spielers bei einem Spiel mit Dealerkarte D angibt. Approximativ erhält man dann $E\left(W\right)\approx -0,0062$. Also lohnt sich das Spiel mit dieser Strategie für den Spieler nicht. Der Nachteil für den Spieler liegt im Wesentlichen darin, dass der Dealer gewinnt, sobald der Spieler sich überkauft. Dies ist völlig unabhängig von dem Ergebnis des Dealers - auch wenn dieser sich ebenfalls überkauft.

3 Thorps Trick

In der Basisstrategie wird die Information der bereits ausgespielten Karten nicht benutzt. Diese Information nutzt Edward O. Thorp in seiner 1960 veröffentlichten Arbeit »A Favorable Strategy for Twenty-One« (Vgl. THORP [4]). Grundlage für diese Arbeit ist die Basisstrategie von Baldwin et al., welche die bis dahin einzige ernstzunehmende mathematische Arbeit zum Thema Blackjack sei, so Thorp. Thorp stand ein Hochleistungsrechner zur Verfügung. Neben verbesserten Approximationen (Thorp konnte den erwarteten Wert in der Basisstrategie mit $E\left(W\right)\approx -0,0021$ genauer bestimmen), nutzte Thorp den Computer um Strategien für beliebige Kartenmengen zu berechnen. So konnte Thorp angeben, dass sich der Erwartungswert ändert, falls bestimmte Karten ausgespielt wurden. Sind zum Beispiel keine Fünfen mehr im Spiel, so steigt der zu erwartende Gewinn auf $E\left(W\right)=0,0329$ bei passender Strategie. Der Spieler kann also auf lange Sicht gewinnen. Eine gewinnbringende Strategie könnte nun so aussehen: Solange noch Fünfen im Spiel sind, spiele nach der Basisstrategie mit Minimaleinsatz und wenn keine Fünfen mehr im Spiel sind, spiele mit hohem Einsatz nach neuer für diese Spielsituation berechneten Strategie.

4 MIT Blackjack Team

In den frühen 1980er Jahren wurde am Massachusetts Institute of Technology das sog. MIT Blackjack Team von Mickey Rosa gegründet. Dabei wurden Studenten des MIT und anderer Universitäten angeworben, teilweise über den offiziellen

MIT-Kurs »How to gamble if you must«. Die teilnehmenden Studenten wurden trainiert in der Basisstrategie, der Kartenzählmethode (»High-Low-Strategie«) und einer Zeichensprache zur Kommunikation zwischen den Spielern. (Vgl. CASEY [3])

Die High-Low-Strategie ist eine anwenderfreundlichere Möglichkeit, Thorps Strategie vereinfacht umzusetzen. Dabei wird davon ausgegangen, dass ein Deck heruntergespielt wird (ohne Mischen). Es wird jeder gespielten Karte ein Wert zugeordnet:

$$\text{Wert} := \begin{cases} -1 & 10, \text{Bube, Dame, König, Ass} \\ 0 & 7, 8, 9 \\ 1 & 2, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

Durch die Addition der Werte der Karten ergibt sich ein laufender Wert, der das übrige Kartendecks bewertet. Aus dem Wert lässt sich ableiten, dass sich noch viele hohe Karten im Stapel befinden, wenn der Wert hoch ist. Wenn der Wert niedrig ist, sind noch viele niedrige Karten im Stapel. Daraus lässt sich abschätzen, dass die Wahrscheinlichkeit höher ist, dass sich der Dealer überkauft, wenn der Wert hoch ist. Somit spielt man mit höheren Einsätzen, wenn der Wert hoch ist (Vgl. BEWERSDORFF [2, §1.17]).

Im Casino nahmen die Spieler des Teams unterschiedliche Rollen ein. Zum Einen gab es die »Späher«, welche an unterschiedlichen Tischen die Karten zählen, niedrige Einsätze machen und dem »Big Player« Handzeichen geben. Diese Handzeichen teilen dem »Big Player« mit, ob der Wert des übrigen Kartendecks vorteilhaft für die Spieler ist (hoher Wert) oder nicht. Falls das Deck laut dem »Späher« vorteilhaft ist, kommt der »Big Player« an den Spieltisch. Daraufhin übermittelt der »Späher« dem »Big Player« den genauen Wert des Decks mithilfe von Codewörtern. Wenn das Deck beispielsweise den Wert +11 innehat, ist das Codewort »football«. Der »Späher« äußert nun in die Runde einen Satz mit dem Codewort, z. B. »Gibt es morgen irgendwelche guten Football-Spiele?«. Somit weiß der »Big Player« den Wert des Kartendecks und kann nach seinem Ermessen setzen. Zusätzlich spielt er nach der Basisstrategie. (Vgl. CASEY [3])

Das erste Team bestand über sechs Jahre und erwirtschaftete einen Gewinn von über fünf Millionen Dollar. Das Team trennte sich von Management, welches für die Organisation der Reisen und Treffen verantwortlich war, und Investoren, welche das Spielkapital bereitstellten, aufgrund des geringen Anteils der Spieler am Gewinn. Das Management und die Investoren bekamen je 45% des Gewinns und die Spieler 10%. Des Weiteren hatten die Spieler in den meistens Casinos in Las Vegas Hausverbot. Mehrere Nachfolgeteams führten das System bis 1993 fort (Vgl. CASEY [3]).

5 Werden wir jetzt alle reich?

Die vorherigen Berechnungen haben gezeigt, dass es eine für den Spieler gewinnbringende Strategie gibt, die mathematisch begründet werden kann. Diese wurde in den 1980ern systematisch von Studierenden des MIT angewandt und bestätigte die Strategie. Nun stellt sich die Frage, ob dies auch heute noch möglich ist. Heutzutage ist die High-Low-Strategie nicht mehr anwendbar, da die Casinobetreiber mit unterschiedlichen Methoden das Kartenzählen unterbinden. Zu den Methoden zählt beispielsweise die »Cutting Card«, welche im Stapel platziert wird. Sobald die Karte erreicht wird, wird das Deck neu gemischt. Durch mehrere Decks wird das Kartenzählen erschwert, jedoch nicht unmöglich gemacht. Außerdem wird in vielen Casinos das Deck nach jeder Runde neu gemischt (Vgl. BEWERSDORFF [2, §1.17]). Das heißt, die Regeln wurden von den Casinobetreibern verändert, sodass die Spielstrategien des Kartenzählens verhindert werden.

Da alle Modelle konstante Regeln annehmen, was in der Realität nicht stimmt, gilt: Wer die Regeln macht, gewinnt unterm Strich.

Literatur

[1] R. R. BALDWIN, W. E. CANTEY, H. MAISEL & J. P. MCDERMOTT: *The Optimum Strategy in Blackjack*. J. Am. Stat. Assoc. **51**(275) (1956) 429–439.

[2] J. BEWERSDORFF: *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen*. Springer Spektrum (2018).

[3] R. CASEY: *The MIT Blackjack Team and Motivation Theory*. Annual Advances in Business Cases (2008) 141–150.

[4] E. THORP: *A Favorable Strategy for Twenty-One*. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **47**(1) (1961) 110–112.

K(AI)ne Intelligenz ohne Zufall Warum es im Algorithmus rauschen muss

Theresa Minister, Carl Pahlke & Paul Werner



Künstliche Intelligenz ist in aller Munde. Der technologische Fortschritt selbstlernender Computerprogramme stellt vielleicht die größte Disruption des beginnenden 21. Jahrhunderts dar. Nicht nur der Arbeitsmarkt wird von dieser Entwicklung stark beeinflusst, auch ganz alltägliche Routinen wie das Verfassen von E-Mails oder die Inhaltssuche im Internet werden immer mehr durch KI-Algorithmen unterstützt. Problematisch ist in der aktuellen Hype-Phase, dass der Begriff sehr weit gefasst ist und eine klare Abgrenzung zu bereits bestehenden Technologien schwerfällt. In diesem Beitrag soll durch einen Rückblick in die Geschichte und der Erläuterung von aktueller Technologie das Wesen künstlicher Intelligenz untersucht werden. Natürlich spielt der Zufall dabei eine entscheidende Rolle!

Definitionen

Der Begriff »Künstliche Intelligenz« wurde von dem US-amerikanischen Informatiker John McCarthy 1955 im Rahmen der Dartmouth Conference geprägt, welche gleichzeitig als Geburtsstunde der KI als Forschungsgebiet gilt. Seine Definition greift dabei wiederum auf den Intelligenzbegriff zurück:

> »Ziel der KI ist es, Maschinen zu entwickeln, die sich verhalten, als verfügten sie über Intelligenz.« Ertel & Black [2]

Der rekursive Rückgriff auf ein Konzept von Intelligenz, welches selbst außerhalb von konkreten Problemfällen stets unscharf bleibt, macht die Herausforderung einer allgemeingültigen Definition deutlich. So fällt es Tieren und Menschen sehr leicht, ein Objekt im Sichtfeld zu verfolgen, während das schnelle Multiplizieren von zwei 10-stelligen Zahlen wesentlich aufwendiger ist. Für den Computer ist es genau andersherum. Alan M. Turing kritisiert daher, dass jeglicher Versuch der Definition einer Maschinenintelligenz über das Intelligenzkonzept zum Scheitern verurteilt sei, da diese Begriffe gesellschaftlich bereits zu unterschiedlich bestimmt sind und der Definitionsversuch daher stets zu einer Meinungsumfrage würde (vgl. Turing [11]).

Er schlägt daher ein Imitationsspiel vor, den berühmten und später nach ihm benannten Turingtest. Dabei wird die Intelligenz der Maschine darüber bestimmt, ob ein Mensch, der mit ihr interagiert, sie von einer menschlichen Referenzperson unterscheiden kann. Dieser Test fordert eine enorme Anpassungsfähigkeit der Maschine und die Fähigkeit zu lernen heraus. Sie wird heute als starke KI bezeichnet in Abgrenzung zu einer schwachen KI, welche nur in begrenzten Disziplinen intelligentes Verhalten zeigen muss. Dieser maximale Anspruch der Imitation menschlichen Denkens wurde bis heute nicht erreicht und war zu Turings Zeiten ein rein theoretisches Gedankenspiel.

Ein Interesse der frühen KI-Forschung lag in der Hoffnung, neue mathematische Erkenntnisse durch algorithmische Hilfsmittel zu gewinnen. Während die Industrie gerade die Möglichkeiten der enorm schnellen Berechnungen der neu entwickelten Computer auslotete, diskutierten die Mathematiker, wie symbolische Operationen und Kalküle in Algorithmen abgebildet werden können, um so neue mathematische Beweise zu finden. McCarthy stellte auf der Dartmouth Konferenz die funktionale Programmiersprache LISP vor, die erstmalig das Lambda-Kalkül (eine formale Sprache zur Untersuchung von Funktionen) durch Rechentechnik nutzbar machte. Der ebenfalls vorgestellte automatische Theorembeweiser Logic Theorist von Newell und Simon konnte bereits für prädikatenlogische Aussagen erster Stufe Beweise generieren. Doch war dies auch für Aussagen höherer Ordnung möglich?

Das Rauschen in der Maschine

Turing beschäftigte sich bereits in den 30er Jahren mit dem Hilbertschen Entscheidungsproblem. Dieses fragt nach der Allgemeingültigkeit beliebiger prädikatenlogischer Ausdrücke in Form einer Abbildung in die Menge $\{\text{wahr}, \text{falsch}\}$. Aufbauend auf den kurz zuvor veröffentlichten Gödelschen Unvollständigkeitssätzen wollte Turing untersuchen, ob es einen generellen algorithmischen Lösungsansatz für das Entscheidungsproblem gibt. Dazu müsste es einen Algorithmus geben, welcher für beliebige Algorithmen (und zugehörigen Eingaben) entscheiden kann, ob diese in eine Endlosschleife laufen oder nicht. Für den Beweis dieses sog. Halteproblems entwickelte er das mathematische Modell der Universalmaschine (Turingmaschine) und ermöglichte so erstmals eine formal-mathematische Beschreibung der Arbeitsweise eines Algorithmus.

Turing konnte so beweisen, dass Algorithmen ebenso wenig entscheidbar sind wie prädikatenlogische Ausdrücke, zumindest bei Ausführung auf seiner Universalmaschine. Diese Maschine besteht aus einem festen Regelsatz, mit dem Manipulationen an einem endlichen Zeichensatz vorgenommen werden können. Endlich heißen bei den binären Computern die Zustände 0 und 1, abstrahiert werden daraus elementare Lese- und Speicheroperationen, welche wiederum in weiteren Ebenen bis zu den Hochsprachen abstrahiert werden. Die Turingmaschine beschreibt so den Inbegriff eines determinierten Automaten, der nach einer bestimmten Eingabe eine Liste von Operationen ausführt und bei bekannten Parametern schließlich zu einem vorhersagbaren Zustand kommt. Egal wie komplex die darüber liegenden Programme sind, beruhen sie am Ende auf diesem atomistisch-determinierten Automaten.

In der disziplinierten Arbeitsweise der Universalmaschine sah Turing gleichzeitig auch ihre größte Schwäche, die sie davon trennte, ein menschenähnliches intelligentes Verhalten zu produzieren:

> »Intelligent behaviour presumably consists in a departure from the completely disciplined behaviour involved in computation, but a rather slight one, which does not give rise to random behaviour, or to pointless repetitive loops.«(siehe TURING [11] auf Seite 459)

Diesen Gegenentwurf zum Konzept der Universalmaschine bezeichnete er, in Abgrenzung zu der Arbeitsweise von erwachsenen Menschen, als das Konzept der *Kind-Maschine* (siehe TURING [11]). Diese soll eigene Entscheidungen treffen können, unvorhergesehene bis unerwünschte Zielzustände werden dabei in Kauf genommen. Auf diesem Weg soll der kontinuierliche Lernprozess eines Kindes simuliert werden. Das Rauschen im Algorithmus wird vergleichbar mit Eigenschaften, die bei Menschen Selbsttätigkeit, Spontaneität oder Intuition genannt werden. Gerade die streng axiomatisch aufgebaute Mathematik wäre undenkbar ohne vage Vermutungen, welche anschließend mit logischen Methoden und der sicheren mathematischen Intuition bewiesen werden können.

Die Radikalität dieser Idee wird mit den Konsequenzen einer nicht-deterministischen Rechenmaschine klar: Während sich mit der Universalmaschine entscheidbare Beweise führen lassen, arbeitet die Kind-Maschine stets in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Ergebnisse sind immer an ein Wahrscheinlichkeitsmaß gebunden, und es gibt keine Garantie mehr für ein bestimmtes erwünschtes Verhalten (vgl. ERTEL & BLACK [2]). Durch die Vielzahl von Entscheidungen, die man in komplexeren Systemen der Maschine überlässt, ist auch der Weg zu diesen Ergebnissen nicht mehr nachvollziehbar. Dafür bekommt man aber einen Werkzeugkasten intelligenter Algorithmen, der sich für bestimmte Aufgabenstellungen enorm leistungsfähig gezeigt hat.

Später gab es Versuche, die Logik mit ihren expliziten Repräsentationen mit den Stärken von KI-Systemen, mit Unsicherheit umzugehen, zu verbinden. Exemplarisch seien hier das probabilistische Schließen und die Verwendung von Bayes Netzen genannt, welche heutzutage die mathematische Beweisführung unterstützen können. Auch die Fuzzy Logic wird in der Regelungstechnik erfolgreich eingesetzt. Am verbreitetsten sind aber Hybride Systeme, welche klassische neuronale Netze durch gezielte Anwendung von Heuristiken effizienter machen. Aus dieser Kategorie stammen die folgenden Beispiele, welche das Potenzial dieser damals radikalen Ideen für unsere Zukunft erahnen lassen.

Textbasierte KI

> »Textbasierte KI (auch bekannt als NLP, Natural Language Processing) bezieht sich auf die Verwendung von Künstlicher Intelligenz, um menschliche Sprache automatisch zu verarbeiten und zu interpretieren. Dies umfasst Aufgaben wie Textklassifikation, Sentimentanalyse, Übersetzung, Textgenerierung und Chatbots. Die Technologie nutzt Algorithmen und Modelle aus dem Machine Learning und Deep Learning, um Muster und Bedeutungen in Texten zu erkennen und zu verstehen. Textbasierte KI hat das Potenzial, in einer Vielzahl von Branchen eingesetzt zu werden, einschließlich E-Commerce, Finanzdienstleistungen, Kundenservice und Gesundheitswesen. Es hilft, große Mengen an Daten schneller und effizienter zu verarbeiten und bessere Entscheidungen zu treffen.«

Das ist eine von einer textbasierten KI gelieferte Definition – im Grunde über sich selbst. Jeder kennt mittlerweile den Namen der KI – die Rede ist natürlich von ChatGPT.

Natural Language Processing (NLP) befasst sich also mit der menschlichen Sprache, genauer gesagt: NLP soll den Computer dazu befähigen natürliche, menschliche Sprachen zu verstehen, zu ver- und bearbeiten. Im Kontext sprachbasierter KI sind drei Typen relevant:

Natural Language Understanding (NLU), Natural Language Generation (NLG) und Natural Language Processing (NLP)

Diese beschreiben wie eine Mensch-Computer-Kommunikation funktionieren kann. Der Computer muss dafür über ein Verständnis natürlicher Sprache verfügen – NLU – er kann also gesprochene und geschriebene Worte verstehen. Sprachverstehende Maschinen sollen außerdem natürliche Sprache generieren, praktisch antworten können – NLG. Zusammengenommen bilden diese Aspekte die NLP.

Das gestaltet sich gar nicht so einfach, denn unsere Sprache ist sehr komplex und nicht immer eindeutig. Jeder, der schon einmal eine andere Sprache gelernt hat, weiß wie schwierig das sein kann. Grammatik und Vokabeln folgen hierbei (manchmal) einer festen Struktur. Doch Redewendungen, Ironie oder Wortspiele stellen im Lernprozess eine Herausforderung dar. Sprachliche Stilmittel, über die Kontexte transportiert werden, wie eine sarkastische Betonung, folgen keinem festen Schema, können also nicht über Algorithmen abgebildet werden. Der Mensch versteht die Bedeutung hier aus Erfahrungen der Vergangenheit, auf die die KI aber nicht zurückgreifen kann.

Ebenso kann ein einfacher Schreibfehler die gesamte Bedeutung eines Satzes verändern: »Wir essen Opa« vs. »Wir essen, Opa«. Die Kommasetzung an sich kann man der KI vermitteln. Die komplett veränderte Bedeutung, die bei einer Falschausgabe herauskommt, allerdings nicht.

NLP wird in einer Vielzahl von Anwendungen eingesetzt, z. B. in E-Mail-Filtern, Home-Assistenten und prädiktiven Texten. NLP gibt es schon seit langem und jeder, der ein Smartphone oder einen Internetzugang hat, hat bereits (unbewusst) Erfahrungen damit gemacht.

Wie muss so ein Training aussehen, damit NLP den eben beschriebenen Prozess korrekt durchlaufen und eine plausible Antwort generiert werden kann?

Wir wollen uns jetzt mit Sprachmodellen befassen. Ein Sprachmodell ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Wortfolgen. Durch Training mit den Wahrscheinlichkeiten erzeugen die Sprachmodelle einen Textkorpus (oder eine Sammlung von Textkorpora). Mit dieser trainiert dann die KI, wie eine Sprache analysiert werden muss, um daraus bestimmte Regeln und Muster abzuleiten.

Da Sprachen schier unendliche Kombinationen von Wörtern und Sätzen bilden können (es können auch sinnfreie darunter sein), können diese nicht alle in den Trainingsdaten vorkommen. Darunter fällt z. B. Jugendsprache oder generell Slang, der sehr stark wandlungsfähig ist und zudem oft Wörter komplett neu kreiert.

Das Konstrukt, mit dem die KI trainiert wurde, sollte natürlich dem entsprechen, was wir später von ihr möchten. Will ich mir beispielsweise Weinsorten aufzählen lassen, sollte ich die KI vorher nicht mit Biersorten füttern.

Die Sprachmodelle haben sich im Laufe der Zeit immer weiter entwickelt und NLP wurde dadurch intelligenter. Ein paar dieser Entwicklungen möchten wir hier aufzählen:

Statistische Sprachmodelle, Neuronale Netzwerke und GPT-3.

Statistische Sprachmodelle

Beim statistischen Sprachmodell wird die Häufigkeit oder die Auftretenswahrscheinlichkeit eines Wortes gemessen, um daraus nachfolgende Wörter vorherzusagen. Man kann also vereinfachend annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Wortes nicht von allen vorangegangenen, sondern näherungsweise nur von den letzten $N - 1$ Wörtern abhängt. Ein statistisches Sprachmodell beschreibt die Sprache so, als würde sie durch einen Zufallsprozess erzeugt.

Es gibt N-Gram Sprachmodelle mit den Fällen $N = 1$ (Unigram), $N = 2$ (Bigram), $N = 3$ (Trigram). Hier werden N-Gramme eingesetzt, um Wahrscheinlichkeiten für ein Wort nach $N - 1$ vorherigen Wörtern zu ermitteln.

Neuronale Netze

Deep Learning ist eine Methode des NLP-Trainings, die sich an den Lernprozessen des menschlichen Gehirns orientiert. Dabei werden neuronale Netze gebildet und genutzt, die durch Kanten miteinander verbunden sind, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist. Die Gewichte der Verbindungen variieren je nach Stärke und Wichtigkeit der Verbindung, und das Wissen und die Intelligenz des neuronalen Netzes ist in den Verbindungen und ihren Gewichtungen gespeichert. Die Anzahl der Knoten in einem neuronalen Netz ist theoretisch unbegrenzt.

GPT-3

Die Abkürzung GPT-3 steht für Generative Pretrained Transformer 3. Es handelt sich um ein auf Deep Learning basiertes, vortrainiertes Sprachmodell. GPT-3 wurde 2020 veröffentlicht und ist die dritte Version aus der GPT-Serie und Nachfolger des GPT-2. Das Sprachmodell wurde mit riesigen Textmengen (viele hundert Gigabyte) aus dem Internet trainiert und

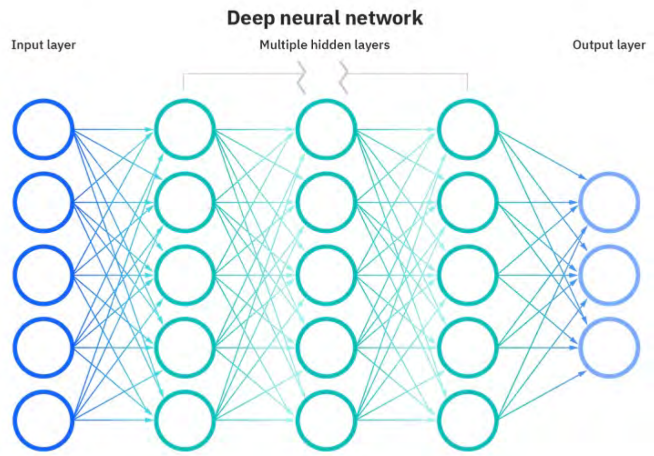


Abbildung 1: Darstellung eines neuronalen Netzes

ist in der Lage, Texte selbstständig und sogar als Antwort auf Fragen zu verfassen und syntaktische Abhängigkeiten zu beachten. GPT-3 arbeitet in einer Vielzahl verschiedener Sprachen.

Bildbasierte KI

Neben der textbasierten Verarbeitung gibt es auch Bild generierende Verfahren. Was ist mit Bildgenerierung heutzutage bereits möglich und was nicht? Oft sieht man fantastische Bilder, beispielsweise eine Malerei eines Schiffes auf dem Meer mit Vögeln am Himmel, oder ein fotorealistischer Affe im Raumanzug. Es schleichen sich jedoch auch des Öfteren noch Fehler bei der Bildgenerierung ein, beispielsweise tritt dies bei Händen bzw. Fingern von Menschen öfters auf.

Im Folgenden wollen wir auf drei Modelle für Bildgenerierung eingehen, um einen Überblick über die Funktionsweise zu geben.

Convolutional Neural Networks (CNN)

CNNs sind eine Klasse von neuronalen Netzen, die besonders gut für die Bildverarbeitung geeignet sind. Ihr Name kommt von der Faltung (Convolution) einer Gewichtungsfunktion, mit der das Bild multipliziert wird. Durch Verschieben und Skalieren der Gewichtungsfunktion kann man lokale Merkmale (Features) erkennen. Beispielsweise kann man erkennen, ob auf einem Bildabschnitt eine Kante ist und in welche Richtung sie verläuft, oder ob es sich vielleicht um eine Ecke handelt. Convolutions können in Schichten (Layern) zu immer komplexeren Funktionen zusammengefügt

Abbildung 2: Urheber: Carl Pahlke via Stable Diffusion Web [9]

werden. Beispielsweise kann ein anderer Layer erkennen, ob der Zusammenschluss aus mehreren Linien und Ecken ein Auge, ein Mund, oder Textur von Haaren ist. Eine weitere Schicht sieht dann, ob Auge+Haare+Mund wie ein Gesicht aussehen.

Diese Eigenschaft von Convolutions ist gut geeignet für Bildverarbeitung.

Generative Adversarial Networks (GANs)

Eine Möglichkeit Bilder nicht nur zu erkennen, sondern auch zu generieren, sind Generative Adversarial Networks. Dabei werden zwei Netze gleichzeitig trainiert. Das eine ist ein normales CNN, das darauf trainiert wird zu erkennen, ob ein Bild echt oder generiert ist. Das andere ist ein Netzwerk, das aus zufälligen Daten versucht, ein Bild zu generieren. Am Anfang weiß weder das erkennende Netzwerk (Diskriminator), worauf es achten muss, noch das generierende Netzwerk (Generator), wie man ein gutes Bild erzeugt. Zum Trainieren gibt man dem Diskriminator eine Mischung aus echten und generierten Bildern. Wenn der Diskriminator etwas gelernt hat, mit dem er echte von generierten Bildern unterscheiden kann, lernt der Generator diese Eigenschaft zu reproduzieren, bis der Diskriminator nicht mehr zwischen echt und generiert unterscheiden kann und anhand von neuen Eigenschaften lernen muss zu unterscheiden. Damit werden alle Unterschiede zwischen echten und generierten Daten langsam erkannt und behoben, sodass der Generator irgendwann Bilder generieren kann, die ähnlich zu den echten Bildern sind.

Stable Diffusion

Stable Diffusion ist eine andere, neuere Art Bilder zu generieren. Dazu werden echte Bilder genommen und Schritt für Schritt zerstört (z. B. durch Diffusion, also dem Ausgleich von benachbarten Unterschieden). Zusätzlich dazu existiert für das Bild eine textuelle Beschreibung. Ein neuronales Netzwerk lernt jetzt anhand der Beschreibung und der Folge an schlechter werdenden Bildern den inversen Schritt durchzuführen, d. h. Bilder stückweise zu reparieren.

Am Ende kann Stable Diffusion aus komplettem Rauschen ohne Struktur und einer Beschreibung ein Bild generieren, indem es etwas repariert, das vorher nie da war. Stable Diffusion ist aktuell das beste open source KI-Modell zur Bildgenerierung.

Literatur

[1] J. Alammar: *The Illustrated Stable Diffusion.*
URL: `hhttps://bit.ly/3rnUiio` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[2] W. Ertel & N. T. Black: *Grundkurs künstliche Intelligenz.* Springer (2013).

[3] J. McCarthy: *What is artificial intelligence* (2007).

[4] F. Meyer: *Sprachmodelle im Natural Language Processing.*
URL: `https://bit.ly/3rBzR1l` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[5] R. Rombach, A. Blattmann, D. Lorenz et al. »High-Resolution Image Synthesis with Latent Diffusion Models«. *2022 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR).* IEEE Computer Society. 2022 S. 10674–10685.

[6] G. Sanderson: *But what is a neural network? | Chapter 1, Deep learning.*
URL: `https://bit.ly/3PXRLVv` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[7] T. Scheffer & C. Sawade: *Statistische Sprachmodelle.*
URL: `https://bit.ly/4689P4M` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[8] R. Schmelzer: *NLU, NLG und NLP: Wie und wofür Sprache verarbeitet wird.*
URL: `https://bit.ly/3RLzNXH` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[9] Stable Diffusion Web: *Stable Diffusion Online*.
URL: `https://stablediffusionweb.com/#demo` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[10] M. Stadler: *Natural Language Processing*.
URL: `https://bit.ly/3EVXTqS` (aufgerufen am 14. 02. 2023).

[11] A. M. Turing: *I.—Computing Machinery an Intelligence*. Mind **LIX**(236) (1950) 433–460
URL: `https://doi.org/10.1093/mind/LIX.236.433`.

Gibt es überhaupt Zufall?
Eine theleologische Diskussion.

Henrik Valett & Wiete Valett

> Gott würfelt nicht.
>
> *(Albert Einstein)*

> Gott würfelt nicht nur, er wirft die Würfel sogar manchmal so, dass man sie nicht sehen kann.
>
> *(Stephen Hawking)*

Oft nennt man etwas Zufall, weil man es nicht versteht oder weil es einem zufällig erscheint, aber dann stellt sich unweigerlich die Frage, ob es Zufall überhaupt gibt. Denkbar wäre jedoch auch, dass ein göttliches Wesen alles vorherbestimmt hat oder dass die Welt sich wie eine deterministische Maschine verhält, die wir nur nicht gut genug verstehen. Wir werden hier einen kleinen Einblick in die Themen »theologische Kontingenz« und »mechanistisches Weltbild« geben. Da der Zufall in der Regel nur erkennbar ist, wenn er in Bezug auf eine vorgegebene Ordnung betrachtet wird, soll im zweiten Teil ein teleologisches Ordnungssystem vorgestellt werden. Vor diesem Hintergrund wollen wir klären, ob und inwiefern es Zufall geben kann, insbesondere in der Theologie.

Contingentia mundi: Zufall in der Schöpfungstheologie oder theologischer Determinismus?

Die Suche nach der Antwort auf die Existenzfrage des Zufalls beginnen wir mit der Frage, ob die Erschaffung der Welt aus schöpfungstheologischer Sicht als zufälliges Resultat bezeichnet werden kann. Im Buch Genesis steht geschrieben: »Am Anfang schuf Gott Himmel und Erde«, was von Theologen bis ins Mittelalter als Beweis für die Notwendigkeit der Existenz der Welt als Ganzem und der Art ihrer Beschaffenheit interpretiert wurde. Die Diskussion über eine zufällige Welt wurde nicht thematisiert, da der Akt der göttlichen Schöpfung durch die Heilige Schrift in Einzelheiten belegt und erläutert war. Erst in der Scholastik (Hochphase ca. 1150–1300) wurde die Methode der Beweisführung mittels der heiligen Schriften hinterfragt und durch neue Methoden ersetzt. Das Verfahren zur Beantwortung einer Fragestellung mittels der scholastischen Methode beinhaltet die Gegenüberstellung zweier konträrer Positionen und ihrer unterstützenden Argumente bezüglich einer theoretischen Fragestellung. Der Prozess der Wahrheitsfindung besteht dabei aus einer auf die Gegenüberstellung folgenden Verkündung der zukünftig geltenden Lehrmeinung sowie der Entkräftigung der Argumente der unterlegenen Seite. Ein berühmter Vertreter der Scholastik war der italienische Theologe Thomas von Aquin (1225–1274), welcher mittels der scholastischen Methode fünf Gottesbeweise führte. Dabei erlangte er die Erkenntnis, dass Gott der Erschaffer und Erhalter der Welt und der Gedanke der Weltschöpfung eine rationale aber nicht notwendige Konsequenz sei. Durch die theologischen Werke von Thomas von Aquin kommt es zu einer Auffassung von Gott als frei handeldem Wesen, welches die Welt als Ganzes genausogut auch nicht hätte erschaffen können. Vor diesem Hintergrund wird vom Begriff der Kontingenz, also einer nicht notwendigen, aber auch nicht völlig unmöglichen Existenz der Welt (*contingentia mundi*) gesprochen. Der Begriff der Kontingenz sollte dabei jedoch nicht als Zufall missinterpretiert werden, da die Theologen und Philosophen der Scholastik davon ausgingen, dass alle Resultate der göttlichen Schöpfung durch rationales Handeln erzeugt wurden. Man spricht in diesem Kontext auch vom theologischen Determinismus, wenn Gott als erste Bewegung einer alles vorherbestimmenden Kausalitätskette interpretiert wird.

Mechanistisches Weltbild

Auch außerhalb der Theologie findet sich die Vorstellung einer deterministischen, vorherbestimmten Welt etwa in Form des mechanistischen Weltbildes. In diesem Weltbild werden Gegebenheiten und Geschehnisse durch mechanische Vorgänge, wie zum Beispiel Bewegung, Stoß und Druck, erklärt. Es ist das Weltbild der klassischen Physik und war vor allem in der Zeit der Aufklärung weit verbreitet. Die Vorstellung, dass sich alles durch Gesetzmäßigkeiten erklären lässt, wurde häufig an Maschinen, insbesondere an Uhren, veranschaulicht. So sagte Kepler (1571–1630) im Jahr 1605: »Mein Ziel [...] ist es zu zeigen, dass die himmlische Maschine nicht eine Art göttliches Lebewesen ist, sondern gleichsam ein Uhrwerk [...]« (HEIDELBERGER & THIESSEN [4]). Diese Denkweise wurde oft auf die Welt als Ganzes übertragen. Descartes (1596–1650) betrachtete sogar Tiere als Maschinen, deren Bewegungen und Handlungen vollständig determiniert sind. La Mettrie (1709–1751) dehnte dies 1747 auf den Menschen aus. Es ist wichtig zu verstehen, dass in diesem Weltbild alles deterministisch ist und somit Zufall per se nicht auftritt. Die Theologie wurde jedoch dabei nicht zwangsläufig ausgeschlossen, sondern oft mit dieser Auffassung verbunden, indem Gott die Maschinen geschaffen hat und in einigen Fällen sogar ständig für ihre »Wartung« und Veränderung verantwortlich ist. Man kann ihn sich also gewissermaßen als »Uhrmacher« vorstellen.

Es stellt sich nun die Frage, wie es zu dieser Mechanisierung des Weltbildes kam. Auch wenn es schon lange vorher Ideen in diese Richtung gab, begann die Entstehung des mechanistischen Weltbildes, wie wir es hier betrachten, vor allem mit Kopernikus' berühmtem *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) und erreichte schließlich mit Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) ihren Höhepunkt. In dieser Zeit fand vor allem eine Mathematisierung der Physik statt, und als Newton (1643–1726) mit seinen Theorien zur Gravitation und Mechanik einfache, allgemein gültige Formeln fand, entwickelte sich die Idee, dass dies überall möglich sei. Diese Idee einer alles erklärenden Weltformel, mit der sich Vergangenheit und Zukunft vollständig vorhersagen lassen, drückt Laplace (1749–1827) in seinem Bild vom Laplaceschen Dämon aus: »Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Universums als Folge eines früheren Zustandes ansehen und als Ursache des Zustandes, der danach kommt. Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, mit denen die Welt begabt ist, und die gegenwärtige Lage der Gebilde, die sie zusammensetzen, und die überdies umfassend genug wäre, diese Kenntnisse der Analyse zu unterwerfen, würde in der gleichen Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper und die des leichtesten Atoms einbegreifen. Nichts wäre für sie ungewiss, Zukunft und Vergangenheit lägen klar vor ihren Augen.«(LAPLACE [6])

Existenz von Teleologie

Der Physiker Albert Einstein (1879–1955) schrieb sinngemäß in einem Briefwechsel: ‚Gott würfelt nicht' (siehe EINSTEIN, BORN & BORN [2]), um seine Überzeugung auszudrücken, dass die Welt, insbesondere die Quantenmechanik, durch deterministische Gesetze der Physik erklärt werden könnte. Da aber der Determinismus Zufälle bereits per Definition ausschließt, wollen wir eine Ordnungsstruktur finden, bezüglich welcher wir später Zufälle analysieren können. Denn komplett ohne Regeln lässt sich Zufall nicht feststellen. Mutationen im DNA-Strang beispielsweise können nur als solche erkannt werden, wenn wir die Regeln für dessen Aufbau kennen. In der Teleologie wird oft davon ausgegangen, dass Dinge, Lebewesen und Prozesse in Entstehung und Entwicklung zielorientiert ablaufen, anders als beim Determinismus werden Zufälle aber nicht prinzipiell ausgeschlossen. Bei Prozessen wird als Gegenargument für Teleologie zwar angeführt, dass die Reversibilität mancher Prozesse der geforderten Zielgerichtetheit entgegensteht. Entkräftet werden kann dieses Argument aber zum Beispiel mit Bezug auf die Gesetze der Mechanik, da viele Prozesse zwar rechnerisch umkehrbar sein können, aber in der Realität durch die Zeit-Irreversibilität oft nicht zurück in den vorherigen Zustand versetzt werden können. Beispielsweise kann ein fallender Stein nicht in seinen Anfangszustand zurückgesetzt werden, auch wenn dieser Zustand berechnet werden könnte. Ein weiteres Argument für die Existenz von Zielgerichtetheit sind chemische Reaktionen, welche durch statistische Gesetze bestimmt sind und dadurch auch rechnerisch nicht bestimmt werden kann, wie der vorherige Zustand wiederhergestellt werden könnte. Im menschlichen Handeln und somit im Menschen selbst kann am leichtesten Zielgerichtetheit erkannt werden. Schwieriger ist die Frage der Teleologie bei Dingen oder Lebewesen ohne beziehungsweise mit nur beschränktem Bewusstsein. Zugvögel legen tausende Kilometer zurück, um im Winter zu überleben. Auch wenn Tiere keine rationalen Entscheidungen treffen, so kann man ihren Instinkt als zielgerichtet interpretieren, indem man Überlebenswille als übergeordnetes Ziel ansieht. Objekte haben zwar keine Intention im Sinne von Individuen. Trotzdem kann bei einigen Objekten ein Prozess des »Werdens«, wie das Wachstum von Eiskristallen an einem eingefrorenen Fenster oder die Entstehung von Wolken, beobachtet werden. Diese Beispiele können durchaus als zielgerichtete Entwicklungen angesehen werden.

Existenz von Zufall

Der Physiker Stephen HAWKING [3] (1942–2018) schrieb bezogen auf das oben zitierte Diktum von Albert Einstein sinngemäß: ‚Gott würfelt nicht nur, er wirft die Würfel sogar manchmal so, dass man sie nicht sehen kann.' Dies wird so gedeutet, dass Hawking an die Existenz von Zufall in der Quantenmechanik glaubte, aber anzweifelte, dass es mit aktuellen wissenschaftlichen Methoden möglich sei, jeden Zufall auch als solchen zu erkennen. Die Annahme einer deterministischen Welt und insbesondere die Vorhersagbarkeit durch die Gesetze der Mechanik ist, auf den ersten Blick, ein Widerspruch zur Existenz von Zufall. Bei genauerer Betrachtung stellt man jedoch fest, dass zwar Bewegungen, wie die Rotation von Planeten, exakt vorhersagbar sind, häufig aber keine bekannten Gesetzmäßigkeiten die für die Berechnungen benötigten Anfangs- oder Randbedingungen, wie zum Beispiel die Masse des Rotationskörpers, erklären. Mittels statistischer Gesetze können wir zwar auf Makroebene mit hoher Wahrscheinlichkeit Vorhersagen über große Ansammlungen von Objekten treffen. Auf Mikroebene, also für einzelne Objekte des Systems, kann aber nicht immer eine exakte Vorhersage über deren Zustände getroffen werden. Deshalb wird in diesem Kontext auch von zufälligem Verhalten auf Mikroebene gesprochen. Ein Beispiel liefert die Betrachtung gewisser Mutationen innerhalb einer Population. Zwar kann die Mutationsrate mit statistischen Gesetzen bestimmbar sein, es ist jedoch nicht möglich, eine exakte Vorhersage darüber zu treffen, welche Individuen nun von der Mutation betroffen sein werden und welche nicht. Das bekannteste Argument gegen vermeintliche Zufälle auf Mikroebene bei statistischen Gesetzen und bei Anfangsbedingungen bei den Gesetzen der Mechanik ist die Theorie über die Existenz von unbekannten Variablen. Vertreter dieser These gehen davon aus, dass unbekannte Parameter für deterministische Gesetzmäßigkeiten, die zufälliges und unregelmäßiges Verhalten erklären würden, existieren. Jedoch könnten diese unbekannten Variablen mit aktuellen Methoden der Wissenschaft nicht bestimmt oder gemessen werden. Der Physiker John Steward Bell (1928–1990) analysierte 1964 das Konzept des »lokalen Realismus«. Diese Theorie des Physikers Albert Einstein geht davon aus, dass in der Quantenmechanik alle Teilchen durch exakte Werte beschrieben werden können, wie es auch in der klassischen Physik möglich ist. Mit der Bellschen Ungleichung (1964) beschreibt Bell mittels eines Gedankenexperiments über Teilchenpaare einen Widerspruch zur These von Einstein. Experimentell konnte das Gedankenexperiment zum ersten Mal 1972 bestätigt werden. Seitdem gilt das Konzept des »lokalen Realismus« unter den Annahmen von Albert Einstein als widerlegt.

Ist schöpfungstheologische Kontingenz mit der Existenz von Zufällen in den Naturwissenschaften kompatibel?

Die Suche nach der Antwort auf die Existenzfrage des Zufalls beenden wir mit der Frage, ob es möglich ist, sich einen schöpfungstheologischen Kontingenzbegriff zu bewahren und gleichzeitig die Existenz von Zufall zuzulassen. Joseph

Ratzinger (1927–2022), der ehemalige Papst Benedikt XVI., beschreibt eine Position, gemäß der sich Schöpfungsglaube und Evolutionstheorie mit unterschiedlichen Fragestellungen beschäftigen. Demnach behandle Schöpfungsglaube die Frage nach dem Grund der Existenz und Evolutionstheorie die Frage nach dem Grund der Art der Existenz. Im Allgemeinen interpretiert die Theologie die göttliche Schöpfung als eine Schaffung aus dem Nichts (*creatio ex nihilo*) und die Erhaltung des Geschaffenen (*creatio continua*), was die Frage der Evolutionstheorie jedoch mit einschließt.

Der evangelische Theologe Wolfhart Pannenberg (1928–2014) folgert in seiner Theologie der Natur, dass die Welt nicht gänzlich durch deterministische Erklärungen und Gesetzmäßigkeiten beschreibbar sei. Er interpretiert kontingente Unregelmäßigkeiten, welche göttliches Wirken in der kontinuierlichen Schöpfung ermöglichen, als Notwendigkeit, um naturwissenschaftliche Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. So stehen Unregelmäßigkeiten, welche auch als Zufälle interpretiert werden könnten, nicht im strikten Gegensatz zu einer schöpfungstheologischen Sichtweise. Auch William James [5] (1842–1910) sieht die Möglichkeit für Zufall in der göttlichen Vorhersehung. In seinem Werk *Das Dilemma des Determinismus* schreibt der Psychologe und Philosoph über die Vorhersehung: Ist es ihr erlaubt »Möglichkeiten sowohl wie Wirklichkeiten für das Universum vorherzusehen und ihr eigenes Denken in diesen Kategorien zu vollziehen, [...], dann kann es Zufall geben, [...], der Ablauf des Universums kann wirklich zwei Möglichkeiten enthalten, und dennoch kann das Endziel aller Dinge genau das sein, was die Vorhersehung von aller Ewigkeit her als solches beabsichtigt.« William James erläutert dies am Beispiel eines Schachspiels zwischen einem Anfänger und einem Meister. Der Meister, so James, habe die Fähigkeit, jedes Spiel gegen den Anfänger zu gewinnen, und kennt somit den Ausgang des Spiels bereits, bevor gespielt wird. Trotzdem kennt der Meister den Verlauf des Spiels nicht, da er die Züge des Anfängers nicht vorherbestimmen kann. Das Synonym für die Vorhersehung ist der Meister, während der Anfänger für unvorhersehbare Ereignisse steht. Für die göttliche Vorhersehung ergäbe sich in diesem Kontext die Konsequenz, dass diese nicht zeitlos oder allwissend sein könne, was über viele Epochen eine in der Theologie vorherrschende Meinung war. Ihr wird nun die Eigenschaft zugeschrieben, auf menschliches Handeln reagieren zu können, um den Weg zum Endziel immer wieder anpassen zu können.

Literatur

[1] E. J. Dijksterhuis: *Die Mechanisierung des Weltbildes.* Springer (1983).

[2] A. Einstein, H. Born & M. Born: *Briefwechsel 1916-1955.* Rowohlt (1972).

[3] S. W. HAWKING: *Einsteins Traum: Expeditionen an die Grenzen der Raumzeit*. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg (1993).

[4] M. HEIDELBERGER & S. THIESSEN: *Natur und Erfahrung: von der mittelalterlichen zur neuzeitlichen Naturwissenschaft*. Rowohlt (1981).

[5] W. JAMES: *Essays über Glaube und Ethik*. Bertelsmann (1948).

[6] P. S. D. LAPLACE: *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Deutsch (1996).

[7] P. VOGT: *Kontingenz und Zufall: Eine Ideen-und Begriffsgeschichte*. De Gruyter (2011).

[8] P. WEINGARTNER: *Nature's Teleological Order and God's Providence: Are they compatible with chance, free will, and evil?* De Gruyter (2014).

[9] G. WENZ: *Theologie der Natur: Zur Konzeption Wolfhart Pannenbergs*. Vandenhoeck & Ruprecht (2019).

Everlasting Entropy - Warum strebt das Universum nach Langeweile?

Manuel Lubetzki

Irreversible Prozesse

Eine heiße Tasse Tee kühlt ab, Milch, die man in Kaffee schüttet, mischt sich mit diesem und CO_2 strömt aus einer frisch geöffneten Flasche Sprudel. Umgekehrt beobachten wir diese Prozesse jedoch nie. Dabei wären sie energetisch sehr wohl möglich. Beim Öffnen einer Flasche, die unter Druck steht, geht keinerlei Energie verloren.

Es gibt sogar noch gewichtigere Gründe dafür, warum man naiverweise annehmen müsste, auch die Umkehrung solcher Prozesse beobachten zu können. Die Gesetze der klassischen Mechanik sind zeitumkehrbar. Genauer gesagt: Drehen wir zu einem bestimmten Zeitpunkt die Geschwindigkeiten aller Teilchen eines Systems schlagartig um und betrachten die weitere Zeitentwicklung des Systems, so sieht es aus, als würde es sich plötzlich wieder in der Zeit zurückentwickeln. Die Gesetze der klassischen Mechanik sind also prinzipiell reversibel.

Schlimmer noch: Der Wiederkehrsatz von POINCARÉ [5] besagt sogar, dass wenn man lange genug wartet, solches Verhalten früher oder später auftreten muss. Wie kann es dann sein, dass gewisse Prozesse dennoch nur in einer Richtung ablaufen?

Entropie

Entropie! Das ist die Antwort, die uns die Thermodynamik auf diese Frage bietet. Umgangssprachlich wird Entropie häufig als »Maß für Unordnung« beschrieben. In der Thermodynamik definieren wir sie axiomatisch als folgende Größe:

$$S = \int_\gamma \frac{\delta Q}{T}$$

Hierbei ist δQ die Wärme, die ein System an seine Umgebung abgibt und T die Temperatur, die es zu diesem Zeitpunkt hat. Zusätzlich legt man in der Thermodynamik die drei Hauptsätze zugrunde, wobei in unserem Fall der zweite von besonderem Interesse ist:

> Wenn ein isoliertes System von einem Gleichgewichtszustand A in einen anderen Gleichgewichtszustand B übergeht, kann die thermodynamische Entropie nicht kleiner werden.

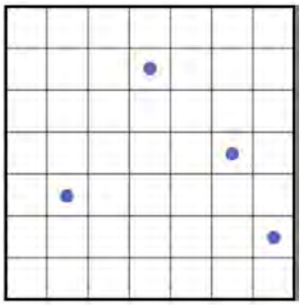
Rechnen wir konkret die oben beschriebenen Szenarien im Rahmen der Thermodynamik einmal durch, fällt uns tatsächlich auf: In jedem dieser Prozesse wurde die Entropie des Gesamtsystems größer und nie kleiner. Diese Erklärung ist allerdings aus mehreren Gründen unbefriedigend: Die Definition der Entropie wirkt zunächst unmotiviert und ad-hoc. Außerdem ist der zweite Hauptsatz eine steile Behauptung. Empirisch scheint er sich bewährt zu haben, aber eigentlich haben wir ihn axiomatisch angenommen. Es wäre wünschenswert, ihn *nur aus den Annahmen der klassischen Mechanik* herzuleiten!

Entropie in der statistischen Physik

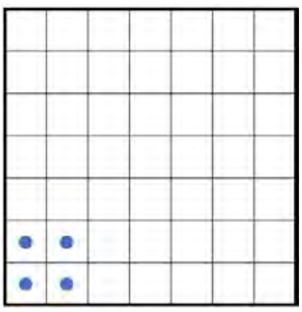
Diesem Unterfangen widmet man sich in der statistischen Physik. Doch wie gehen wir dieses Problem an? Und wie lässt sich eine Aussage wie der zweite Hauptsatz (der die Existenz irreversibler Prozesse postuliert) mit der Reversibilität der klassischen Mechanik in Einklang bringen? Zunächst bietet es sich an, eine Definition von Entropie zu finden, die wir auf Systeme der klassischen Mechanik anwenden können. Wir wählen hier die Boltzmann-Entropie (siehe dazu BOLTZMANN [1] u. PLANCK [4]), deren grundlegende Idee sich an folgenden Beispiel erklären lässt.

Wir betrachten ein stark vereinfachtes Modell eines idealen Gases mit 4 Teilchen, das sich in einer perfekt isolierenden, 2-dimensionalen Box befindet.

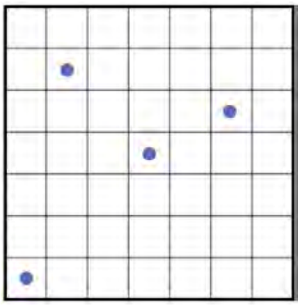
Zusätzlich diskretisieren wir den Raum und nehmen für einen Moment an der gesamte Zustand des Gases ist lediglich durch die Positionen der Teilchen beschrieben (wir ignorieren also die Geschwindigkeiten der Teilchen).



Nun gibt es Zustände des Systems, die wir als »ordentlicher« beschreiben würden:

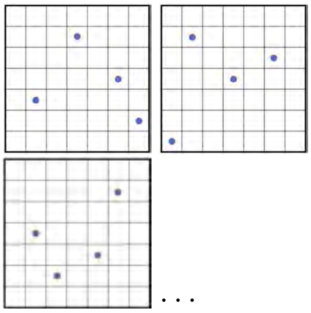


und welche, die wir als »unordentlicher« beschreiben würde:



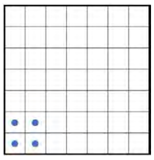
Listen wir alle möglichen Zustände auf, bei denen sich das Gas vollständig geordnet in einer Ecke der Box befindet und vergleichen diese mit der Anzahl an Zuständen, bei denen das Gas »zufällig« über die ganze Box verteilt ist, fällt auf, dass es weniger Zustände gibt, in denen das Gas vollständig geordnet ist.

Ungeordnet



. . .

Geordnet



Wir bezeichnen fortan eine einzelne Systemkonfiguration (eine Liste der Positionen aller Teilchen) als Mikrozustand und ordnen »ähnlichen« Mikrozuständen jeweils einen Makrozustand (»Gas ist in der linken unteren Ecke« oder »Gas ist homogen verteilt«) zu.

Formal definieren wir eine Funktion $M : Mikrozustand \to Makrozustand$, die jedem Mikrozustand seinen passenden Makrozustand zuordnet. Die Definition der Entropie eines Mikrozustandes ω ist dann

$$S = k_b \ln \left(|\omega|_M \right),$$

wobei $|\cdot|_M$ uns die Anzahl aller Mikrozustände gibt, die dem gleichen Makrozustand zugeordnet werden. Hier ist k_b ist lediglich eine Konstante. In Worten: Je mehr Mikrozustände es für einen Makrozustand gibt, desto höher ist seine Entropie.

Die Definition der Boltzmann-Entropie gibt uns nun schon eine Idee, warum der zweite Hauptsatz wahr sein könnte. Kombinatorisch gibt es viel mehr Möglichkeiten für ein hypothetisches Gas gleichmäßig in einem Container verteilt zu sein, als es Möglichkeiten gibt, sich geordnet in einer Ecke zu befinden. Bei alltäglichen Systemen haben wir es mit Teilchenzahlen der Größenordnung $N_A \approx 10^{23}$ zu tun, sodass diese Effekte noch wesentlich deutlicher ausfallen. Wenn wir jeden dieser Mikrozustände als gleichwahrscheinlich ansehen, so würde man erwarten, das Gas in den meisten Fällen in einem ungeordneten Zustand anzutreffen.

Zeitentwicklung

Doch Vorsicht! Unser Gas sucht sich nicht rein zufällig einen der Mikrozustände aus. Haben wir die Anfangsbedingungen des Gases zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben, so können wir mit den Gesetzen der klassischen Mechanik ganz genau vorhersagen, wie sich das Gas zeitlich entwickeln wird. Unser Ziel wäre also zu zeigen, dass für egal welche Anfangsbedingung wir wählen (ob Gleichgewichtszustand oder nicht), wir immer in Mikrozustände höherer Entropie übergehen werden. Doch diese Aussage führt unweigerlich zu Problemen. Wie wir bereits ganz zu Beginn festgestellt haben, sind die Gesetze der klassischen Mechanik vollständig reversibel. Das bedeutet: Betrachten wir eine beliebige Zeitentwicklung des Gases, die in einem Zustand niedriger Entropie startet und warten eine Weile ab, bis sich das Gas im Gleichgewicht befindet. Wählen wir nun diesen Zustand als Anfangsbedingung und drehen alle Geschwindigkeiten schlagartig um. Dann wissen wir bereits, dass das so beschrieben Gas die eben durchgemachte Entwicklung rückwärts durchlaufen wird! Wir haben also explizit einen Zustand konstruiert, der seine Boltzmann-Entropie verkleinert!

Und jetzt?

Die Lösung dieser verzwickten Situation wurde als erstes von Ludwig Boltzmann beschrieben (siehe BOLTZMANN [1, 2]). Wir können Systeme wie das eben konstruierte nicht wegdiskutieren - es gibt Anfangsbedingungen, die ihre Boltzmann-Entropie verkleinern. Stattdessen behauptet Boltzmann folgendes: Für *typische* Anfangsbedigungen nimmt die Entropie auf für uns relevanten Zeitskalen nicht ab. Finden wir ein natürliches Maß auf der Menge aller möglichen Anfangsbedingungen (in der klassischen Mechanik: das Liouville-Maß auf dem Phasenraum), so wird es für die überwältigende Mehrheit aller Anfangsbedingung der Fall sein, dass die Entropie nicht abnimmt. Anfangsbedingungen, wie die im vorigen Abschnitt konstruierten, stellen eine äußerst seltene Ausnahme dar, die wir bei großen Systemen also praktisch niemals sehen werden, weil es verglichen zu den *typischen* Anfangsbedingungen einfach viel zu wenige davon gibt.

Fazit

Auch wenn Boltzmann mit seiner Erklärung den wesentlichen Grundstein für Erklärungen dieser Art gelegt hat, sind solche Typizitätsaussagen für physikalisch interessante Systeme häufig noch ungelöste Probleme und nicht einfach zu beweisen. Beispiele, bei denen es gelungen ist, Aussagen dieser Art zu zeigen, sind etwa der Kac-Ring oder nicht-interagierende Gase (siehe DE BIEVRE & PARRIS [3]).

Literatur

[1] L. BOLTZMANN: *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze des mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht.* Kk Hof-und Staatsdruckerei (1877).

[2] L. BOLTZMANN: *Weitere studien über das wärmegleichgewicht unter gasmolekülen.* Kinetische Theorie II (1970) 115–225.

[3] S. DE BIEVRE & P. E. PARRIS: *A rigourous demonstration of the validity of Boltzmann's scenario for the spatial homogenization of a freely expanding gas and the equilibration of the Kac ring.* J. Stat. Phys. **168** (2017) 772–793.

[4] M. PLANCK: *Uber das Gesetz der Energieverteilung in Normalspectrum.* Ann. Phys. **4** (1901) 533–563.

[5] H. POINCARÉ: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.* Acta Math. **13**(1) (1890) A3–A270.

Ist das Chaos beherrschbar? - Beispiele aus Meteorologie, Fraktaler Geometrie und Computergrafik

Hannah Keller & Alexander Vinnen

Nur kleine Geister halten Ordnung, das Genie überblickt das Chaos.

(Albert Einstein)

Zusammenfassung: Wie hängen der Schmetterlingseffekt, ein System nicht linearer Differentialgleichungen, die Mandelbrot-Menge, Simulationen für Hollywoodfilme und Experimente mit Fischschwärmen zusammen? Anhand dieser auf den ersten Blick sehr verschieden wirkenden Themen wollen wir uns der Frage, ob das Chaos beherrschbar ist, nähern.

Die Erdatmosphäre als Beispiel chaotischer Dynamik

Atmosphärische Grundlagen

Das Wort meteorologia, griechisch für die »Untersuchung der Himmelskörper«, mag den einen oder anderen vielleicht im wissenschaftlichen Schwerpunkt der modernen Meteorologie täuschen. Die Meteorologie beschäftigt sich mit dem Aufbau und den Strömungen der Erdatmosphäre bis zu einer Höhe von in etwa 100 km, der sogenannten *Karman-Linie*. Deshalb wird dieser Forschungsbereich inzwischen meist als Atmosphärenwissenschaft bezeichnet.

Die Erdatmosphäre ist, wie das Wort bereits vermuten lässt, in Schichten, den *Sphären* und Trennschichten, den *Pausen*, aufgebaut. So befindet sich z. B. direkt über der Troposphäre die Tropopause.

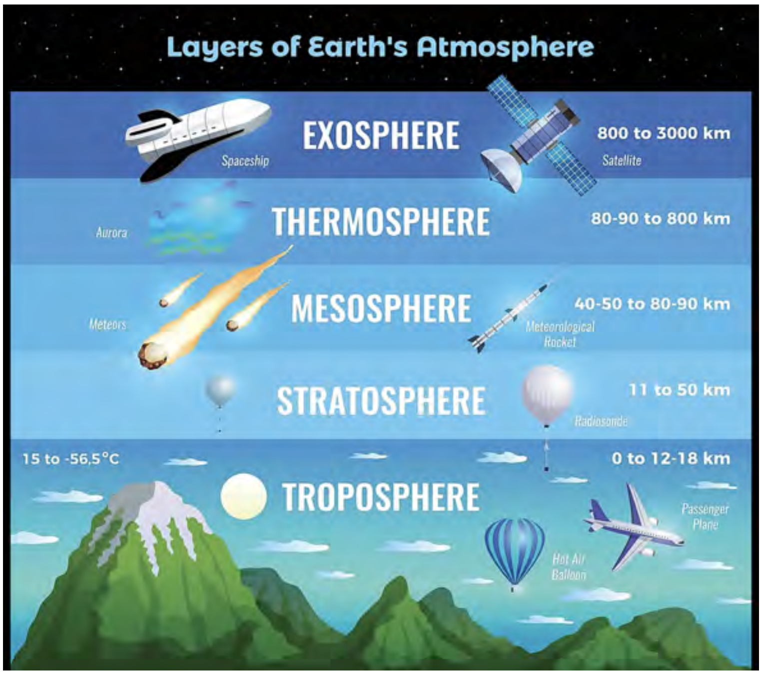


Abbildung 1: Aufbau der Atmosphäre in Schichten. Die Tropo-, Strato-, Meso- und Thermopause sind hier nicht dargestellt. URL: https://tinyurl.com/4wu26kdn, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Das Wettergeschehen des Erdsystems findet dabei im wesentlichen in der Troposphäre, d. h. zwischen ca. 8-11 km Höhe über dem Meeresspiegel, statt (siehe WALLACE & HOBBS [19]) (1). Aufgrund der wärmeren Temperaturen in den Äquatorial-Regionen besitzt die Luft dort eine geringere Dichte, was dazu führt,

(1) Man beobachtet jedoch auch vereinzelt Eiswolken in der Stratosphäre, auf die im folgenden allerdings nicht gesondert eingegangen wird.

dass die Troposphäre um den Äquator einige Kilometer höher reicht als in den Polarregionen. Für die Zirkulation entscheidend ist, dass die Troposphäre einen Temperaturgradienten besitzt: Von der Erdoberfläche aus fällt die Temperatur um ca. 40°C ab.

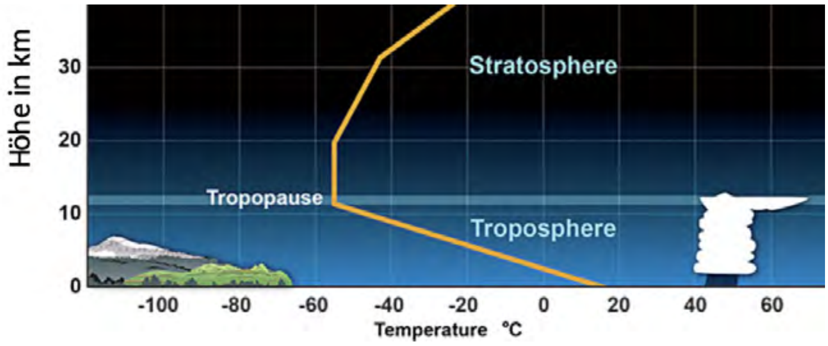


Abbildung 2: Temperaturgradient der Troposphäre, URL: https://tinyurl.com/v3k9eddw, zuletzt besucht am 14.10.2023.

In der Stratosphäre, die über der Trennschicht Tropopause liegt, beobachtet man von ca. 15-30 km Höhe einen Temperaturanstieg, der von der Ozonschicht, genauer der beim Ozonzyklus frei werdenden thermischen Energie, verursacht wird.

Atmosphärische Zirkulation

Konvektion oder Wärmeströmung beschreibt den Austausch von thermischer Energie in einem Fluid. Beobachtet man z. B. siedendes Wasser in einem Topf, kann man erkennen, dass in einem solchen System mit Temperaturgradienten ΔT, also dem Unterschied der warmen Herdplatte zur Raumtemperatur, zirkulierende Strömungen entstehen. Diese sich am Boden des Topfs formenden Strömungszellen werden Konvektionszellen genannt. Ihr genauer Entstehungsort und Größe ist abhängig vom jeweiligen System. Man kann sich das in etwa wie in Abbildung 3 vorstellen.

Die Zirkulation in der Troposphäre weist aufgrund des oben beschriebenen Temperaturgradienten vereinfacht dasselbe Phänomen wie der Kochtopf auf: Formation von längenkreisparallelen Konvektionszellen in der Troposphäre. Das Auftreten dieser Zellen ist symmetrisch, das heißt, dass sich sowohl auf der Nord- als auch auf der Südhemisphäre die Hadley-Zelle von 0° bis 30°, von 30° bis 60° die Ferrel-Zelle und von 60° bis zum Nord- bzw. Südpol die Polarzelle erstreckt, wie in Abbildung 4 zu sehen ist.

Hier findet sich allerdings bereits die erste Vereinfachung bei allen Modellierung des Wetters auf der Erde: Regionale Gegebenheiten, wie z. B. Land-See-

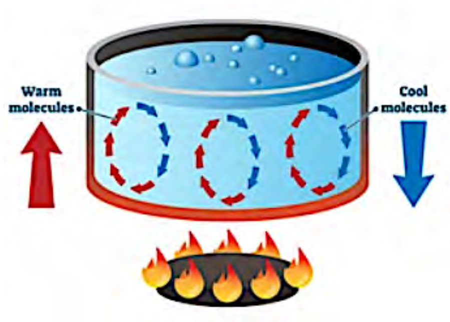


Abbildung 3: Illustration der Konvektionsströmungen, URL: https://tinyurl.com/yyms273s, zuletzt besucht am 14.10.2023.

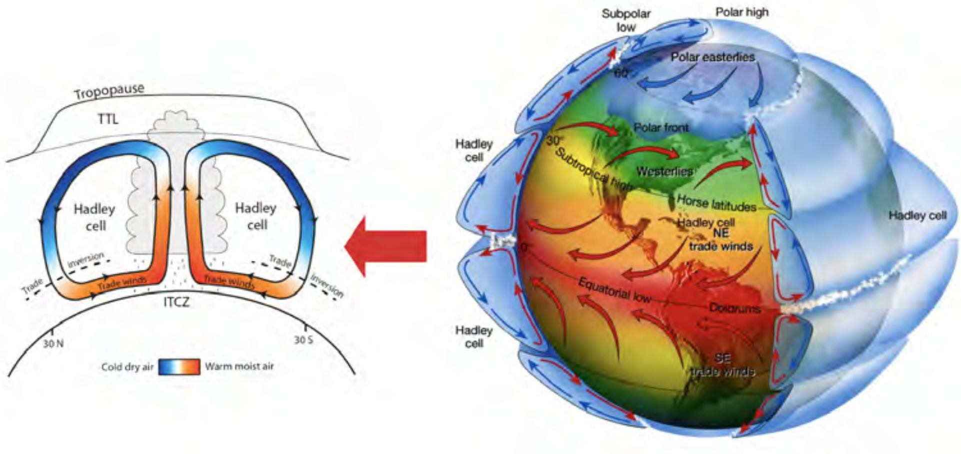


Abbildung 4: Illustration der atmosphärischen Zellen, URL: https://tinyurl.com/mpd8whe2, zuletzt besucht am 14.10.2023, [3].

Systeme, Wetterphänomene in Regionen mit hohem Relief und sogar die gesamte ozeanische Zirkulation, die auf die Atmosphäre z. B. mit Energietransportbändern wie dem Golfstrom einwirkt, werden vernachlässigt. Man kann natürlich einzelne Phänomene in ein erweitertes Modell mit einbeziehen, aber das wird für eine globale Zirkulations-Modellierung schnell sehr komplex und wird daher vor allem speziell für regionale Wettervorhersagen genutzt.

Was ist Chaos eigentlich?

Wir wollen uns nun dem Begriff »Chaos« nähern. Man unterscheidet hierbei in starkes (sog. *probabilistisches*) und schwaches (sog. *deterministisches*) Chaos. Während man unter starkem Chaos Zufalls- bzw. statistische Systeme wie z. B.

Münz- oder Würfelwurf, die gar keine Vorhersage zulassen, versteht, beschreibt schwaches Chaos die Eigenschaft eines Systems, nur zeitlich begrenzt genau vorhersagbar zu sein (siehe STÖCKLER [17]).

Das wohl einfachste deterministisch chaotische System ist das Doppelpendel-Experiment. Nachdem man ein solches Pendel in Bewegung gesetzt hat, ist der Bahnverlauf schon bald nach Bewegungsbeginn nicht mehr vorhersagbar. Häufig liegen thermodynamischen Ereignissen, wie z. B. Temperaturänderung in einem Gas, chaotische Verhaltensweisen zugrunde: Das Aufeinanderstoßen der einzelnen Teilchen ist aufgrund ihrer Bahnverläufe, die sich bei leicht variierten Anfangsbedingungen stark unterscheiden, nicht vorhersagbar, allerdings führt die Bewegung der Teilchen zum Anstieg der Temperatur. Unser Augenmerk soll im Folgenden auf Systemen, die turbulente Strömungen aufweisen, liegen. Denn diese weisen ebenfalls deterministisch chaotisches Verhalten auf, so auch das Wettergeschehen der Troposphäre (vgl. KAPPELHOFF [7] und SPEICHER [15]).

Theorie der schlecht gestellten Probleme

Um schwaches Chaos mathematisch gut zu beschreiben, lohnt es sich, einen Blick auf sogenannte schlecht gestellte Probleme zu werfen. Intuitiv ist ein schlecht gestelltes Problem eines, dessen Lösung entweder nicht existiert, dessen Lösung nicht eindeutig ist oder dessen Lösung hinsichtlich kleiner Veränderungen in den Anfangsbedingungen instabiles Verhalten aufweist. Nicht-Existenz oder -Eindeutigkeit sollen an dieser Stelle für unsere Betrachtungen keine Rolle spielen.

Will man ein schlecht gestelltes Problem nun etwas mathematisch rigoroser fassen, kann man die Definition des französischen Mathematikers Jaques Hadamard (1865 - 1963) zur Rate ziehen.

Hadamard definiert zunächst ein schlecht gestelltes Problem bezüglich einer Operator-Gleichung und konkretisiert die drei oben genannten Eigenschaften wie folgt:

Seien X und Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein Operator von X nach Y. Dann wird ein schlecht gestelltes Problem mit einer der drei Eigenschaften charakterisiert:

(i) Nicht-Existenz der Lösung: A ist nicht surjektiv

(ii) Nicht-Eindeutigkeit der Lösung: A ist nicht injektiv

(iii) Instabilität der Lösung: A^{-1} ist nicht stetig

Aufgrund der Eigenschaft (iii) des betrachteten Operators, werden schlecht gestellte Probleme auch häufig als instabile oder inverse Probleme bezeichnet (siehe dazu zum Beispiel Engel & Nagel [2], Kappelhoff [7] und Srinivasamurthy [16]).

Der Schmetterlingseffekt

Der US-amerikanische Meteorologe Edward Lorenz [11] (1917 - 2008) stellte in seinem Vortrag bei der 139. Konferenz der American Association for the Advancement of Science die provokative Frage: »Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Wirbelsturm in Texas auslösen?« (2) und beantwortete sie in seinem Buch *The Essence of Chaos* mit ja.

Diese allgemein bekannte Metapher steht für die grundlegende Eigenschaft der atmosphärischen Zirkulation, extrem *sensitiv* auf kleine Änderungen der Anfangsbedingungen, wie z. B. Bewegungen der Luft durch den Flügelschlag eines Schmetterlings, zu reagieren.

Als Lorenz seine Wettermodellierungs-Software testete, lieferte das Programm ab einem gewissen Punkt im zeitlichen Verlauf stark unterscheidende Berechnungsresultate unter der Eingabe vermeintlich gleicher Daten einer Wetterstation. Nach einem kurzen Check wurde deutlich, dass es sich beim zweiten Datensatz nicht um exakt dieselben Messwerte, sondern um auf eine Nachkommastelle gerundete Daten handelte. Hier wurden also für Lorenz zum ersten Mal die Details in den Anfangsbedingungen, sprich die *Sensitivität* der atmosphärischen Zirkulation, sichtbar (vgl. Ghys [4]).

Das Lorenz-System

Die Lorenz-Gleichungen, auch häufig Grundgleichungen der atmosphärischen Zirkulation genannt, sind ein von Edward Lorenz entwickeltes Modell, bestehend aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zur zweidimensionalen Beschreibung der atmosphärischen Konvektion, das als Grundlage für Wettervorhersagen dient. Das DGL-System basiert auf den Navier-Stokes-Gleichungen und enthält drei experimentell ermittelte Konstanten (siehe Wiedemann & Skipper [20]) (3).

Die Prandtlzahl σ beschreibt hierbei das Verhältnis von Impulstransport zu Energietransport, β ist verknüpft mit der Höhe der betrachteten Luftschicht und die Rayleighzahl beschreibt die Wärmeübertragung innerhalb der Atmosphäre, d. h. ϱ ist proportional zu ΔT. In den drei Gleichungen ist x ist proportional zur

(2) übersetzt aus Lorenz, Eward. The Essence of Chaos. 1963. S.181

(3) Mit den Navier-Stokes-Gleichungen werden turbulente Strömungen modelliert.

Intensitätsänderung der Konvektion, y zur horizontalen Temperaturänderung und z zur vertikalen Temperaturänderung. Die drei Gleichungen lauten

(i) $\frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y)$,

(ii) $\frac{dy}{dt} = \varrho x - y - xz$,

(iii) $\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$.

Häufig wird im Zuge des Lorenz-Systems auch der Begriff Lorenz-Attraktor genannt. Ein Attraktor gibt das Langzeit-Verhalten eines dynamischen Systems wieder und ist dementsprechend dasjenige Gebiet im Phasenraum des betrachteten Systems, auf das sich die Entwicklungslinien (*Trajektorien*) eines dynamischen Systems im Zeitverlauf zubewegen (vgl. LÜCK [12]).

Der Lorenz-Attraktor ist aufgrund der Instabilität des DGL Systems (4) ein sog. *seltsamer Attraktor*, d. h. seine Dimension ist *fraktal*. So wird seine Hausdorff-Dimension auf $\dim_H \approx 2.062$ geschätzt (siehe dazu VISWANATH [18] und LORENZ [10]) (5).

Stabilitätsanalyse des Lorenz-Systems

Da die Rayleighzahl ϱ proportional zu ΔT ist, wird die Lösung des DGL Systems in Abhängigkeit von ϱ bestimmt. Im Folgenden wird $\sigma = 10$ und $\beta = \frac{8}{3}$ genutzt und wir beschränken uns auf positive reelle ϱ. Zunächst werden die folgenden stationären Punkte P_1, P_2 und P_3 des Systems ermittelt:

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$P_2 = \left(\sqrt{\tfrac{8}{3}(\varrho - 1)}, \sqrt{\tfrac{8}{3}(\varrho - 1)}, \varrho - 1\right)$$

$$P_3 = \left(-\sqrt{\tfrac{8}{3}(\varrho - 1)}, -\sqrt{\tfrac{8}{3}(\varrho - 1)}, \varrho - 1\right)$$

Mit dem Punkt P_1 wird nun exemplarisch eine Stabilitätsanalyse durchgeführt. Es wird also eine sehr kleine Abweichung $\delta\vec{v}(t)$ von P_1 betrachtet, um das Verhalten des DGL Systems der Nähe der kritischen Punkte zu untersuchen. Dazu wird eine Taylor-Approximation erster Ordnung der Form $\frac{d}{dt}\delta\vec{v}(t) = J\delta\vec{v}(t) + \mathcal{O}(\delta\vec{v}^2)$ in unmittelbarer Nähe des kritischen Punkts durchgeführt, wobei J die Jacobimatrix des DGL Systems bezeichnet. Nach Substitution von $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}, \varrho \in (0, \infty)$ erhält man also

(4) vgl. mit folgendem Abschnitt: »Stabilitätsanalyse des Lorenz-Systems«

(5) Mehr zu Fraktalen siehe im Abschnitt »Die Fraktale Dimension«

$$J\delta\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -z+\varrho & -1 & -x \\ y & x & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} \delta\vec{v}\,(t)$$

.

Nun werden die Eigenwerte λ zu $J\delta\vec{v}\,(t)$ bestimmt, um anschließend die Richtungen der Eigenvektoren an den Knotenpunkten des DGL Systems zu untersuchen. Man erhält

$$\det\left(J - \lambda\mathbb{I}\right) = \left(-\frac{8}{3} - \lambda\right)\left(\lambda^2 + 11\lambda - 10\left(\varrho - 1\right)\right) = 0$$

die drei Eigenwerte $\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \lambda_2 = \frac{-11-\sqrt{81+40\varrho}}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{-11+\sqrt{81+40\varrho}}{2}$ (siehe HELFMEIER [5] und LORENZ [10]). (6)

Interpretation der Eigenwerte

Zum stets negativen Eigenwert $\lambda_1 = -\frac{8}{3}$ sind die Eigenwerte λ_2 und λ_3 in Abhängigkeit von $\varrho \in (0, \infty)$ zu betrachten. Für $\varrho < 1$ wird $\frac{-11\sqrt{81+40\varrho}}{2} < 0$ sowie $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Dies führt dazu, dass alle drei Eigenwerte reell bleiben und negativ werden, d. h., dass die Eigenvektoren in Richtung des Gleichgewichtspunkts P_1 zeigen. In dieser Situation spricht man von einem asymptotisch stabilen Knoten. Für $\varrho = 1$ tritt ein Grenzfall auf, da zum negativen Eigenwert λ_1 der negative Eigenwert $\lambda_2 = -11$ hinzukommt, allerdings gilt $\lambda_3 = 0$. Hier fehlt also Information über die Richtung des dritten Eigenvektors und man müsste zur zweiten Ordnung der Approximation übergehen.

Der dritte Fall $\varrho > 1$ führt uns mit $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ und $\lambda_3 > 0$ zum chaotischen Verhalten des Systems, da hier ein sogenannter instabiler Knoten vorliegt: Zwei der drei Eigenvektoren zeigen in Richtung des kritischen Punkts und einer von ihm weg. Instabile Knotenpunkte bei einer Stabilitätsanalyse zeigen, dass ein im Hadamardschen Sinne instabiles Problem und damit chaotisches Verhalten vorliegt.

Die Tabelle auf der folgenden Seite visualisiert die Stabilitätsanalyse auch für die weiteren kritischen Punkte P_2 und P_3.

Die Analyse ergibt, dass man spätestens ab einem Wert von $\varrho \gtrapprox 24.737$ instabile Knotenpunkte für alle drei kritischen Punkte erhält, was trotz der Vereinfachung des Modells der atmosphärischen Zirkulation darauf schließen lässt, dass das System Atmosphäre ein instabiles, chaotisches Verhalten zeigt.

(6) Eine Ausführung Lösungsmethode siehe im Paper Deterministic Nonperiodic Flow von Lorenz sowie in der Bachelorarbeit von Helfmeier

ϱ	P_1	P_2	P_3
$\varrho < 1$	asympt. stabil	/	/
$1 \lessapprox \varrho \lessapprox 1.345$	instabil	asympt. stabil	asympt. stabil
$1.345 \lessapprox \varrho \lessapprox 24.737$	instabil	asympt. stabil	asympt. stabil
$24.737 \lessapprox \varrho$	instabil	instabil	instabil

Beispiele aus Fraktaler Geometrie und Computergrafik

Einleitung zu fraktaler Geometrie

Der Mathematiker Benoît Mandelbrot wird gemeinhin als Vater der fraktalen Geometrie angesehen. Mandelbrot beschrieb die Mandelbrot-Menge und formulierte den Begriff »fraktal«. Er lieferte Beiträge zu einem breiten Spektrum mathematischer Probleme, insbesondere in der theoretischen Physik, der Finanzmathematik und der Chaosforschung. Sein bewegtes Leben als Kind einer litauisch-jüdischen Familie mit akademischer Tradition, führte ihn nach dem Zweiten Weltkrieg nach Paris, wo er am an der École polytechnique von 1945 bis 1947 Ingenieurwissenschaften studierte. Gaston Julia und Paul Lévy, die zu dieser Zeit zu seinen Dozenten gehörten, sollten im Weiteren noch eine wesentliche Rolle für die Entwicklung seines eigenen Werkes spielen. Von 1947 bis 1949 studierte er am California Institute of Technology, wo er seinen Master-Abschluss in Aeronautik erwarb. 1958 trat Mandelbrot in die Forschungsabteilung des IBM Thomas J. Watson Research Center in Yorktown Heights, New York, ein. Er blieb 35 Jahre lang bei IBM, wurde IBM Fellow und später Fellow Emeritus. Es gab lange Zeit eine vorherrschende Meinung unter Mathematikern, dass fraktale Muster nur ein nutzloses Computerartefakt seien. Mandelbrot war allerdings überzeugt, dass die fraktale Geometrie einen eigenen Zweig der Geometrie, ähnlich wie die euklidische Geometrie darstellt. Mandelbrot veröffentliche als Antwort auf seine Kritiker 1983 sein Buch »The Fractal Geometry of Nature«. Er gab in diesem Buch viele praktische Anwendungsmöglichkeiten für seine fraktale Geometrie an (siehe WIKIPEDIA [21]).

Koch-Kurve

Die Koch-Kurve oder kochsche Kurve ist ein von dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch 1904 vorgestelltes Beispiel für eine überall stetige, aber nirgends differenzierbare Kurve(7). Es handelt sich bei ihr um eines der ers-

(7) bzw. sog. pathologische Funktion

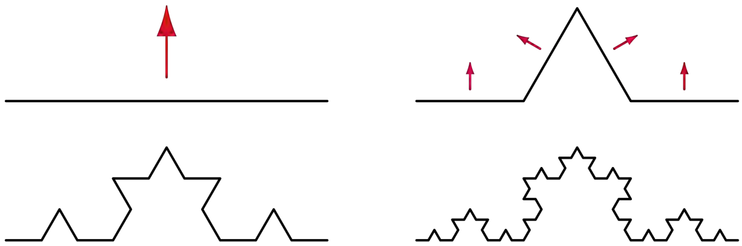


Abbildung 5: Erzeugung der Koch-Kurve durch das iterative Ersetzen von Streckenabschnitten an den roten Pfeilen. URL https://bit.ly/3QKcc8V, zuletzt besucht am 28.10.2023.

ten formal beschriebenen fraktalen Objekte. Die Koch-Kurve ist eines der am häufigsten zitierten Beispiele für ein Fraktal und wurde bei der Entdeckung als Monsterkurve bezeichnet. Der Begriff Monsterkurve wurde damals geprägt, weil sie sich als seltsame geometrische Form nicht in einen Fachbereich eingliedern ließ. Die Koch-Kurve ist auch in Form der kochschen Schneeflocke bekannt (siehe Wikipedia [22]).

> *»Gegeben sei eine Strecke, deren mittleres Drittel entfernt und durch die zwei anderen Seiten des gleichseitigen Dreiecks ersetzt wird.*
> *Wird diese Prozedur bei allen entstehenden Teilstrecken unendlich oft wiederholt, wobei sämtliche Dreiecksspitzen ›nach außen‹ zeigen sollen, erhält man eine Koch-Kurve.«* (Schwarz & Jersey [14]) (8)

Die britische Küstenlinie

Wie lang ist die britische Küstenlinie? Diese Fragestellung beschäftigte schon eine ganze Weile Mathematiker, bevor sich Benoît Mandelbrot der Fragestellung mit seiner Sichtweise näherte. Lange war die Herangehensweise für die Annäherung an eine Lösung, dass man die britische Küstenlinie als glatte Form idealisiert. Das Problem ist dabei allerdings, dass natürliche Formen nicht glatt sind. Benoit Mandelbrot erkannte in diesem Kontext, dass die immer feiner werdenden Einbuchtungen der Koch-Kurve als selbstähnliche Struktur eine neue Möglichkeit boten, die britische Küstenlinie darzustellen. Mandelbrot stellte bei seiner Betrachtung fest, dass die britische Küstenlinie geometrisch gesehen ein

(8) siehe hierzu: Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension – Dokumentation USA 2008 | arte

Abbildung 6: Die Vermessung der britischen Küstenlinie, URL https://bit.ly/3oFhQxq, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Fraktal ist. Mandelbrot baute seine Arbeit dabei auf dem Verständnis von Dimension von Hausdorff und Minkowski auf. Obwohl Mandelbrot klar war, dass er die Länge nicht messen konnte, vermutete er, dass er etwas Anderes messen konnte, ihre Rauheit, als Parameter für die fraktale Dimension. Dies erforderte das Überdenken einer der fundamentalsten Konzepte der Mathematik, das der Dimension (siehe Schwarz & Jersey [14]).

Die fraktale Dimension

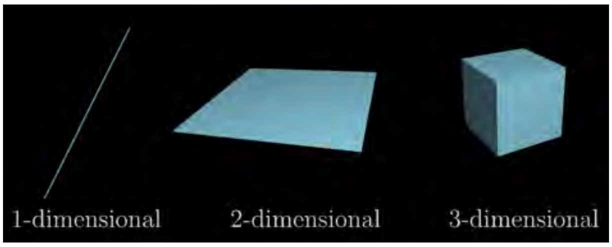


Abbildung 7: Geometrische Dimensionen, URL: https://bit.ly/3oFhQxq, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Das Konzept der fraktalen Dimension beschreibt den Bereich zwischen den ganzzahligen Dimensionen an und gibt diese Dimension in der Form des Parameters der Rauheit an. Sowohl mathematische Formen (bspw. die Kochsche Schneeflocke oder das Sierpinski Dreieck) als auch natürliche Oberflächen können somit in ihrer Rauheit gemessen werden.

Wichtig für die Berechnung hierbei ist, dass der Wert der Rauigkeit gleich bleibt, egal wie stark man an die britische Küstenlinie heranzoomt. In diesem

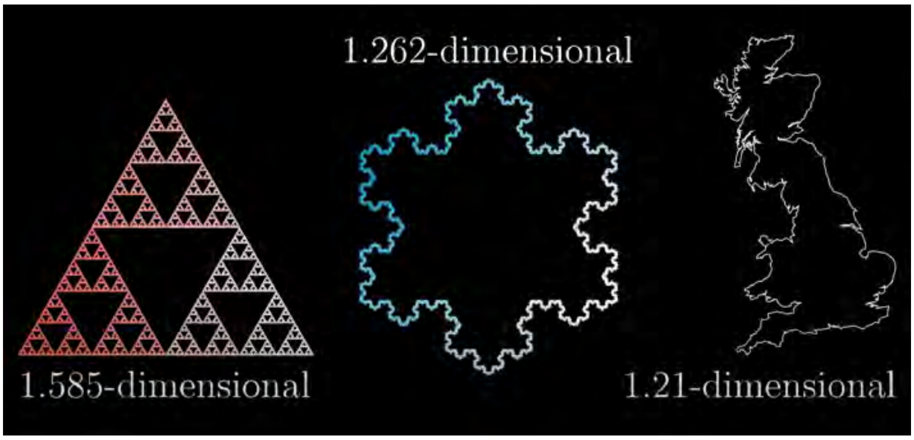


Abbildung 8: Fraktale Dimensionen - Sierpinski Dreieck (links im Bild), Kochsche Schneeflocke (Mitte), Britische Küstenlinie (rechts im Bild), URL: https://bit.ly/3oFhQxq, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Sinne sind viele Strukturen in der Natur selbstähnlich, allerdings nicht perfekt selbstähnlich. Grob gefasst wird alles als selbstähnlich bezeichnet, bei dem sich die gleiche Form in immer kleinerem Maßstab wiederholt. Zur Beschreibung der Rauigkeit mit der Koch-Kurve idealisiert man die Küstenlinie als vollends selbstähnlich. Man kann also festhalten, dass selbstähnlichen Strukturen, wie die Koch-Kurve eine Möglichkeit bieten, um fraktale Strukturen zu modellieren. Wenn man sich also die Frage stellt, ob etwas eine Dimension haben kann, die irgendwo zwischen zwei und drei dimensional liegt, könnte man sich diese, aufbauend auf Mandelbrots Erkenntnissen, folgendermaßen beantworten: »Ja, diese Dimension gibt es, Fraktale haben sie. Je rauer sie sind, desto größer ist ihre fraktale Dimension.« (SCHWARZ & JERSEY [14])

Abbildung 9: Die fraktale Dimension einer Wasseroberfläche bei variierender Windstärke, URL: https://bit.ly/3oFhQxq, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Das Prinzip der Selbstähnlichkeit

Was ist das Prinzip der Selbstähnlichkeit? »Im engeren und ursprünglichen Sinne beschreibt Selbstähnlichkeit die Eigenschaft von Gegenständen, Körpern, Mengen oder geometrischen Objekten, in verschiedenen Größenmaßstäben stets wiederkehrende Strukturen aufzuweisen.« (MEYER [13]) Eine selbstähnliche Menge haben wir eben schon kennengelernt, die Koch-Kurve. Es verbirgt sich aber auch hinter vielen Strukturen der natürlichen Welt das mathematische Prinzip der Selbstähnlichkeit.

Abbildung 10: Romanesco Blumenkohl, URL: https://bit.ly/41Pidni, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Wo findet sich das Prinzip der Selbstähnlichkeit wieder? Bekannte Beispiele für das Prinzip sind die Succulente und der Romanesco Blumenkohl. Das gleiche Verzweigungsprinzip findet sich bei Bäumen und den Blutgefäßen unserer Lungen wieder. Es beschreibt außerdem, wie sich Flüsse in immer kleinere Ströme aufteilen (siehe AL-KHALILI [8]).

Die Julia-Menge

Neben der Koch-Kurve gibt es noch weitere mathematische Objekte, die sich selbstähnlich sind. Die wohl bekannteste ist die Mandelbrot-Menge. Um diese zu verstehen, betrachten wir zuerst die sogenannte Julia-Menge, benannt nach Gaston Julia. Für deren Definition betrachten wir für jedes $c \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^2 + c$$

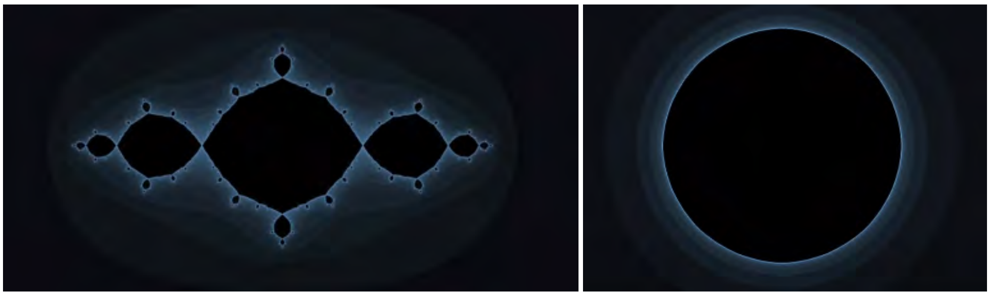
und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Verkettungen f_c^n, gegeben durch

$$f_c^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \qquad \text{und} \qquad f_c^{n+1} := f_c \circ f_c^n.$$

Für $c \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit K_c die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für welche die Folge $(f_c^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wir nennen K_c die gefüllte Julia-Menge. Ihren Rand, $J_c = \partial K_c$, nennen wir die Julia-Menge.

Das hat nun Mandelbrot zum Ausgangspunkt genommen, um die Mandelbrot-Menge zu definieren. Die Mandelbrot-Menge ist die Menge $M \subset \mathbb{C}$, für deren Elemente $c \in M$ die Folge $(f_c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Startwert 0 gegen eine komplexe Zahl konvergiert. Insbesondere kann man also jedem Punkt in der Mandelbrot-Menge (als Teilmenge der komplexen Zahlen) eine Julia-Menge berechnen. Die komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist also für jede einzelne Julia-Menge beliebig, aber fest. Das bedeutet, dass man für jedes c eine Julia-Menge berechnen kann.

Pierre Fatou und Gaston Julia haben an der École polytechnique gemeinsam an Fraktalen geforscht, daher wurde das Komplement der Julia-Menge, d. h. $\mathbb{C} \setminus J_c$, auch nach Fatou benannt.

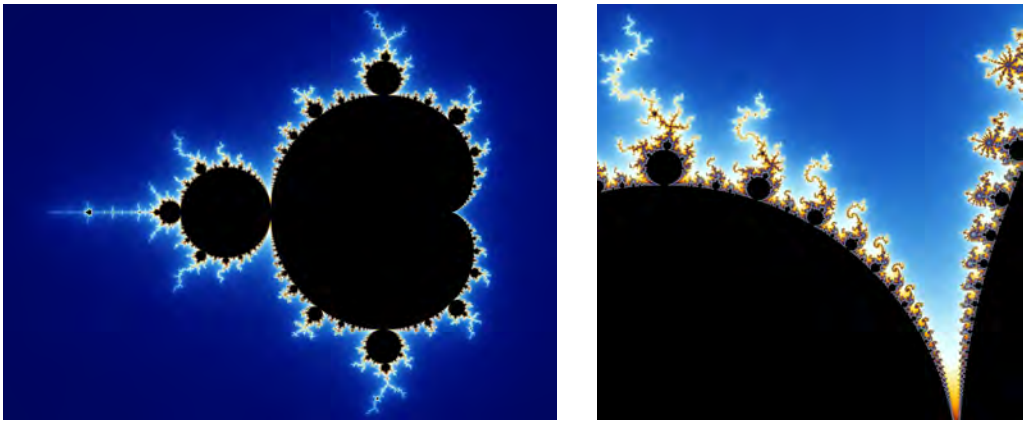


(a) (b)

Abbildung 11: Darstellung (a) zeigt eine gefüllte Julia-Menge mit $c = -2$. Auf diesem Bild ist die gefüllte Julia-Menge das Innere Schwarze und der darum gezogene blaue Rand und die Julia-Menge lediglich der blaue Rand der Menge, URL: https://bit.ly/3oCmf43. Eine gefüllte Julia-Menge mit $c = 0$ stellt (b) dar, URL: https://bit.ly/3oCmf43, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Die Mandelbrot-Menge

Wie oben beschrieben, sind Julia-Mengen und die Mandelbrot-Menge miteinander verbunden. Wenn wir in die Mandelbrot-Menge zoomen, finden wir Strukturen, die Julia-Mengen sehr ähneln. Die Orbits der Mandelbrot-Menge verhalten sich in etwa wie Julia-Mengen. Das ist nicht überraschend, denn der Iterationsprozess ist sehr ähnlich. Man nennt diese Orbits auch eingebettete Julia-Mengen. Im Zentrum jeder Julia-Menge finden sich sogenannte »Baby Mandelbrots«.



(a) (b)

Abbildung 12: In (a) ist die Mandelbrot-Menge dargestellt und (b) zeigt ein Beispiel für einen Zoom in die Mandelbrot-Menge.

Mandelbrots Ideen in der Computergrafik

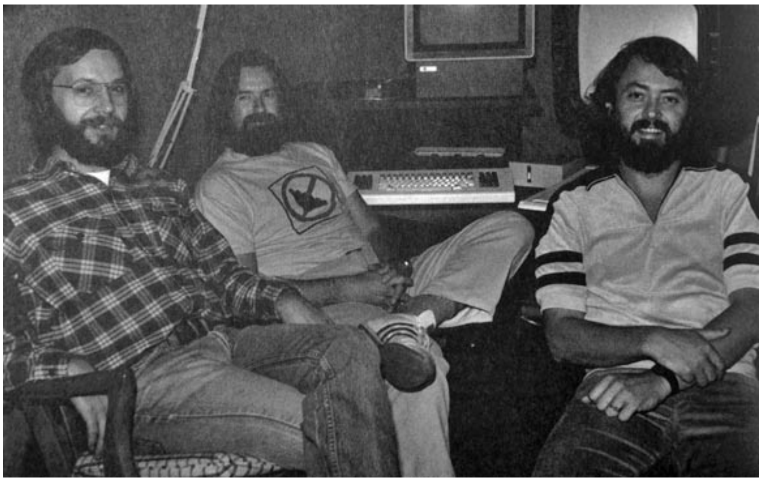


Abbildung 13: Loren Carpenter (rechts im Bild), URL: https://bit.ly/3LnlIuL, zuletzt besucht am 14.10.2023.

1978 stieß Loren Carpenter auf das Buch Fractals Form, Chance and Dimension von Benoit Mandelbrot. Mandelbrot beschreibt in seinem Buch, dass man viele in der Natur vorkommende Formen in der Natur als Fraktale bezeichnen kann. Das Wort Fraktale hat Mandelbrot erfunden, um Formen zu beschreiben, die gezackt oder gebrochen aussehen. Ein Fraktal kann man nach Mandelbrot erschaffen, indem man eine glatt aussehende Form nimmt und sie fragmentiert. Die Methode, die Loren Carpenter inspiriert von Mandelbrot angewandt hat, war eine bestehende Landschaft in große Dreiecke aufzuteilen.

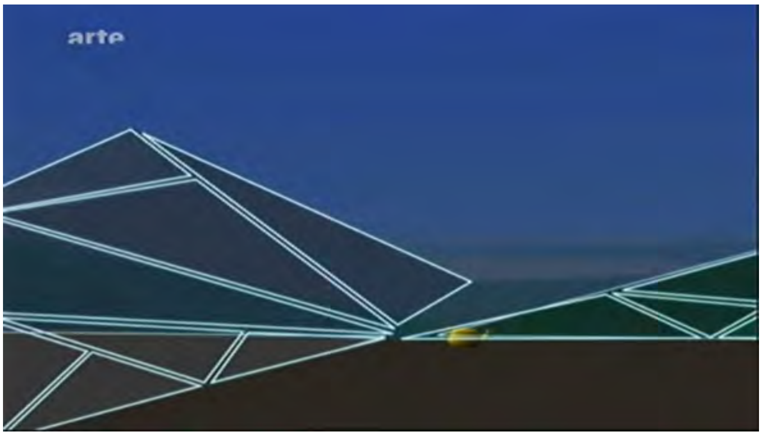


Abbildung 14: Ausschnitt aus »Vol Libre« (1980) von Loren Carpenter (siehe SCHWARZ & JERSEY [14])

Für die Methode teilt man jedes Dreieck in vier Dreiecke und dies wiederholt man in einem iterativen Prozess immer weiter.

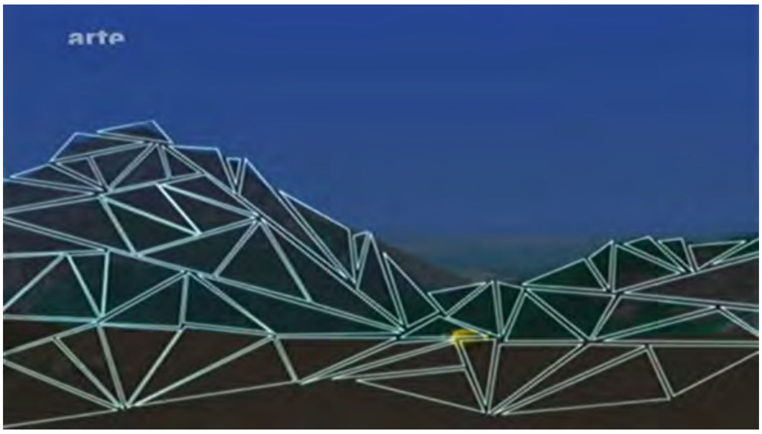


Abbildung 15: Ausschnitt aus »Vol Libre« (1980) von Loren Carpenter (siehe SCHWARZ & JERSEY [14])

Die Nutzung von Iteration in Verbindung mit Mandelbrots Ideen hat so durch den Computer dargestellten Landschaften möglich gemacht. Dadurch ist eine neue Welt der Bildanimation entstanden. Denn man konnte nun den Grad der Rauheit von Oberflächen darstellen (siehe SCHWARZ & JERSEY [14]).

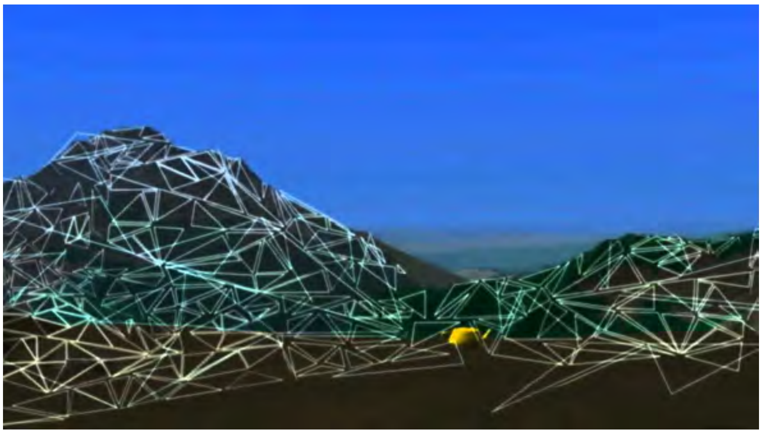


Abbildung 16: Ausschnitt aus »Vol Libre« (1980) von Loren Carpenter (siehe SCHWARZ & JERSEY [14])

Carpenter ist eine der Schlüsselfiguren in der Entwicklung der Computeranimation und von Pixar. Carpenter begann in den späten 1970er Jahren als Ingenieur bei Boeing mit Computeranimation zu experimentieren. Auf eigene Faust drehte er »Vol Libre«, den ersten computeranimierten Film, der Fraktale für seine Grafiken verwendete. Nachdem Carpenter seinen Animationsfilm »Vol Libre« 1980 auf der SIGGRAPH vorgestellt hatte, wurde ihm sofort eine Stelle in der Computerabteilung von Lucasfilm angeboten. Als er im Januar 1981 in das Unternehmen eintrat, war er der sechste Mitarbeiter in der Abteilung, aus der später Pixar werden sollte. Carpenter verfeinerte seine Software weiter, um einen fraktalen Planeten mit Anti-Aliasing für die Genesis-Sequenz von Star Trek II: Der Zorn des Khan zu erstellen (vgl. AMIDI [1]).

Die Schwarmgesetze nach Craig Reynolds

Auch für das Verständnis von chaotischem Verhalten in der Natur finden computerbasierte Methoden schon länger Anwendung. So wurde schon 1986 von Craig Reynolds mithilfe von Computersimulationen modelliert, wie Schwärme gebildet und zusammengehalten werden. Deren Schwarmverhalten basiert demnach auf drei Regeln, die die einzelnen Agenten (Individuen / Boids) beachten:

1. Bewege dich in Richtung des Mittelpunkts derer, die du in deinem Umfeld siehst (Kohäsion).

2. Bewege dich weg, sobald dir jemand zu nahe kommt (Separation).

3. Bewege dich in etwa in dieselbe Richtung wie deine Nachbarn (Alignment). Als Folge dieser Regeln auf Individuenebene entsteht eine Gesamtstruktur,

Abbildung 17: Ein Fischschwarm in der Natur, URL: https://bit.ly/3Axf3c0, zuletzt besucht am 14.10.2023.

nämlich der selbstorganisierte Schwarm. Man spricht von Emergenz (siehe Wikipedia [23])

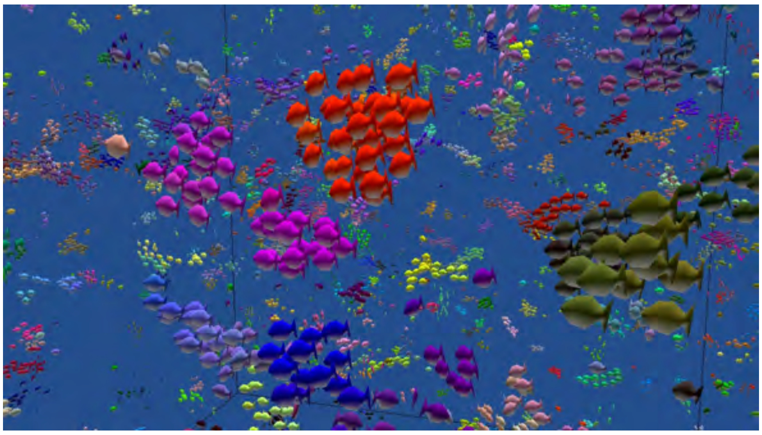


Abbildung 18: Eine Computersimulation eines Fischschwarms, URL: https://bit.ly/3HbXyBZ, zuletzt besucht am 14.10.2023.

Lassen sich Fischschwärme manipulieren?

Dr. David Bierbach, der als Verhaltensbiologe an der Humboldt Universität zu Berlin tätig ist, hat sich die Frage gestellt, ob man das Schwarmverhalten von Fischen manipulieren kann. Was passiert bspw., wenn sich ein Individuum nicht an die Schwarmgesetze hält und eigene Entscheidungen trifft? Zu diesem Zwecke wurde an der Humboldt Universität zu Berlin ein kleiner Robofisch (Orli) entwickelt, der Reynolds Gesetzen entsprechend schwarmkonformes Verhalten

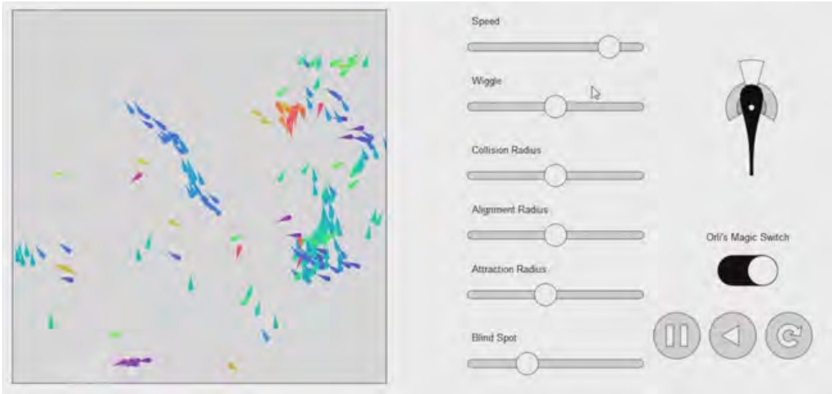


Abbildung 19: Das Programm zur Steuerung von Robofisch Orli (siehe LESCH [9])

aufweisen konnte oder bei Bedarf die Schwarmgesetze auch bewusst brechen konnte (siehe LESCH [9]).

Die spannende Frage war nun: Verändert sich das Schwarmverhalten? Wie reagiert der Schwarm auf den Roboterfisch? Es stellte sich bei dem Experiment an der Humboldt Universität heraus, dass die einzelnen Fische im Schwarm jeweils einen unterschiedlichen Charakter haben, also bestimmte Fische risikofreudiger agieren als andere. Wenn allerdings der Robofisch eine kritische Distanz zum Schwarm überwand, kehrten selbst die risikofreudigeren Fische wieder zum Schwarm zurück. Die Einheit des Fischschwarms konnte der Robofisch also letztlich nicht brechen, denn der Schwarm kehrte immer wieder zu seinem bekannten Verhalten zurück (vgl. LESCH [9]).

Fazit: Ist das Chaos beherrschbar?

Bei einer Stabilitätsanalyse sind instabile Knoten ein guter Indikator für chaotisches Verhalten des modellierten Systems, z. B. der Erdatmosphäre oder eines Doppelpendels. Fasst man daher beherrschbar als mathematisch erkennbar und beschreibbar und nicht als präzise vorhersagbar auf, ist das Chaos durchaus beherrschbar. Genau so kann man Zufallsexperimente, wie z. B. den Bahnverlauf beim Würfel- oder Münzwurf, als Systeme instabilen Verhaltens infolge nicht exakt ermittelbaren Anfangsbedingungen begreifen.

Wenn man sich den Versuch von Dr. David Bierbach anschaut, würde man die Frage wahrscheinlich verneinen, denn einzelne Individuen des Schwarms lassen sich zwar temporär vom Robofisch in die Irre führen, der Schwarm kehrt allerdings immer wieder zu seinen Gesetzmäßigkeiten zurück. Trotz der Gesetzmäßigkeiten des Schwarms, verhält sich der Schwarm nie vorhersehbar gleich. Wie viele von den einzelnen Fischen sich temporär vom Robofisch irritieren lassen, kann man im Voraus nicht genau sagen. Bieten Benoit Mandelbrots Erkenntnisse eine Möglichkeit das Chaos zu beherrschen? Diese Frage könnte man bejahen, denn chaotische, natürliche Strukturen, vor allem Berge und Landschaften, bei denen es anfänglich so schien, als ob man sie nicht als Animation darstellen könnte und die scheinbar zufällig ihre Ausprägungen annehmen, lassen sich in der Computergrafik auf Grundlage von Mandelbrots Erkenntnissen in der fraktalen Geometrie nun korrekt in ihrer Rauheit darstellen und abbilden.

Literatur

[1] A. AMIDI: *The Man Who Invented the Name Pixar Retired Yesterday.* URL: `https://bit.ly/3LnlIuL` (aufgerufen am 08. 02. 2023).

[2] K.-J. ENGEL & R. NAGEL: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer (2000).

[3] A. FIEHN: »Transport of very short-lived substances from the Indian Ocean to the stratosphere through the Asian monsoon«. Diss. Christian-Albrechts-Universität Kiel, 2017.

[4] É. GHYS: *The butterfly effect.* The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges (2015) 19–39.

[5] L. HELFMEIER: »Der Lorenz Attraktor - Numerische Untersuchungen«. Magisterarb. TU Dortmund, 2012.

[6] S. KABANIKHIN: *Inverse and Ill-Posed Problems Series 55.* (2012).

[7] P. KAPPELHOFF: *Chaos-und Komplexitätstheorie.* Handwörterbuch Unternehmensführung und Organisation **4** (2004) 123–131.

[8] J. AL-KHALILI: *The Secret Life of Chaos.* BBC Four (2010).

[9] H. LESCH: *Gibt es ein Gesetz im Chaos?* Terra X (2021).

[10] E. N. LORENZ: *Deterministic Nonperiodic Flow.* Journal of Atmospheric Sciences **20**(2) (1963) 130–141.

[11] E. LORENZ: *The Essence of Chaos.* (1963).

[12] S. LÜCK: *Die Erforschung des Chaos - Experimente, Ideen und Entwicklung der Chaostheorie.* URL: `https://bit.ly/46xzdk6` (aufgerufen am 30. 09. 2023).

[13] H. MEYER: *Selbstähnlichkeit.* URL: `https://bit.ly/3ArIBIh` (aufgerufen am 08. 02. 2023).

[14] M. SCHWARZ & B. JERSEY: *Fraktale: Die Faszination der verborgenen Dimension.* Arte (2008).

[15] R. SPEICHER: *Präsentation zu Zufall und Chaos aus Sicht der Mathematik.* 2017.

[16] S. SRINIVASAMURTHY: *Methods Of Solving Ill-Posed Problems.* arXiv preprint (2012).

[17] M. STÖCKLER: *Zufall: Versuch einer Begriffsbestimmung und Problemsortierung.* Zufall als Quelle von Unsicherheit (2014) 13–30.

[18] D. VISWANATH: *The fractal property of the Lorenz attractor*. Physica D: Nonlinear Phenomena **190**(1) (2004) 115–128.

[19] J. M. WALLACE & P. V. HOBBS: *Atmospheric science: an introductory survey.* Bd. 92. Elsevier (2006).

[20] E. WIEDEMANN & J. SKIPPER: *Lecture Notes: Navier-Stokes Equations, (Universität Ulm).*

[21] WIKIPEDIA: *Benoit Mandelbrot.*
URL: `https://bit.ly/2tdrfz8` (aufgerufen am 08. 02. 2023).

[22] WIKIPEDIA: *Koch-Kurve.*
URL: `https://bit.ly/3mX3FDd` (aufgerufen am 08. 02. 2023).

[23] WIKIPEDIA: *Schwarmverhalten.*
URL: `https://bit.ly/3AKZwpv` (aufgerufen am 08. 02. 2023).

Gott würfelt (nicht)! - Der Zufall in der Quantenmechanik

Julian Gauger

Den Rest meines Lebens möchte ich damit zubringen, darüber nachzudenken, was Licht ist.

(Albert Einstein)

Dieser Beitrag dreht sich um den Zufall in der Quantenmechanik. Er startet mit der Betrachtung des Doppelspaltexperimentes, eines der grundlegenden Experimente der Quantenmechanik. Danach stellen wir uns die Frage, was Licht genau ist. Dazu gehen wir auf das Plancksche Wirkungsquantum und den Photoelektrischen Effekt näher ein. Darauf folgt eine nähere Betrachtung der Schrödinger-Gleichung, welche als grundlegende Gleichung der Quantenmechanik gilt. Abgeschlossen wird die Einführung in die Quantenmechanik mit einem Schritt zurück zur klassischen/Newtonschen Mechanik.

Hier kommt auch der Zufall, das Thema des Seminars, ins Spiel: der Hauptteil des Beitrages dreht sich um drei verschiedene Interpretationen der Quantenmechanik: die Kopenhagener Deutung, die Bohmsche Mechanik und die Viele-Welten Theorie. Zum Schluss beantwortet der Beitrag die anfangs gestellte Frage, ob Gott nun würfelt oder nicht.

Das Doppelspaltexperiment

Historisches

Das Doppelspaltexperiment gilt als grundlegendes Experiment der Quantenmechanik. Durchgeführt wurde dieses Experiment das erste Mal im Jahre 1802 von Thomas Young. Durch dieses Experiment wurde die Wellentheorie experimentell bestätigt und anerkannt. Diese Theorie besagt, dass es sich bei Licht um Wellen handelt. Vorher war die Korpuskeltheorie von Isaac Newton vorherrschend, welche besagt, dass es sich bei Licht um sehr kleine Teilchen (Korpuskeln) handelt.

Das Experiment

Um das Experiment durchführen zu können, benötigt man einen Laser (z. B. einen Laserpointer) und zwei parallele, eng beieinander liegende Spalte (ca. 0.15 mm) zum Beispiel auf einem Blatt Papier. Die Versuchskonstruktion wird vor einem Schirm (oder auch einer Wand o. Ä.) platziert und der Laserpointer wird möglichst senkrecht auf den Doppelspalt ausgerichtet. Das Muster, welches man auf dem Schirm erkennen kann, ist das sogenannte Interferenzmuster (siehe Abb. 1).

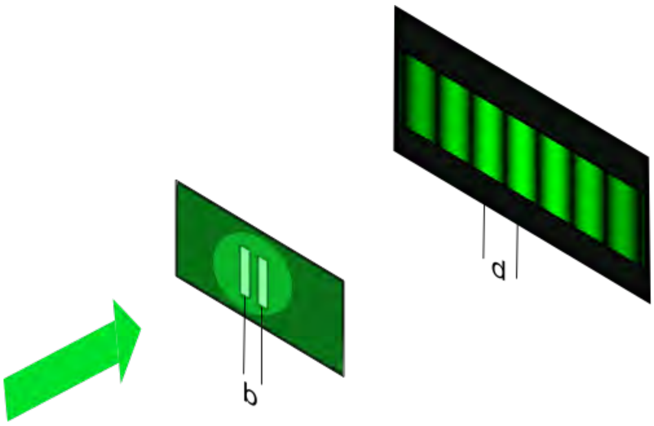


Abbildung 1: Interferenzmuster mit Laser

Dieses Muster kann man dadurch erklären, dass das Licht in Form von Wellen, die durch den linken Spalt gehen, mit dem Licht als Wellen, die durch den rechten Spalt gehen, interferieren. Hierbei kommt es entweder zu einer konstruktiven Interferenz, wo sich die Wellen aus den beiden Spalten gegenseitig verstärken, oder zu einer destruktiven Interferenz, wo sich die Wellen aus den beiden Spalten gegenseitig auslöschen (vgl. Abb. 2).

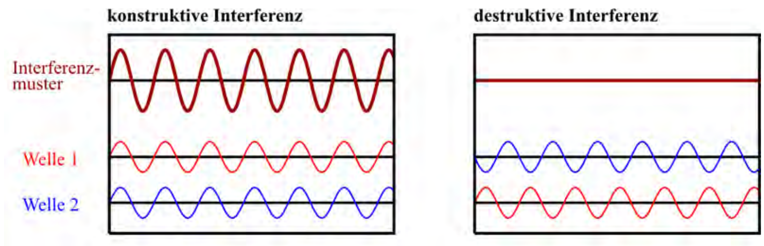


Abbildung 2: versch. Interferenzen

So konnte also experimentell gezeigt werden, dass Licht Eigenschaften von Wellen hat. Dieses Experiment wurde sogar mit Elektronen durchgeführt, von denen man eigentlich davon ausging, dass es sich um Teilchen handelt.

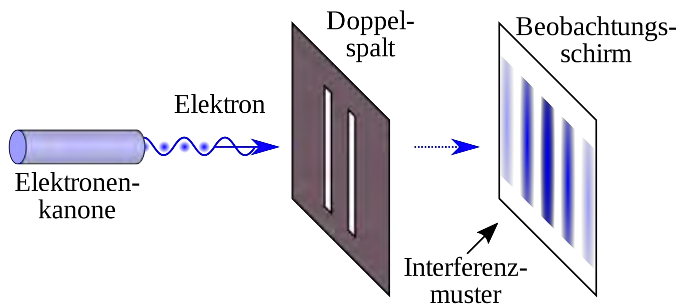


Abbildung 3: Doppelspaltexperiment mit Elektronen

Das Erstaunliche hierbei war, dass sich genau wie bei Licht ein Interferenzmuster gebildet hat, welches mit der Teilchen-Theorie gar nicht erklärbar ist:

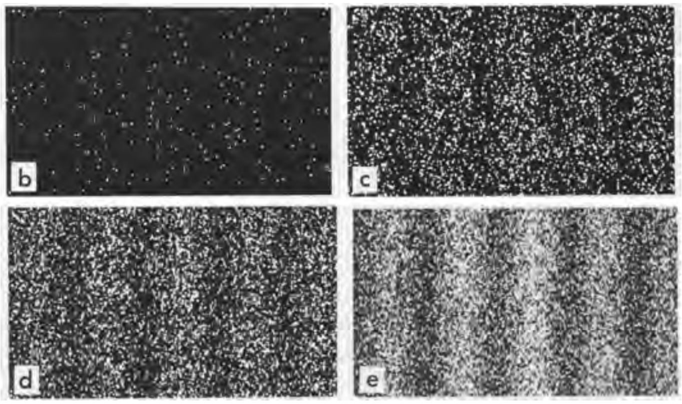


Abbildung 4: b: N=200 c: N=6.000 d: N=40.000 e: N=140.000

Also stellt sich die Frage, welche Beschreibung für Elektronen zutrifft: Teilchen oder Wellen? Auch bei Licht war man sich wegen verschiedener Entdeckungen und Beobachtungen, wie zum Beispiel dem photoelektrischen Effekt, nicht mehr sicher.

Einführung in die Quantenmechanik

Plancksches Wirkungsquantum

Zur Beschreibung von klassischer Strahlung wurde von Lord Rayleigh und Sir James Jeans das Rayleigh-Jeans-Gesetz aufgestellt. Dieses Gesetz zeigt die Abhängigkeit zwischen der Strahlungsintensität von verschiedenen Wellenlängen (Farben) bei bestimmten Temperaturen. Im Infrarotbereich und im sichtbaren Bereich des Lichts lieferte die Formel korrekte Werte, war aber im Ultraviolettbereich nicht zu gebrauchen. Dieses Problem nannte man deswegen auch Ultraviolettkatastrophe. Um diese Ultraviolettkatastrophe zu lösen, stellte Max Planck ein neues Gesetz auf, das sogenannte "Plancksche Strahlungsgesetz":

$$B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1} \tag{1}$$

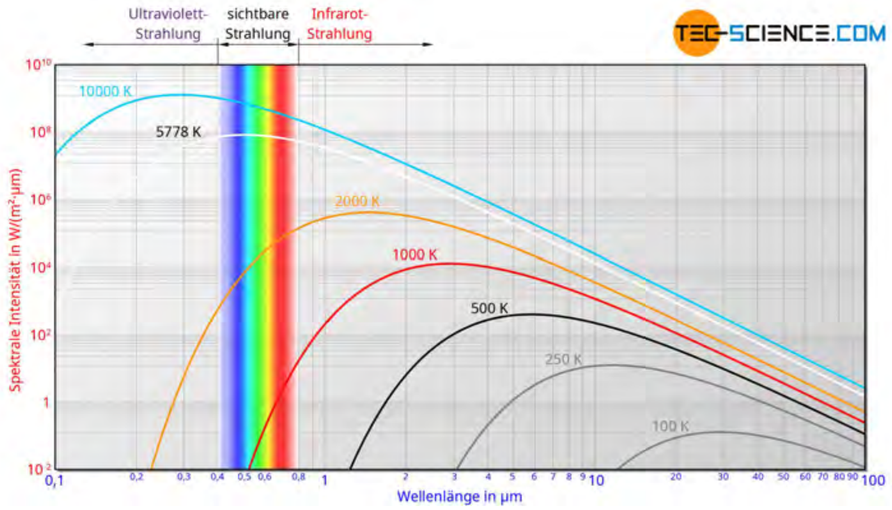


Abbildung 5: Spektrale Verteilung der Intensität der Strahlung eines Schwarzen Körpers. URL: https://bit.ly/46KwG6m, aufgerufen am 15.10.2023.

Bei der Aufstellung des Gesetzes hatte Planck die Idee, dass Licht als Strahlung von leuchtenden Materialien (Atomen) nicht kontinuierlich abgegeben wird, sondern in einzelnen diskreten Paketen (Quanten). Berechnen kann man die Energie dieser Pakete (Teilchen) mit:

$$E = h \cdot f \tag{2}$$

Diese Formel gibt das Verhältnis zwischen Energie E und Frequenz f eines Photons an. Das Besondere an dieser Formel ist, dass sie Eigenschaften, die vorher nur Teilchen (Energie) und Wellen (Frequenz) zugeschrieben wurden, miteinander verknüpft.

Zusammenfassend kann man sagen, dass das Plancksche Strahlungsgesetz die Quantelung von Licht postulierte und legte den Grundstein für das Verständnis der Quantennatur des Lichts. Im nächsten Kapitel sehen wir, dass der Physiker Albert Einstein diese Idee mit der Entdeckung des photoelektrischen Effekts, für diesen er 1921 den Nobelpreis bekommen hat, bestätigt.

Photoelektrischer Effekt

Der photoelektrische Effekt beschreibt die Wechselwirkung von Licht und Elektronen: Wird ein Alkalimetall, wie z. B. Kalium, in einer Vakuumröhre mit Licht bestrahlt, sorgt dieses Licht dafür, dass Elektronen aus den Atomen des Alkalimetalls herausgelöst werden. Diese können von einer Kollektorelektrode aufgenommen werden. Ist ein Ladungsausgleich möglich, indem das Metall und die

Elektrode verbunden werden, bewegt sich das Elektron zurück zu dem Alkalimetall und es entsteht ein elektrischer Strom. Dieser Effekt funktioniert jedoch nicht bei jedem Licht: Mit energiearmem Licht (z. B. rotem Licht) mit einer niedrigen Frequenz ist dieser Effekt nicht zu beobachten, sondern nur mit energiereichem (z. B. blauem Licht). Die Lichtintensität spielt hierbei keine Rolle, auch bei extrem hoher Intensität entsteht bei energiearmem Licht keine Spannung. Bei energiereichem Licht wiederum kann man mit der Intensität die Spannung kontrollieren: je größer die Intensität des eingestrahlten Lichts, desto größer die Spannung. Diese Experimente und Beobachtungen bestätigten Plancks Vermutung: Licht kann als Teilchen beschrieben werden. Die Beschreibung als Welle hilft zur Erklärung dieses Phänomens nicht.

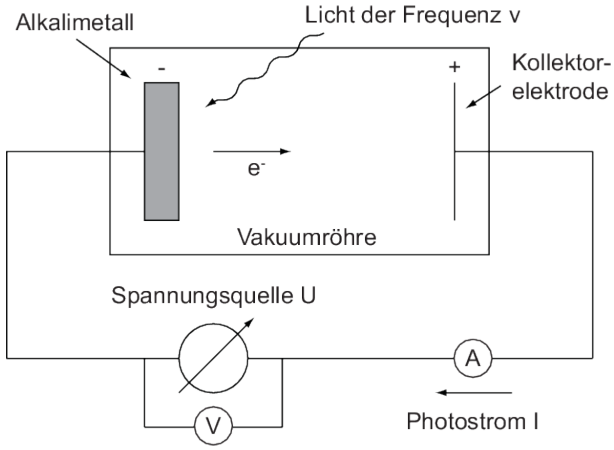


Abbildung 6: Photoeffekt

Nachdem man den photoelektrischen Effekt untersucht hatte, erkannte man, dass eine vollständige Erklärung nur durch die Anwendung quantenmechanischer Prinzipien möglich ist. Dies führte schließlich zur Entwicklung der Schrödinger-Gleichung, die die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems beschreibt und somit das Verhalten von Teilchen auf atomarer Ebene erklären kann.

Schrödingers Gleichung

Die Schrödingergleichung gehört zu den fundamentalen Gleichungen der Quantenmechanik und spielt eine entscheidende Rolle bei der Beschreibung des Verhaltens von Quantensystemen. Sie ermöglicht es uns, die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Objekts zu berechnen. In der Quantenmechanik erfahren wir, dass wir den Ort und Impuls eines Quantenobjekts nicht gleichzeitig präzise messen können, was durch die Heisenbergsche Unschärferelation beschrieben wird. Diese Unschärfe macht es uns unmöglich, exakte Informationen über Ort und Impuls eines Partikels zur gleichen Zeit zu erhalten. Jedoch eröffnet uns die Schrödingergleichung eine faszinierende Möglichkeit: Wir können das Energielevel und die Wellenfunktion eines Quantensystems berechnen. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion beschreibt die Wahrscheinlichkeitsamplitude, eine bestimmte Position oder einen Impuls eines Partikels zu messen. Somit ermöglicht uns die Schrödingergleichung, zumindest probabilistische Aussagen über die Eigenschaften von Quantenobjekten zu machen und ihre zeitliche Entwicklung vorherzusagen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \tag{3}$$

Die hier verwendete Gleichung ist eine vereinfachte Form der Schrödinger Gleichung, die sogenannte zeitunabhängige Schrödinger Gleichung. Die Wellenfunktion ψ beschreibt den Zustand des quantenmechanischen Teilchens, wobei E das erlaubte Energielevel des Elektrons ist. Mit $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}$ berechnet man die kinetische Energie, während $V\psi$ die potenzielle Energie des Teilchens darstellt.

Nehmen wir als Beispiel für die Schrödinger Gleichung ein Elektron in einem linearen Potenzialtopf:

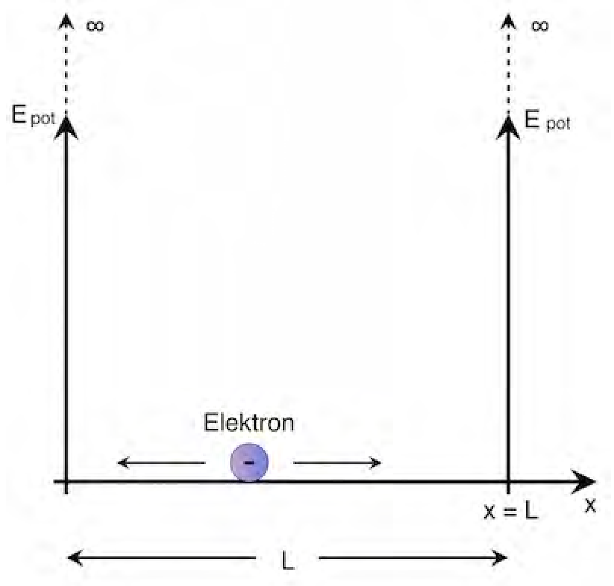


Abbildung 7: Potentialtopf

Durch die Potenzialwände ist es dem Elektron nicht möglich, den Topf zu verlassen.

Die Wellenfunktion des Elektrons im Potenzialtopf kann nach der Schrödinger-Gleichung unterschiedlich aussehen, je nachdem welches Energieniveau das Elektron hat. Durch diese Wellenfunktion kann man mit der Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation für die Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeitsdichte berechnen. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Elektron in einem gewissen Bereich des Topfes ist. Für die Hauptquantenzahl n = 1 sehen wir, dass die Wahrscheinlichkeit dafür am größten ist, dass sich das Elektron in der Mitte befindet (vgl. Abb. 8). Das Elektron legt sich aber erst für eine Position fest, wenn seine Position gemessen wird. Davor befindet sich das Elektron in einer Superposition.

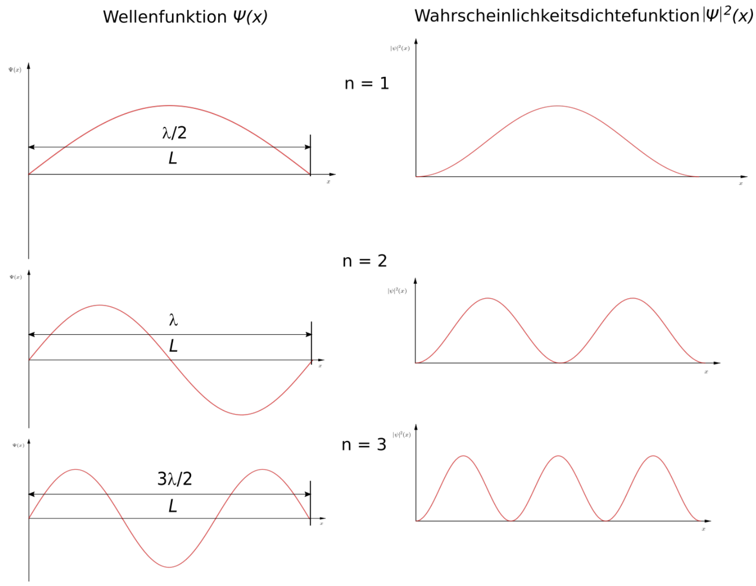


Abbildung 8: Wellenfunktion

Der Zufall in der klassischen Physik/Mechanik

Um auf den Zufall in der klassischen Mechanik sprechen zu kommen, müssen wir den Begriff des Zufalls erstmal in den objektiven Zufall und in den subjektiven Zufall unterteilen. Als Beispiel für den subjektiven Zufall kann man die Lotterie nehmen. Das Ziehen der Lottozahlen ist ein rein subjektiver Zufall, der nur auf dem Mangel von Informationen beruht. Eine Person, die die Position der Kugeln und die Drehgeschwindigkeit der Trommel genau kennt, kann mithilfe der Gesetze der Mechanik schon im Voraus berechnen, welche Zahlen gezogen werden. Die Idee, dass die Zukunft der gesamten Welt vom jetzigen Zustand der Welt eindeutig vorherbestimmt wird, nennt man Determinismus. Nach den Vertretern des Determinismus folgt unsere Welt eindeutig dem Ursache-Wirkung-Prinzip. Das bedeutet, dass jedes Ereignis in unserer Welt eine Konsequenz der Vergangenheit ist. Diese deterministische Weltanschauung war das Weltbild fast aller Naturwissenschaftler bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts, d. h. also bis zum Beginn der Quantenphysik. Mit dem Beginn der Quantenphysik wurde die Vorstellung von einem objektiven Zufall in der Natur immer präsenter und bedeutender. In dieser Disziplin der Physik wurden Phänomene beobachtet, bei denen subatomare Teilchen scheinbar zufällige Entscheidungen treffen und deren Verhalten nicht vollständig vorhersehbar ist, selbst wenn alle verfügbaren Informationen berücksichtigt werden. Dies führte zu einem Paradigmenwechsel, der die traditionelle deterministische Sichtweise der klassischen Mechanik infrage stellte und die Existenz des objektiven Zufalls als Bestandteil des Universums anerkannte. Wobei es auch Deutungen der Quantenmechanik gibt, die diesen objektiven Zufall ablehnen. Hierzu zählt zum Beispiel die Bohmsche Mechanik.

Interpretationen der Quantenmechanik

Kopenhagener Deutung

Die am weitesten bekannte Interpretation der Quantenmechanik ist die Kopenhagener Deutung. Nach der Kopenhagener Deutung verhält sich ein Quantenobjekt, z. B. ein Elektron wie eine Welle, solange wir es nicht beobachten/messen. Diese Welle folgt deterministischen Gesetzen und die Schrödingergleichung verrät uns, wie wir die Zukunft der quantenmechanischen Welle vorhersehen können. Wenn wir versuchen den Ort des Elektrons zu messen kollabiert diese Welle und das Elektron verhält sich jetzt wie ein Teilchen, dass einen bestimmten Ort hat. Dieser Dualismus zwischen Welle und Teilchen nennt man Welle-Teilchen-Dualismus. Der Kollaps ist der Grund, warum diese Interpretation eine nicht deterministische ist, da der Ort, an dem die Welle kollabiert, ein rein objektiv zufälliger Ort ist. Wenn wir uns das Doppelspaltexperiment nochmal anschauen, sagt die Kopenhagener Deutung also, dass das Elektron als Welle durch beide Spalte hindurchgeht und erst bei dem Aufprall auf den Schirm sich für eine Position/Ort entscheidet.

Bohmsche Mechanik

Die Bohmsche Mechanik ist eine deterministische Deutung und unterscheidet sich grundlegend zur Kopenhagener Deutung. Bei der Bohmschen Mechanik existieren die Teilchen innerhalb der Wellenfunktion real, es gibt also ein Paar aus Wellenfunktion und Teilchen. Die Teilchen schwimmen auf der Wellenfunktion, welche man als Pilot-Wave oder auch Führungswelle bezeichnet. Der Kollaps der Wellenfunktion, welcher ein zentraler Bestandteil der Kopenhagener Deutung ist, existiert hier nicht, da das Ergebnis vorher schon festgelegt ist. Die Teilchen haben feste Trajektorien und der Wellencharakter kommt durch die

Führungswelle. Das Teilchen befindet sich also nie in einer Superposition, wie bei der Kopenhagener Deutung. Bei dieser Deutung sind lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich, da die Anfangsbedingungen unbekannt sind (Hidden variables). Die Bohmsche Mechanik interpretiert also das Doppelspaltexperiment so, dass die Führungswelle das Interferenzmuster erzeugt, das Elektron sich aber auf einem festgelegten Weg bewegt bis hin zum Schirm.

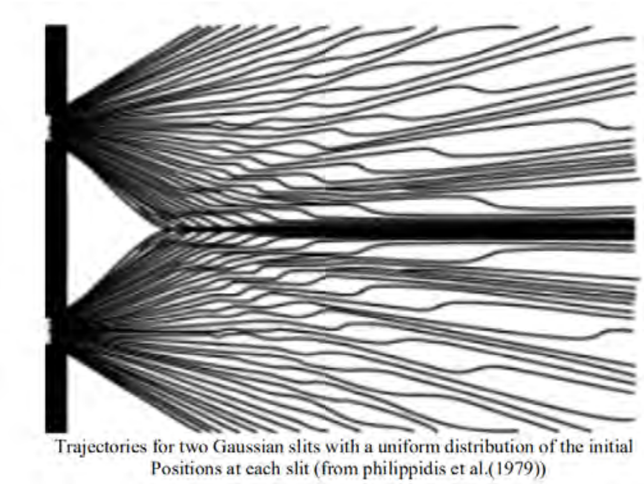


Abbildung 9: Trajektorien verschiedener Anfangsorte, aber derselben Wellenfunktion

Viele-Welten Theorie

Man kann sagen, dass die Viele-Welten-Theorie die Sci-Fi Interpretation unter diesen Dreien ist. Hier beschreibt die Wellenfunktion das Quantenobjekt, das Messgerät und den Beobachter. Auch hier gibt es keinen Kollaps der Wellenfunktion, sondern nach Messung immer noch eine Superposition. Für jede Möglichkeit spaltet sich die Welt auf und es entsteht eine neue. Die Viele-Welten Theorie sagt also aus, dass die Welt sich für jede Möglichkeit, in der das Elektron beim Doppelspaltexperiment auf den Schirm aufschlagen kann, eine neue Welt abgespalten wird.

Würfelt Gott nun?

Alles in allem ist es schwer zu sagen, ob Gott nun würfelt oder nicht, da bis heute keine dieser Interpretationen falsifiziert worden ist. Es kommt also darauf an, welcher Deutung man den meisten Glauben schenkt. Das einzige, was wir mit Sicherheit sagen können ist, dass wir es einfach nicht genau wissen.

Literatur

[1] J. BRICMONT: *Making Sense of Quantum Mechanics*. Springer (2016).

[2] D. DÜRR & D. LAZAROVICI: *Verständliche Quantenmechanik*. Springer (2018).

[3] J. GASSNER: *Von Aristoteles bis zur Stringtheorie*.
URL: `http://bitly.ws/DxrQ` (aufgerufen am 26. 04. 2023).

Der Analphabetismus im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten - Wie gehen wir damit um?

Noemi Hiller & Sophie Hoff

Der Themenbereich *Wahrscheinlichkeiten* ist in der Schule ein meist unbeliebter Teil des Mathematikunterrichts. Viele Erwachsene weisen daher ein großes Defizit im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten, insbesondere mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, auf. Dies betrifft auch Personengruppen, die Wissen im Wahrscheinlichkeitsformat an andere vermitteln sollten. Dieser Beitrag beschäftigt sich mit einem Vorschlag, diesem Problem zu begegnen: *Sachverhalte in natürlichen Häufigkeiten darzustellen.*

Wahrscheinlichkeiten im Bildungsplan (1)

Grundschule

Baden-Württemberg führt seit 2003 Wahrscheinlichkeiten in der Grundschule ein. Das Ziel des Unterrichts dort ist, dass Schüler*innen Daten durch Beobachtungen sammeln und anschließend durch Strichlisten, Tabellen und Diagramme darstellen können. Es wird ebenfalls Wert darauf gelegt, Daten aus unterschiedlichen Darstellungen zu entnehmen und zu deuten. Seit 2016 werden auch die Begriffe *möglich, sicher* und *unsicher* thematisiert. Ebenso wird verlangt, dass Schüler*innen einfache Zufallsexperimente (Kugeln, Glücksrad, Münzen, Wendeplättchen) durchführen, beschreiben und auswerten können. Dabei wird in der Grundschule der Begriff der Wahrscheinlichkeit nicht explizit thematisiert, der Fokus wird auf eine zu begründende Intuition gelegt.

Weiterführende Schule

Die in der Grundschule behandelte Datenerhebung wird weiter vertieft. In der Sekundarstufe I der Werkreal-/Haupt- und Gemeinschaftsschulen geht es darum, Wahrscheinlichkeitsaussagen in alltäglichen Situationen zu verstehen und diese zu berechnen.

Das Gymnasium behandelt in der Sekundarstufe I ähnliche Themen in vertiefter Form. Zusätzlich werden Baumdiagramme eingeführt. In Schulbüchern wird über diverse Aufgaben versucht, einen Alltagsbezug zu vermitteln. So sollen zum Beispiel verschiedene Wahrscheinlichkeiten im Spiel »Mensch Ärgere Dich Nicht« berechnet werden. Am Gymnasium werden in der Klassenstufe 9 schließlich bedingte Wahrscheinlichkeiten eingeführt. Der Einstieg und die Einführung erfolgten früher direkt über die Formel.

In der Sekundarstufe II werden weitere Themen behandelt. Da hier von einem Wissensstand der breiten Bevölkerung ausgegangen wird und viele Menschen die Schule bereits nach der 9ten Klasse verlassen haben, spielen diese hier keine weitere Rolle.

(1) Dieser Artikel zu dem Vortrag bezieht sich auf den Bildungsplan Baden-Württembergs.

Studien zum Thema Verständnis von Wahrscheinlichkeit

Die oben aufgeführten Themen in den Bildungsplänen werden regelmäßig überarbeitet, da sie immer auf empirische Studien und neue Erkenntnisse zurückzuführen sind, die zu sehr unterschiedlichen Ansätzen führen können.

J. Piaget und B. Inhelder (1975)

Die 1975 durchgeführte Studie von *Jean Piaget* (Biologe) und *Bärbel Inhelder* (Entwicklungspsychologin) spielte eine wichtige Rolle in der Entwicklung der Bildungspläne. In der Studie kamen sie zu dem Ergebnis, dass Kinder unter zwölf Jahren nicht fähig sind, proportional und kombinatorisch zu denken. Jedoch seien auch jüngere Kinder in der Lage, zwischen gewissen und ungewissen Situationen zu unterscheiden.

Diese Ergebnisse führten dazu, dass die Wahrscheinlichkeiten an deutschen Schulen um 1975 erst ab Klasse 9 thematisiert wurden.

A. Tverskey und Kahnemann (1974)

Tversky und Kahnemann (1974) konnten nachweisen, dass die menschliche Intuition in Entscheidungssituationen unter Unsicherheit häufig zu Fehlschlüssen führt, die stark von den richtigen, den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechenden Lösungen abweichen. Sie folgerten, dass das menschliche Gehirn nicht nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung arbeitet und Menschen deshalb generell schlecht mit Wahrscheinlichkeiten umgehen können. Deshalb wurde auch am Bildungsplan zunächst nichts verändert.

Fischbein

Fischbein (1975) kam zu dem Schluss, dass auch Kinder unter 12 Jahren ein gewisses Verständnis für Wahrscheinlichkeiten haben, das durch Unterricht gefördert werden kann.

Er ging davon aus, dass die Schule die Primärintuition der Kinder durch Wissen in Sekundärintuition, also formales Wissen basierend auf diesen Grundvorstellungen, transformieren soll. Da er diese Transformation in späteren Studien nicht feststellen konnte, kam er zu dem Schluss, dass die Schule eher unangemessenes deterministisches Kausaldenken fördert, statt Primärintuitionen in gute Sekundärintuition umzuwandeln.

ENGEL & SEDLMEIER [1] KAPADIA & BOROVCNIK [4]

Gigerenzer et al.

Erst um die 2000er-Jahre wurde das Verständnis von Menschen zur Wahrscheinlichkeit von Psychologen (z. B. *Gigerenzer*) erneut beleuchtet. Sie sehen das Problem nicht im Menschen, sondern in der Darstellung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ausgehend von der Idee der Anpassung der menschlichen Rationalität an die Bedingungen der Umwelt entwickelten Psychologen wie *Gigerenzer* (1994) einen Lösungsansatz für die Vermeidung von Fehlschlüssen beim Entscheiden unter Unsicherheit. Statt die statistische Information wie üblich in Wahrscheinlichkeiten auszudrücken, schlugen sie vor, die Information in Form von *natürlichen Häufigkeiten* zu präsentieren. Sie begründeten dies durch ein evolutionspsychologisches Argument: Da in unserer natürlichen Umgebung Wahrscheinlichkeiten nicht direkt beobachtbar sind, ist der Mensch evolutionär bedingt nicht an das kognitive Verarbeiten von Wahrscheinlichkeiten angepasst. Stattdessen nimmt der Mensch statistische Information in Form von natürlichen Häufigkeiten wahr, d. h. durch das Abzählen von Ereignissen in einer natürlichen Umgebung.

Dazu gibt es mittlerweile sehr viel Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In vielen Studien, unter anderem von *Laura Martignon* (zum Beispiel Martignon & Kuntze [6], Kaiser & Martignon [3]), geht es vor allem darum, genauer zu untersuchen, worin die Schwierigkeiten beim Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten liegen. Die Studien beschäftigen sich mit der Frage, wie diesen Schwierigkeiten begegnet werden kann und plädieren zum einen dazu, möglichst früh stochastisches Denken zu fördern. Außerdem greifen sie auch wieder auf das Konzept der *natürlichen Häufigkeiten* zurück. Das soll den Vorteil haben, dass das Ermitteln der Lösung einer Bayesianischen Aufgabe erleichtert wird. Insbesondere wird das Problem auf eine Berechnung von Häufigkeitsverhältnissen reduziert. Dass sich daraus der Effekt ergibt, dass Bayesianische Aufgaben besser gelöst werden, ist in der Mathematikdidaktik allgemein anerkannt und empirisch nachgewiesen Krauss [5].

Fehlvorstellungen

Beim Thema »Wahrscheinlichkeiten« gibt es viele Fehlvorstellungen.

bedingte Wahrscheinlichkeiten

Oft ist nicht klar, welches das bedingte und welches das bedingende Ereignis ist und ob damit eine zeitliche Abfolge einhergeht (Ursache – Wirkung).

Stichprobengröße

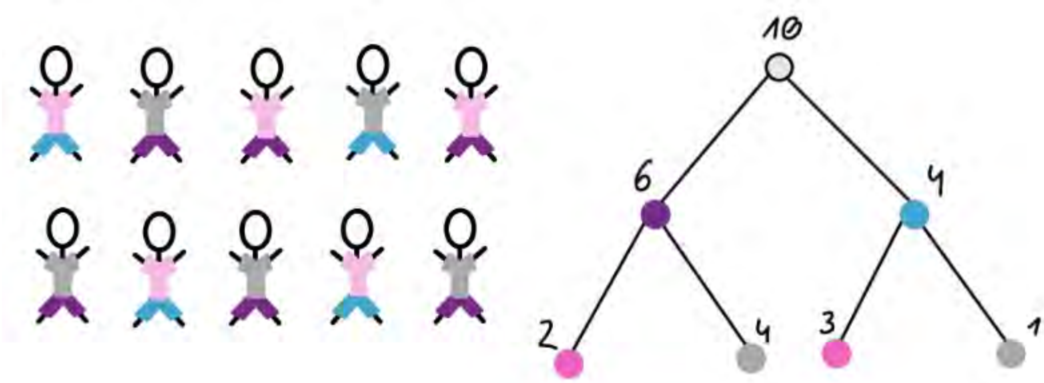
Viele Menschen nehmen schon bei kleinen Stichprobengrößen eine große Übereinstimmung mit der Population an.

Die Bezeichnung »Gesetz der großen Zahlen« gibt jedoch schon Auskunft darüber, dass dieses bei einer kleinen Stichprobengröße nicht gelten muss.

Basisrate

Viele Menschen ignorieren bei ihren Wahrscheinlichkeitsurteilen die Basisrate HEFENDEHL-HEBEKER & SCHMIDT-THIEME [2].

Natürliche Häufigkeiten



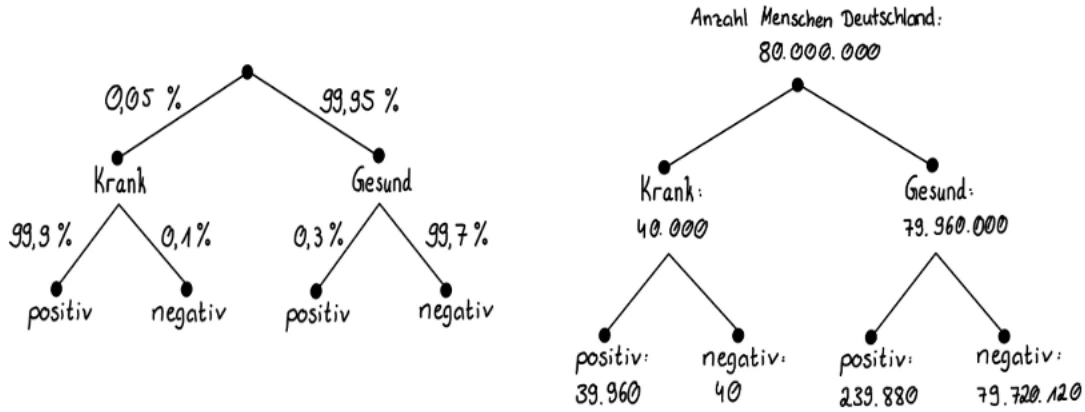
Von *natürlichen Häufigkeiten* wird nach *Gigerenzer* und *Hoffrage* gesprochen, wenn Zahlen, die sich in einem Baumdiagramm darstellen lassen, in Beziehung gesetzt werden. Diese Zahlen tauchen bei einem natürlichen Sampling auf, also beispielsweise in der Feststellung, dass sechs der 12 Männchen lila Hosen und zwei der sechs Männchen mit lila Hosen rosa T-Shirts tragen. Somit ist eine *absolute Häufigkeit* allein noch keine *natürliche Häufigkeit*, im Verhältnis zu anderen *absoluten Häufigkeiten* allerdings schon. In dieser Darstellung werden Basisraten explizit mit aufgegriffen, können also nicht vernachlässigt werden *Naturalfrequencies*.

Konsequenzen für den Unterricht

Für den Unterricht an Schulen bedeutet dies, dass zuerst mit *natürlichen Häufigkeiten* gearbeitet wird, bevor Abstraktionen oder Formeln genutzt werden. In der Grundschule reichen *natürliche Häufigkeiten* und eine intuitive Herangehensweise aus. Die Kinder sollen mit dem Thema Wahrscheinlichkeit in Berührung kommen. In der Mittelstufe, wenn dann tatsächlich von bedingten Wahrscheinlichkeiten gesprochen wird, sollen diese auch erst einmal in Form von *natürlichen Häufigkeiten* an lebensnahen Beispielen vermittelt werden, bevor Wahrscheinlichkeitsformate und Formeln thematisiert werden. Es sollte aber auf jeden Fall vermieden werden, dass die Schüler*innen einfach Formeln auswendig lernen. Außerdem sollte die Thematik durch relevante Beispiele aus dem Alltag mit der Lebenswelt der Schüler*innen eingeführt werden. Die Schüler*innen sollten, nachdem das in den unteren Klassen noch mit Freude aufgenommen wird, nicht mehr nur mit Würfelbudenmathematik konfrontiert werden. Während Würfelspiele und das Drehen von Glücksrädern in Klasse 5 zu hoher Motivation führen, fällt es einer Lehrkraft sicher schwer, Schüler*innen der Mittel- und Oberstufe von der Relevanz von Würfelbudenmathematik für ihren Alltag zu überzeugen. Die Verknüpfung mit der Umwelt ist wichtig, um *träges Wissen* zu vermeiden. Davon spricht man, wenn Wissen nur in exakt den Situationen angewendet werden kann, in denen es erlangt wurde, sprich hier im Unterricht. Für jeden Unterrichtsinhalt ist es auch wichtig, Paradoxien und häufige Probleme von Schüler*innen zu kennen, damit sie aktiv zum Unterrichtsgegenstand werden können. Wie schon Fischbein feststellte, ist ein guter Unterricht dazu da, die schon vorhandenen Vorstellungen und das Vorwissen der Schüler*innen zu beachten, aufzugreifen und wenn nötig zu korrigieren. Dabei müssen die Schüler*innen aber nicht einfach verbessert werden, sondern selbst einsehen, wieso diese Vorstellung nicht tragfähig ist. Dabei spricht man auch oft davon, kognitive Konflikte in Schüler*innen auszulösen, die dazu führen, dass Schüler*innen ihre Vorstellungen selbst anpassen.

Bayes im Alltag

Auch im Alltag haben bedingte Wahrscheinlichkeiten eine Relevanz zum Beispiel bei diversen medizinischen Tests. Betrachtet wird im Folgenden der HIV-Test unter der Fragestellung »Der Test ist positiv - bin ich automatisch infiziert?«.



Der Sachverhalt kann über ein Baumdiagramm dargestellt werden. Im linken Teil der Abbildung wurden die Wahrscheinlichkeiten so aufgetragen, wie das normalerweise bei dieser Aufgabenstellung der Fall ist. Allerdings fällt es schwer, diesem Diagramm sinnvolle Informationen zu entnehmen, wenn man nicht mit dem Konzept von Baumdiagrammen mit prozentualen Wahrscheinlichkeiten vertraut ist. Auf der rechten Seite der Abbildung erfolgt dasselbe anhand einer selbst gewählten Basispopulation, hier die stark gerundete Bevölkerung Deutschlands. Nun kann auch jemand ohne Vorwissen und mathematischem Verständnis ablesen, dass die Gruppe der nicht-kranken Menschen mit positivem Test viel größer ist als die der tatsächlich erkrankten. Jetzt kann einfach in Prozent berechnet werden, wie viele der Tests fälschlicherweise positiv sind. Für viele Menschen ist dennoch der Vergleich von 39 960 zu 239 880 viel aussagekräftiger als 14% der Menschen mit positivem Ergebnis sind tatsächlich infiziert. Leider sind auf Beipackzetteln oft nur Angaben in Prozent notiert. Um also alle Menschen zu erreichen, sollte eine andere Formulierung gewählt werden und außerdem ein Aufruf enthalten sein, bei einem positiven Ergebnis nicht in Panik auszubrechen, sondern einen Arzt aufzusuchen.

Um zu überprüfen, ob den beratenden Ärzten und Sozialarbeitern klar ist, wie häufig ein Test falsch-positiv ausfällt, schickte *Gigerenzer* einen Studierenden zur HIV-Beratung. Dies fand in 20 verschiedenen deutschen Städten bei 14 Ärzten und 6 Sozialarbeitern statt. Das Experiment zeigte, dass viele der Ärzte in Prozent redeten, bei denen das Gefühl aufkommt, dass sie diese selbst nicht verstanden haben. Viele meinten, dass falsch-positive Ergebnisse nicht existieren und korrigierten sich dann.

Für viele Berufsgruppen wie Ärzt*innen, Jurist*innen und Journalist*innen kann ein Verständnis von bedingten Wahrscheinlichkeiten im Berufsalltag relevant sein. Deshalb sollten zu diesem Thema verpflichtende Schulungen durchgeführt werden. Die Risikokommunikation zwischen Ärzten und Patienten, vor Gericht oder allgemein zwischen Experten und Laien sollte auf Häufigkeitsebene erfolgen. In diesem Falle ist es ganz entscheidend, dass die einfachste und verständlichste Art der Kommunikation gewählt wird, um die tatsächlichen Risiken transparent zu machen.

Ausblick

Im Zuge der COVID-19 - Pandemie wurden Verbesserungen im Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten angestoßen. Auf Selbsttests finden sich nun Selektivität, Spezifität etc. als Vierfeldertafel mit absoluten Zahlen, und die seriöseren Medien haben gute Informationen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf Tests in Form von Videos oder Artikeln veröffentlicht.

Auch für Schulen gibt es, beispielsweise durch Unterrichtsentwürfe in Zusammenarbeit mit *Laura Martignon*, einige gute Ideen zur besseren Vermittlung von Wissen im Bereich der bedingten Wahrscheinlichkeiten durch *natürliche Häufigkeiten* siehe WASSNER, BIEHLER, SCHWEYNOCH & MARTIGNON [7].

Fazit

Die Schüler*innen sollten natürlich auch lernen, Aufgaben zu bearbeiten, die in Form von prozentualen Wahrscheinlichkeiten dargestellt sind.

Allerdings muss sich die Darstellung außerhalb der Schule so ändern, dass es für jeden verständlich wird. In der Schule sollte mit dieser natürlichen Darstellung eingestiegen werden. Bei der dann folgenden Abstraktion können dann gute Schüler*innen folgen und benötigen im Anschluss keine *natürlichen Häufigkeiten* mehr. Den schwächeren Schüler*innen kann die eigenständige Übersetzung in *natürliche Häufigkeiten* helfen. Die Schüler*innen werden sich nach der Schule sicher nicht mehr an die Formel erinnern. Aber wenn gut unterrichtet wurde, haben sie Techniken erlernt, mit denen sie an so eine Aufgabe herangehen können, auch wenn der Lösungsweg nicht klar ist. Es sollte generell nicht nur darauf abgezielt werden, Aufgaben Bayesianischer Art zu lösen, sondern ein grundlegendes Verständnis zu schaffen, das auf andere Situationen übertragbar ist.

Momentan bringt der Unterricht noch nicht die gewünschten nachhaltigen Kompetenzen. Deshalb wird in diesem Bereich auch weiterhin ausgiebig geforscht, und es sollten auch Fortbildungen für Lehrkräfte angeboten werden. Um aber mit der aktuellen Situation in der Bevölkerung umzugehen, wäre es sinnvoll, vermehrt Darstellungen in natürlichen Häufigkeiten zu verwenden. Für einige Berufsgruppen, beispielsweise Juristen und Journalisten und Ärzte, sollten Schulungen angeboten werden. Gerade diese sind für die Vermittlung von Wissen verantwortlich, das oft auf bedingten Wahrscheinlichkeiten basiert. Ohne verbesserte Information der Allgemeinheit werden sich Falschnachrichten weiter verbreiten und viele Menschen aufgrund von Unwissen in Panik verfallen. Sowohl die Forschung als auch deren Umsetzung sind dabei noch lange nicht am Ziel.

Dennoch hoffen wir, klar gemacht zu haben, wieso eine verbesserte Bildung und Information hilfreich wäre, und einen Ansatz geliefert zu haben, wie dies sowohl in der Schulbildung, als auch in den Medien und im Alltag möglich wäre.

Literatur

[1] J. Engel & P. Sedlmeier: *Zum Verständnis von Zufall und Variabilität in empirischen Daten bei Schülern.* Unterrichtswissenschaft - Zeitschrift für Lernforschung(32) (2004).

[2] L. Hefendehl-Hebeker & B. Schmidt-Thieme: *Handbuch der Mathematikdidaktik.* (2015).

[3] A. Kaiser & L. Martignon: *Boosting students' shared knowledge on basics of statistics and probabilities for unterstanding critical facts about Covid* (2022).

[4] R. Kapadia & M. Borovcnik: *Unsicherheit verstehen lernen: Unterricht in Wahrscheinlichkeit auf der Sekundarstufe.* Mathematik im Unterricht(8) (2017).

[5] S. Krauss: *Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das "Häufigkeitskonzept".* Stochastik in der Schule(23) (2003).

[6] L. Martignon & S. Kuntze: *Good Models and Good Representations are a Support for Learners' Risk Assessment*(. Vol.12 : No.1 , Article 16) (2015).

[7] C. Wassner, R. Biehler, S. Schweynoch & L. Martignon: *Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit Arbeitsmaterialien und didaktische Kommentare für den Themenbereich "Bayessche Regel" für den Stochastikunterricht der Sekundarstufe I.* KaDiSto: Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik(5) (2007).

Weshalb fällt es uns so schwer, statistisch zu denken?
Umgang mit dem Zufall

Kaja Ehmke & Jonathan Willer

Ist bei einem Münzwurf fünfmal hintereinander Kopf gefallen, dann muss doch jetzt einfach Zahl kommen.

In diesem Beitrag werden die Wahrnehmung des Zufalls, die intuitiven Hilfen zur Entscheidungsfindung unter Unsicherheit und die Entscheidungsfindung im Zusammenhang mit Risiko beleuchtet.

Der gesamte Beitrag beruht auf den Werken *Schnelles Denken, Langsames Denken* von Kahneman [2] und *Die Logik des Irrtums: Wie uns das Gehirn täglich ein Schnippchen schlägt* von Beck [1].

Die Wahrnehmung von Zufall

Einführung

Menschen gelten als vernunftbegabte Wesen, sie verhalten sich rational und denken klar. Es wird immer wieder gesagt, dass sich die meisten Fälle, in denen der Mensch nicht rational handelt, durch Emotionen erklären lassen. Denkt man weiter darüber nach, ergeben sich einige Situationen, in denen sich die Entscheidung nicht (nur) durch Emotionen erklären lässt. Daraus ergeben sich einige Fragen: Warum treffen wir als Menschen Entscheidungen, die sich später als falsch herausstellen? Warum wägen wir nicht Argumente sächlich ab, sondern treffen Entscheidungen aus dem Bauch heraus? Warum lösen wir Probleme durch Faustregeln? Warum haben wir falsche Vorstellungen über Risiken, denen wir ausgesetzt sind? Warum vertrauen wir auf unsere intuitiven Überzeugungen und Präferenzen? Oder auch zusammenfassend: Warum fällt es uns so schwer, auf Daten und Fakten basierend rationale Entscheidungen zu treffen?

Eine erste kurze Erklärung ist, dass das menschliche Gehirn nur eine begrenzte Aufnahme- und Verarbeitungskapazität hat, sodass man im Kopf nicht für jede Entscheidungssituation Wahrscheinlichkeiten berechnet und sie gegeneinander abwägt. Die Mechanismen, die in diesem Vortrag besprochen werden, sind eine Reaktion des Menschen auf die komplexe und zum Teil auch unüberschaubare Umwelt. Wir wollen in diesem Beitrag verstehen, wie der Mensch intuitive Entscheidungen und Urteile trifft.

Spielerirrtum und das Gesetz der kleinen Zahlen

Als Einstieg in die Thematik wollen wir uns zunächst die Wahrnehmung von Zufall anschauen. Tauchen wir dazu in die Welt der Spiele ein und betrachten als Beispiel den Münzwurf mit einer fairen Münze.

Wir betrachten drei Folgen an Münzwurfergebnissen:

Kopf Zahl Zahl Kopf Zahl Zahl Zahl Kopf Zahl Zahl

Zahl Kopf Zahl Zahl Kopf Kopf Zahl Kopf Zahl

Kopf Kopf Kopf Zahl Kopf

Die meisten Menschen nehmen die erste und die dritte Münzwurfsequenz nicht als zufällig wahr, die zweite dagegen schon. Sequenzen, die regelmäßige Muster aufweisen, beispielsweise auf Kopf folgt Zahl, auf Zahl folgt Kopf, etc., werden als zufällig wahrgenommen, da sie die Fairness der Münze repräsentieren. Hingegen werden größere Sequenzen gleicher Münzwurfergebnisse nicht als zufällig wahrgenommen, da sich die Ergebnisse auf Kopf und Zahl gleichmäßig aufteilen sollen. »Ist bei einem Münzwurf fünfmal hintereinander Kopf gefallen, dann muss doch jetzt einfach Zahl kommen«, denkt sich ein Spieler und verliert sein Vermögen dank eines Münzwurfs. Das dahintersteckende Phänomen wird Spielerirrtum genannt, welchem die statistische Intuition zugrunde liegt, dass sich zufällige Ergebnisse an einen vorgegebenen Spielplan halten. Dem Zufall wird also zu viel zugemutet; wenn zweimal eine Münze geworfen wird, erwartet der Mensch gemäß der Wahrscheinlichkeiten einer fairen Münze, dass einmal Kopf und einmal Zahl fällt. Wir erwarten also, dass sich auch in den kleinen Ausschnitten unserer Welt das Gesetz der großen Zahlen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt. Dieses besagt, dass wenn eine Münze häufig genug geworfen wird, im Durchschnitt 50% aller Fälle Kopf fällt. Wir vergessen, dass je kleiner die Stichprobe ist, die Ergebnisse unberechenbarer werden. Wir unterstellen dem Zufall also keine Zufälligkeit, sondern eine Regelmäßigkeit.

Wir erwarten weiter, dass der Zufall ein Prozess der Selbstkorrektur ist: Eine Abweichung in die eine Richtung löst eine Abweichung in die andere Richtung aus, um das Gleichgewicht wieder herzustellen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Zufall im Kopf nicht als zufällig, sondern als systematisch wahrgenommen wird.

Entscheidungsfindung

Wie bereits erwähnt sind wir Menschen nur zu einem begrenzten Grad dazu fähig, im Zuge eines Lösungsfindungsprozesses Informationen aufzunehmen und zu verarbeiten. Zur Vereinfachung dieses Prozesses nutzt der Mensch ein System an Hilfen – die sogenannten Heuristiken.

Unter Heuristiken werden »Techniken, mit deren Hilfe komplexe Probleme auf einfache(re) und ökonomische(re) Art und Weise gelöst werden können« verstanden. Insgesamt bedeutet das für den Lösungsprozess, dass der Mensch geneigt ist, Techniken, also die Heuristiken, zu nutzen, um Probleme zu vereinfachen – dass hierbei ein gewisses Maß an Unsicherheit bzw. Ungenauigkeit in der Entscheidungsfindung auftritt, liegt auf der Hand. Im Folgenden werden drei dieser Heuristiken genauer vorgestellt, die bei dem Treffen von Entscheidungen häufig angewendet werden.

Repräsentationsheuristik

Man stelle sich einen beliebigen deutschen Studenten vor; sagen wir, er heißt Tom W. Nun stellt sich die Frage, welches Studienfach er belegt. Zur Auswahl stehen BWL, Philosophie, Soziale Arbeit & Pädagogik sowie Archäoinformatik. In den allermeisten Fällen lautet die Einschätzung von befragten Personen hierzu, dass Tom W. wohl am wahrscheinlichsten ein Student der Betriebswirtschaftslehre sei. Im Ranking am niedrigsten wird hier das Studienfach Archäoinformatik eingestuft. Warum ist das so? Die Erklärung ist hier ziemlich simpel. Bei einer zufälligen Person ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie der größten Gruppe an Studierenden, das ist in diesem Falle die Gruppe der BWLer*innen, angehört, am größten – gleichsam ist die Zugehörigkeit zur kleinsten vorgestellten Gruppe, das sind hier die Archäoinformatiker, eher unwahrscheinlich. So weit so logisch.

Was passiert jetzt aber, wenn wir einige Zusatzinformationen erhalten? Wir erhalten folgende Persönlichkeitsskizze:

»Tom W. ist **hochintelligent**, auch wenn es ihm an echter **Kreativität mangelt**. Er hat ein Bedürfnis nach **Ordnung und Klarheit** und nach **übersichtlichen, strukturierten Systemen**, in denen jedes Element seinen geeigneten Platz findet. Sein **Schreibstil ist eher fade und mechanisch** und wird nur gelegentlich durch etwas **abgedroschene Wortspiele** und ein kurzes Aufblitzen einer **Science-Fiction**-artigen Fantasie verlebendigt. Er scheint **wenig Gespür für andere Menschen** und ein **geringes Einfühlungsvermögen** zu besitzen, und er ist eher **kontaktscheu**. Trotz seiner **Selbstbezogenheit** hat er ein **ausgeprägtes moralisches Bewusstsein**.«

Mit diesen Informationen, welche wohlgemerkt einem psychologischen Test unbekannter Validität entspringen, ergibt sich plötzlich folgendes Ergebnis bei gleicher Frage wie zuvor: Jetzt schätzt die größte Gruppe an Befragten Tom W. als Studenten der Archäoinformatik ein, die soziale Arbeit trauen ihm die wenigsten zu.

Was ist hier passiert? Durch die zusätzlichen Informationen erscheint Tom W. eher ein zurückgezogener, menschenscheuer Mensch zu sein, der sich für klassische »Nerd-Hobbies« interessiert. Das menschliche Gehirn nimmt nun einen Vergleich vor. Nämlich einen Vergleich mit den ihm bekannten Stereotypen für verschiedene Berufs- bzw. Studentengruppen. Und dieser Vergleich führt bei den meisten Menschen in diesem Beispiel dazu, dass Tom W. in die Gruppe der Archäoinformatiker eingeordnet wird.

Diese Methode der Vereinfachung, die auch als »Repräsentationsheuristik« bezeichnet wird, stellt in diesem zweiten Beispiel eine geringere Hürde dar, als die Überlegung, welche Studierendengruppe die größte ist. Das Hirn trickst uns Menschen hier gewissermaßen aus und nutzt die einfacher zugänglichen Informationen, wobei dies nicht automatisch auch die sinnvolleren sein müssen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Tom W. BWL studiert, ist noch immer hoch, denn es gibt unter sehr vielen Studierenden der BWL auch genau solche Menschen, die dem Stereotyp Archäoinformatiker*in entsprechen.

Dass die Repräsentationsheuristik nicht immer in die falsche Richtung abdriftet, zeigen u. A. folgende Beispiele. Die meisten Menschen, die sich freundlich verhalten, sind auch tatsächlich freundlich. Ein großer, schlaksiger Sportler ist eher ein Basketballer als ein Turner. In der Regel weisen junge Männer eine ungestümere Fahrweise auf als ältere Damen.

Verfügbarkeitsheuristik

Bei der sogenannten »Verfügbarkeitsheuristik« nutzt der menschliche Geist ihm aktiv abrufbare bekannte Informationen, um daraus Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten abzuleiten. Es wird dabei die Häufigkeit einer bestimmten Kategorie abgeschätzt, indem Beispiele aus ebendieser abgerufen werden. Findet dieses Abrufen leicht und ohne große Mühe statt, gibt es eine Menge an Beispielen dafür, woraus geschlussfolgert wird, dass diese Kategorie groß und daher von einer größeren Relevanz sei. Daraus ergibt sich dann das Empfinden einer hohen Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des betrachteten Ereignisses. Kurz gesagt wird also die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ereignis eintritt, durch die Frage nach der Menge persönlich bekannter und bewusster Beispiele ersetzt.

Man betrachte beispielsweise die Frage, wie hoch eine Gruppe an Personen jeweils das Risiko bewertet, einen Schlaganfall zu erleiden. Die Schätzungen werden dadurch beeinflusst, wie viele Fälle die jeweilige Person aus ihrem Umfeld präsent hat. Je mehr, desto höher wird die Wahrscheinlichkeit für sich selbst hier eingestuft.

Eine große Schwierigkeit, die sich bei der Anwendung der Verfügbarkeitsheuristik ergibt, ist, dass die Menge an verfügbaren Informationen nicht immer äquivalent zur tatsächlichen Relevanz ist. Manche Themen sind schlichtweg präsenter als andere, ohne dass dies mit einer größeren Häufigkeit korrelieren muss.

Interessant ist im Kontext der Verfügbarkeitsheuristik auch der Nutzen des Nichtwissens. Wenn bestimmte Informationen nicht vorhanden sind, dann stellt dies auch einen Indikator dafür dar, diesen Informationen eine eher untergeordnete Relevanz zuzusprechen.

Wiedererkennungsheuristik

Als dritte und letzte Entscheidungshilfe betrachten wir nun die »Wiedererkennungsheuristik«. Diese ähnelt der Verfügbarkeitsheuristik in gewissen Maß, jedoch wird hier nun nicht auf das aktive Wissen, sondern auf das passive Wissen in Form des Wiedererkennens zurückgegriffen – dies macht die Wiedererkennungsheuristik im Vergleich zu der mächtigeren Methode. Bei Fragen beispielsweise nach dem Größenvergleich von Städten neigt der Mensch dieser Methode nach in erster Instanz dazu, diejenige Stadt als größer einzuschätzen, über die er mehr Informationen hat. Ein erläuterndes Beispiel: Es sollen zwei Städte miteinander verglichen und nach ihrer Größe geordnet werden. Wenn über beide

Städte kein genaues Wissen vorherrscht, so wird beispielsweise das Wissen um die Existenz eines großen Fußballvereins, den Status einer Hauptstadt, bekannte Sehenswürdigkeiten etc. hinzugezogen – die Stadt mit mehr derartigen Informationen wird dann als größer eingeschätzt.

Ein spannendes Beispiel, was diesen Gedanken fortführt, ist das fiktive Duell im Städteraten zwischen einem Deutschen und einem Schweizer. Ausgangslage ist die folgende: Insgesamt werden zwölf Paarungen an Städten genannt und die Aufgabe der beiden Spieler ist jeweils, die größere Stadt zu benennen. Dem Deutschen sind dabei alle 24 Städte namentlich ein Begriff und er tippt zu 60 % auf die richtige Antwort. Der Schweizer hingegen kennt nur zwölf der Städte, also genau die Hälfte. In vier Fällen sind ihm beide Städte bekannt und er rät ebenfalls zu 60 % korrekt. In ebenfalls vier Fällen kennt er eine der beiden Städte und tippt dann mit einer Erfolgsquote von 80 % korrekt. Die letzten vier Paarungen bestehen aus ihm unbekannten Städten, sodass er zu 50 % die richtige Auswahl trifft.

Insgesamt ergibt sich dann für den Deutschen eine »idealisierte« Trefferquote von 7,2 von zwölf, wohingegen der Schweizer in Summe auf einen Erwartungswert von 7,6 von zwölf Städten kommt und damit auf lange Sicht eine höhere Siegchance hat, obwohl er über weniger Kenntnisse verfügt. Was anhand dieses Beispiels deutlich wird, ist der sogenannte »Weniger ist mehr«-Effekt. Es lässt sich hiermit eindrucksvoll zeigen, dass die Spitze der Effektivität bei der Wiedererkennungsheuristik bei etwa dem „halben Wissen“ auftritt.

Ein anderes Beispiel, bei dem ebenfalls die Wiedererkennungsheuristik eine Rolle spielen kann, ist die Werbung. Bei Preisgleichheit zweier Produkte wird die Wahl im Mittel eher auf das uns bekannte Markenprodukt fallen, als auf etwas, das wir nicht kennen. Hierbei ist es natürlich von Bedeutung, dass uns das Produkt in positiver Erinnerung ist.

Umgang mit dem Risiko

Wir betrachten nun ein paar Entscheidungssituationen. Dabei ist es wichtig, anzumerken, dass die vorgestellten Ergebnisse Entscheidungen der Durchschnittsgesellschaft sind, sehr reiche und sehr arme Menschen sind hier nicht berücksichtigt.

Wird die Mitte der Gesellschaft befragt, ob sie sich für eine 95-prozentige Wahrscheinlichkeit auf 10.000 € Gewinn oder für 9.500 € sicheren Gewinn entscheiden würden, entscheiden sich die meisten für den sicheren Gewinn. Werden jedoch Verluste betrachtet, verändert sich die Situation. Bei der Entscheidung, ob 95-prozentige Wahrscheinlichkeit auf 10.000 € Verlust oder 9.500 € sicherer Verlust gewählt wird, sind die meisten Menschen risikofreudiger und entscheiden sich für die erste Option. Werden niedrigere Wahrscheinlichkeiten gewählt, entscheiden sich viele für die 5-prozentige Möglichkeit auf 10.000 € Gewinn anstatt 500 € sicheren Gewinn zu wählen und bei Verlusten wird sich für 500 € sicheren Verlust anstatt die 5-prozentige Wahrscheinlichkeit 10.000 € Verlust in Kauf zu nehmen, entschieden.

Mathematisch betrachtet sollte sich die Gewichtung der Ergebnisse und somit auch die Entscheidung für oder gegen eine Option an den Wahrscheinlichkeiten orientieren. Je wahrscheinlicher ein Ergebnis ist, umso stärker sollte es gewichtet werden. Der Mensch entscheidet sich also nicht nach dem Erwartungswert. Menschen entscheiden sich aber, wie oben aufgeführt, nicht mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Begründen lässt sich dies auf der einen Seite dadurch, dass Entscheidungssituationen und somit dem Ausgang von Handlungen von einem Referenzpunkt aus betrachtet wird. In Abhängigkeit dieses Referenzpunktes werden Abweichungen nach oben als Gewinn und Abweichungen nach unten als Verlust wahrgenommen. Ein Verlust wird jedoch doppelt so schmerzhaft wahrgenommen wie ein Gewinn Glücksgefühle beschert. Aufgrund dieser Empfindungen werden Menschen bei der Aussicht auf Verluste risikofreudiger und scheuen bei Gewinnen eher das Risiko.

Dies lässt sich über zwei Effekte begründen. Der Möglichkeitseffekt sorgt dafür, dass sehr unwahrscheinliche Ergebnisse unverhältnismäßig stark gewichtet werden. Wir messen kleinen Wahrscheinlichkeiten eine zu große Bedeutung bei, welches sich dadurch erklären lässt, dass es das Gehirn nicht gewohnt ist, mit dem abstrakten Konzept der Wahrscheinlichkeit umzugehen. Dieser Effekt lässt den Menschen Lose kaufen oder auch Versicherungen abschließen. Der Sicherheitseffekt wirkt in der entgegengesetzten Richtung. Ergebnisse, die aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung fast sicher sind, werden im Verhältnis zur Wahrscheinlichkeit untergewichtet. Dies führt auch dazu, dass sichere Ergebnisse übergewichtet werden.

Der Sicherheitseffekt greift in den ersten beiden Entscheidungssituationen, die oben beschrieben wurden. In Kombination mit den zentral ausgelösten Gefühlen, die durch die Aussicht auf Gewinn oder Verlust ausgelöst werden, sorgt dieser in der ersten Situation dafür, dass wir Angst vor der Enttäuschung haben und uns somit risikoscheu verhalten. In der zweiten Situation löst er die Hoffnung aus, Verluste vermeiden zu können, sodass wir uns risikofreudiger verhalten.

Der Ausgang der dritten und vierten Entscheidungssituation lässt sich durch den Möglichkeitseffekt erklären. In der dritten Situation löst er Hoffnung auf einen Gewinn aus, sodass wir uns risikofreudig verhalten. In der vierten Situation haben wir Angst vor einem hohen Verlust und sind risikoscheu.

Schlussfolgern lässt sich, dass sich die Entscheidungsgewichte, die Menschen Ergebnissen zuschrieben, im Widerspruch zum Erwartungsprinzip stehen und nicht identisch mit den Wahrscheinlichkeiten dieser Ergebnisse sind.

Weshalb fällt es uns so schwer, statistisch zu denken?

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass dem Zufall zu viel zugemutet wird, er als systematisch und regelmäßig angenommen wird. Die Urteilsheuristiken werden dann zur Lösung bei komplexen Wahrscheinlichkeitsurteilen genutzt und das Problem dadurch auf eine einfache Urteilsoperation reduziert, was zu Fehleinschätzungen führen kann. Menschen werden risikofreudiger, wenn sie es mit unwahrscheinlichen Gewinnen zu tun haben und risikoscheuer, wenn es um unwahrscheinliche Verluste geht.

In unserem Beitrag konnten wir nur einen Teil der Psychologie beleuchten, warum es so schwerfällt, Statistiken für Entscheidungsprozesse zu nutzen. Auch andere Effekte wie beispielsweise Überoptimismus, der Rückschaufehler, Wahrscheinlichkeitsvernachlässigungen oder Formulierungseffekte spielen eine Rolle.

Die Frage, weshalb es uns so schwerfällt, statistisch zu denken, lässt sich zusammenfassend wie folgt beantworten: Unser Denken ist beschränkt, wir vertrauen zu viel in das, was wir zu wissen glauben, wobei wir auch die Rolle des Zufalls unterschätzen. Wir vertrauen in die Vorhersehbarkeit der Welt und nehmen durch die unterbewusste Anwendung von Heuristiken kognitive Verzerrungen in Kauf.

Die Vorteile der Nutzung von Heuristiken

Da in diesem Vortrag ein Augenmerk auf die Fehler geworfen wurde, die durch die Nutzung von Heuristiken zur Entscheidungsfindung entstehen können, soll nun noch einmal kurz der Nutzen der Heuristiken beleuchtet werden. Heuristiken werden angewandt, wenn eine Entscheidung unter Unsicherheit getroffen werden muss: Es liegen zu wenige Informationen vor, die Situation ist komplex oder eine Entscheidung muss unter Zeitdruck getroffen werden. Heuristiken sorgen häufig für valide Urteile, z. B. wenn der Bekanntheitsgrad eines Produkts mit der Qualität korreliert.

Heuristiken sind trotz der im Vortrag behandelten Fehler äußerst ökonomisch und effektiv. Sie beschleunigen Entscheidungsfindungsprozesse enorm, indem die Informationsverarbeitung vereinfacht wird. Jede Entscheidung analytisch abzuwägen, würde das Gehirn überfordern und lange dauern. Ein Beispiel: Wir sehen aus dem Augenwinkel ein großes Tier mit gestreiftem Fell. Die Wiedererkennungsheuristik lässt uns darin einen Tiger erkennen und löst einen Fluchtinstinkt aus. In dieser Situation haben wir keine Zeit, noch einmal genau zu schauen. Die durch den Nutzen der Heuristik gewonnene Zeit kann unser Überleben sichern, was sie evolutionär auch getan hat. Zum Abschluss noch ein weniger drastisches, aus dem Alltag gegriffenes Beispiel: Die meisten Menschen können durch den intuitiven Einsatz von Heuristiken erkennen, dass es in der Unterhaltung um sie geht oder beim ersten Wort eines Anrufers, dass dieser wütend ist und entsprechend schnell reagieren.

Urteilsheuristiken sind schlussendlich also vernünftige Strategien, die häufig relativ gut funktionieren und den Gesetzmäßigkeiten des menschlichen Denkens entsprechen. Durch ihre Nutzung können brauchbare Ergebnisse und eine befriedigende Problemlösung erzielt werden, die getroffenen Entscheidungen können aber auch mit Fehlern verbunden sein. Es gibt jedoch, wenn eine Entscheidung unter Zeitdruck oder ohne das Vorliegen aller Informationen getroffen werden soll, auch keine Alternative zu diesen. Der Mensch sollte sich aber der möglicherweise auftretenden Fehler bewusst sein.

Literatur

[1] H. BECK: *Die Logik des Irrtums: Wie uns das Gehirn täglich ein Schnippchen schlägt.* Frankfurter Allgemeine Buch (2008).

[2] D. KAHNEMAN: *Schnelles Denken, Langsames Denken.* Siedler (2012).

Mittelalterliche Rechtssprechung – Damals und Heute Über den Einfluss von Wahrscheinlichkeit und Statistik im Recht

Tim-Jonas Peter & Jenny Schrage

In unserem Artikel beschäftigen wir uns mit dem Gebrauch von probabilistischen Argumenten und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden vor Gericht in der Vergangenheit und der Gegenwart. Solche Argumentationen treten im Recht vor allem in Fällen mit sehr unklarer Beweislage auf und haben Anwälte und Richter schon immer beschäftigt, wie ein Blick in die Vergangenheit zeigt. Außerdem ist der Wert solcher Argumente auch im heutigen Recht noch kontrovers, vor allem der Gebrauch von Statistiken in Kriminalfällen.

Wahrscheinlichkeit im mittelalterlichen Recht

Schon die frühesten Gesetzestexte antiker Zivilisationen beschäftigen sich mit Fällen, in denen eine unklare Beweislage vorliegt, und somit der Schuld oder Unschuld einer Person ein Überzeugungsgrad zugewiesen werden muss. In dem babylonischen Talmud, also den jüdischen Gesetzestexten (entstanden zwischen dem 4. und 6. Jh. n. Chr., siehe *Encyclopedia Britannica - Talmud and Midrash* [2]), finden sich entsprechende Regelungen. Dort wird in strafrechtlichen Verfahren eine unklare Beweislage komplett verboten und eine Verurteilung war nur aufgrund klarer Beweise möglich. Auch in den römischen Gesetzestexten, die unter Kaiser Justinian I. im 6. Jahrhundert nach Christus niedergeschrieben wurden, finden sich entsprechende Regelungen über den Umgang mit Beweisstücken, die keine eindeutige Schuldzuweisung ermöglichen. Als eine klare Beweislage, auf deren Grundlage eine Verurteilung möglich ist, sehen beide Texte die Aussagen von zwei seriösen Zeugen an. Der Begriff »seriös« kann hier jedoch von Gesellschaft zu Gesellschaft unterschiedliche Bedeutungen haben. Die römischen Gesetzestexte ließen auch noch weitere Beweisstücke zur Überführung eines Straftäters zu, zum Beispiel das Hinzunehmen privater Dokumente, etwa Briefe o. ä.. Die Texte des römischen Rechts waren jedoch zu Beginn des Mittelalters in Europa weitestgehend in Vergessenheit geraten und konnten erst nach ihrer Wiederentdeckung im 11. Jh. n. Chr. in Italien ihren Einfluss auf das kontinentale Recht in Europa ausüben (siehe FRANKLIN [3]).

Die wiederentdeckten römischen Gesetze wurden im Italien des Hochmittelalters und im Rest von Europa intensiv studiert und durch sogenannte Glossatoren kommentiert. Diese wollten aus den vielen Fallbeispielen im römischen Recht allgemeine Prinzipien herleiten, somit ergaben sich neue Begriffe und Regeln für Richter, die sich auch mit der Überzeugungskraft von Beweisstücken beschäftigten. Obwohl sich die Zwei-Zeugen-Regel als Standard etabliert hatte, blieb die Frage offen, wie man z. B. mit einzelnen Zeugenaussagen, privaten Dokumenten oder dem Vergleich von Handschriften als Beweismittel umzugehen hatte. Dazu erfanden die Glossatoren den Begriff des *Halbbeweises* (lat. *semiplena probatio*), der die Beweisstücke beschreiben sollte, die nicht zum Schuldnachweis ausreichten, aber trotzdem nicht wertlos waren. Das beste Beispiel für einen solchen Halbbeweis ist eine einzelne Zeugenaussage, wie oben erwähnt, oder der Vergleich von Handschriften. Um die verschiedenen Überzeugungsgrade des Richters auszudrücken, wurde der Begriff der *Vermutung* (lat. *praesumptio*) geprägt und in drei Stufen der Überzeugung unterteilt: *Leichte, mäßige* und *heftige Vermutung*. Vor allem der Halbbeweis ist interessant, da es in Prozessen erlaubt war, Halbbeweise verschiedener Art zu addieren und so einen vollen Beweis zu erhalten (siehe FRANKLIN [3]).

Die oben erwähnten Begriffe behielten ihre Bedeutung bis in die frühe Neuzeit, wo sie auch während der Hexenverfolgung in Europa ihre Anwendung fanden. So erwähnt z. B. der *Hexenhammer* – ein von SPRENGER & KRAMER [7] 1486 verfasstes Buch, dass die Hexenverfolgung legitimieren soll – in einem Kapitel, in dem es um die Überführung von Hexen und Hexern geht, explizit die Begriffe des Halbbeweises sowie die unterschiedlichen Vermutungsgrade. Der Hexenverfolgung fielen einige prominente Personen zum Opfer, so zum Beispiel auch Katharina Kepler, die Mutter von Johannes Kepler, die im frühen 17. Jahrhundert angeklagt wurde und schließlich durch die Verteidigung ihres Sohnes freigesprochen wurde (siehe RUBLACK [5]). Im Laufe der Neuzeit in Europa wurde diese Art der Rechtssprechung schließlich abgeschafft und durch das moderne Recht ersetzt.

Doch auch heutzutage finden probabilistische Argumente noch Anwendung im Recht, jedoch in anderen Formen. Der nächste Abschnitt und zweite Teil unseres Artikels behandelt einen solchen strafrechtlichen Prozess.

Wahrscheinlichkeit im modernen Recht – Der Fall Sally Clark

Welchen Einfluss Wahrscheinlichkeitsüberlegungen und Statistiken im modernen Strafrecht haben, zeigt sich eindrucksvoll am Beispiel der englischen Anwältin Sally Clark. Im Jahr 1996 verstarb ihr erstgeborener Sohn einige Wochen nach der Geburt, woraufhin die Ärzte eine Entzündung der Atemwege als Todesursache vermuteten. Zwei Jahre später verstarb auch ihr zweiter Sohn kurze Zeit nach der Geburt aus medizinisch ungeklärten Gründen. Daraufhin begann die Staatsanwaltschaft zu ermitteln, um ein mögliches Gewaltverbrechen auszuschließen. Clark und ihr Ehemann fühlten sich jedoch in Bezug auf den Ausgang des Prozesses, der in Ihren Augen zunächst eine reine Formalität darstellte, sehr sicher. Doch obwohl sich die Argumentation der Staatsanwaltschaft nur auf Indizien stützte, wurde Clark wegen Mordes angeklagt. Die Lage verschlimmerte sich, als der hinzugezogene Gutachter, der renommierte englische Kinderarzt Sir Roy Meadow, eine bestimmte Zahl ins Spiel brachte. Er errechnete die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie wie in der von Clark zwei Kinder hintereinander am plötzlichen Kindstod sterben und kam auf ein Ergebnis von 1:73 000 000. Trotz offensichtlicher Logikfehler (Zahl gibt nicht die Wahrscheinlichkeit für Clarks Unschuld an, zudem sind die beiden Todesfälle keine unabhängigen Ereignisse) führte diese Zahl zum Trugschluss der Staatsanwaltschaft, Clark sei mit ebendieser Wahrscheinlichkeit unschuldig. Obwohl noch immer keine Beweise vorlagen, wurde Clark schuldig gesprochen und auch ein Berufungsverfahren verlief erfolglos. Etwa vier Jahre nach dem Schuldspruch konnte Clark freigesprochen werden, da Papiere auftauchten, die den natürlichen Tod ihres zweitgeborenen Kindes beweisen konnten. Einige Jahre später starb Clark jedoch an den Folgen psychischer Krankheit und Alkoholsucht.

Der Gebrauch von probabilistischen Argumenten

Der Fall von Clark ist nur ein Beispiel von vielen Fällen, in denen falsche Schuldsprüche durch statistische und wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen stattfanden. Besonders Statistiken vereinfachen die Komplexität der Wirklichkeit stark, dabei können Zahlen eine falsche Objektivität vortäuschen, und Informationen gehen zwangsläufig verloren. Neben der Statistik sind Indizien (lat.: »Anzeichen«), obwohl sie keine Beweise darstellen, Bestandteil vieler Strafprozesse. Das hat den einfachen Grund, dass sich mangels Beweisen Indizienverfahren oft nicht vermeiden lassen. Beispiele für Indizien in heutiger Zeit sind bestimmte Verletzungen, DNA-Spuren, Fingerabdrücke oder Kleidungsfasern.

Es wird deutlich, dass es sich trotz des starken historischen Wandels im Strafrecht auch heute kaum vermeiden lässt, auf probabilistische Argumente zurückgreifen zu müssen. Diese können, genau wie Statistiken, einen guten Beitrag im Strafprozess leisten, wenn die Gefahren bekannt sind und reflektiert werden.

Literatur

[1] J. BATT: *Stolen Innocence: The Sally Clark Story - A Mother's Fight for Justice.* Ebury Publishing (2004).

[2] *Encyclopedia Britannica - Talmud and Midrash*
URL: `https://bit.ly/3Mf9k1r` (aufgerufen am 08. 05. 2023).

[3] J. FRANKLIN: *The science of conjecture : Evidence and probability before Pascal.* Kapitel 1 bis 3. Johns Hopkins University Press (2015).

[4] L. HELLER: *Wie wahrscheinlich ist die Wahrheit?*
URL: `https://bit.ly/3HZgMeG` (aufgerufen am 12. 01. 2023).

[5] U. RUBLACK: *The Astronomer and the Witch.* Oxford University Press (2015).

[6] *Sally Clark - victim of a miscarriage of justice*
URL: `https://bit.ly/42uokOz` (aufgerufen am 07. 01. 2023).

[7] J. SPRENGER & H. KRAMER: *Der Hexenhammer.* Dritter Teil, Neunzehnte Frage. Area Verlag (2005).

Das Schicksal spielt unser Leben. Wie Zufall und Gerechtigkeit zusammenhängen.

Freya Geishecker & Ilja Karpenko

Die Prinzipien der Gerechtigkeit werden hinter einem Schleier des Nichtwissens ausgewählt.

(John Rawls)

Das Ziel dieses Vortrages ist verschiedene Arten der Zusammenhänge zwischen Zufall und Gerechtigkeit aufzuzeigen und die Frage nach der Gerechtigkeit des Zufalls aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten und beantworten zu können. Mit den Zuhörenden wird ein Gedankenexperiment durchgeführt, welches den Zufall zum einen ausschaltet und zum anderen nutzt, um gerechte Prinzipien für eine Gesellschaft zu finden.

Das Gedankenexperiment

Durchführung und Ergebnisse des Gedankenexperiments

Zu Beginn des Vortrages wurde die Frage in den Raum gestellt, ob sich die Zuhörenden in ihrer aktuellen Lebenssituation gerecht behandelt fühlten. Anschließend wurde diese Frage von den Vortragenden aus ihrer Perspektive beantwortet. So gibt es beispielsweise einige Aspekte, wie das Geschlecht, die Verteilung von bestimmten Gütern oder die körperliche Gesundheit, welche man nicht selbst bestimmen kann, sondern in die man gewissermaßen zufällig hineingeboren wird. Diese Zufälligkeiten der Natur können zu Ungleichheiten in einer Gesellschaft führen. Wie sollte man damit umgehen, um trotzdem zu einer möglichst gerechten Gesellschaft zu gelangen? Dieser Gedanke sollte mittels des folgenden Experiments verfolgt werden: »Ihr befindet euch in einer Gruppe aus vier Personen im Schleier des Nichtwissens. Vor euch findet ihr einen Brief. Auf diesem steht: ›Wer sich im Schleier des Nichtwissens befindet, muss sich in seiner Gruppe auf Prinzipien oder Regeln einigen, welche in einer neuen Gesellschaft gelten sollen. Wenn ihr euch geeinigt und eure Prinzipien festgehalten habt, fallt ihr in einen tiefen Schlaf. Anschließend erwacht ihr zufällig in einer Rolle einer Gesellschaft, in der nur eure Prinzipien gelten.‹« Der Schleier des Nichtwissens ist ein kreierter Zustand, in dem sich persönliche Merkmale wie Geschlecht, soziale Schicht, körperliche Gesundheit und Verfassung und vieles mehr hinter einem Schleier befinden und für einen selbst sowie für andere unerkennbar sind. Die Zufälligkeiten der Natur bleiben somit verborgen. Nur das Wissen aus schlauen Büchern ist in diesem Zustand vorhanden, wie beispielsweise das Kommunizieren, psychologisches, ökonomisches oder ähnliches Wissen. Dieser Zustand soll für Fairness und Unvoreingenommenheit sorgen in der Beantwortung der Ausgangsfrage, weil so eine symmetrische Verhandlungssituation geschaffen wird. Nach dem Vorstellen des Gedankenexperiments konnten sich die Zuhörenden in kleinen Gruppen in das Gedankenexperiment hineinbegeben und über gerechte Prinzipien diskutieren und diese festhalten. Die Ergebnisse wurden festgehalten und sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

Abbildung 1: Ergebnisse des Gedankenexperiments

Ergebnisse des Gedankenexperiments von John Rawls

Mit der Frage, wie man mit solchen Zufälligkeiten der Natur und den daraus entstehenden Ungleichheiten umgehen sollte, hat sich auch der Philosoph John Rawls [3] u. Rawls, Kelly & Schulte [4] beschäftigt. Zur Beantwortung dieser Frage nutzte Rawls auch den Schleier des Nichtwissens und beschreibt ein sehr ähnliches Gedankenexperiment. Seine Argumentation und Ergebnisse hat er in seinem Buch *Eine Theorie der Gerechtigkeit* festgehalten. Im Jahre 2001 veröffentlichte Rawls eine überarbeitete Version mit dem Titel *Gerechtigkeit als Fairness: Ein Neuentwurf*. Rawls zufolge entscheiden sich die Personen im Schleier des Nichtwissens anhand der Maximin-Regel. Das bedeutet es werden zunächst alle möglichen Entscheidungsoptionen nach ihren jeweiligen Ergebnissen sortiert. Unter den Entscheidungsoptionen mit den ungünstigsten Ergebnissen werden diejenigen ausgewählt, welche den größten Nutzen oder Wert beinhalten. Eine Entscheidung anhand der Maximin-Regel wird auch als risikoscheue Entscheidung bezeichnet. Folgt man der Argumentation Rawls, so entscheiden und einigen sich die Personen im Schleier des Nichtwissens auf zwei Gerechtigkeitsprinzipien, welche hierarchisch angeordnet sind. Zunächst muss das erste Prinzip erfüllt sein, bevor sich dem zweiten Prinzip zugewendet werden darf. Die Prinzipien von Rawls sehen wie folgt aus:

(i) Jede Person hat den gleichen Anspruch auf ein System gleicher Grundfreiheiten, das mit demselben System von Freiheiten für alle vereinbar ist.

(ii) Soziale und ökonomische Ungleichheiten müssen folgendermaßen beschaffen sein:

   (a) Sie müssen mit Ämtern und Positionen verbunden sein, die allen gemäß fairer Chancengleichheit offen stehen

   (b) Sie müssen den am wenigsten Begünstigten den größtmöglichen Vorteil bringen (Differenzprinzip)

Es lassen sich einige Parallelen zwischen den Ergebnissen von Rawls und den Ergebnissen der Zuhörenden feststellen. So findet sich beispielsweise der erste Grundsatz von Rawls in vielen Beiträgen der Zuhörenden wieder. Zudem werden die Ideen der Religions-, Meinungs-, Informationsfreiheit von den Zuhörenden genannt, welche auch Rawls in seinem Werk *Gerechtigkeit als Fairness: Ein Neuentwurf* aufgreift. Die Ideen der Chancengleichheit von den Zuhörenden findet sich im zweiten Grundsatz von Rawls wieder.

Glück, Pech und Gerechtigkeit

Vier Sichtweisen zu Glück und Pech

Beim durchgeführten Gedankenexperiment von Rawls wurde darauf aufmerksam gemacht, dass bei Rawls der Zufall einerseits nicht für Gerechtigkeit sorgt und somit mit etwas Negativen verbunden wird und andererseits für mehr Objektivität bei Entscheidungsprozessen sorgen kann und somit mit etwas Neutralem oder Positiven verbunden wird. Beispielsweise sind Herkunft, soziale Schicht, körperliche Beschaffenheit und vieles mehr zufällig und vielleicht nicht bewusst von den Menschen gewählt worden. Andererseits wurde der Zufall im Gedankenexperiment genutzt, um eine symmetrische Ausgangslage zu schaffen für das Aushandeln von Grundprinzipien einer Gesellschaft. Zufall wird auch in anderen Kontexten oft positiv oder negativ konnotiert und dementsprechend als »Glück« oder »Pech« betitelt. Diese Begrifflichkeiten werden ebenso in Bezug auf gesellschaftliche Ungleichheiten genutzt. Gesellschaftlich besser gestellte Menschen haben mehr »Glück« gehabt, andere hatten »Pech«. Glück kann auf verschiedene Arten und Weisen betrachtet werden. Im Folgenden sollen vier solcher Möglichkeiten dargestellt werden.

(i) Resultierendes Glück: Resultate unserer Handlungen sind von Glück beeinflusst. Beispielsweise eine Berufsausbildung, welche eine Person vor vielen Jahren abgeschlossen hatte und die jetzt besonders gebraucht wird.

(ii) Umstandsglück: Die Umstände in denen wir handeln bringen Glück oder Pech mit sich. Beispielsweise wird eine unter stressigen Umständen getroffene Entscheidung eher zu Pech führen als eine Entscheidung unter entspannten Umständen.

(iii) Bestimmendes Glück: Glück beeinflusst die Art von Menschen, die wir sind und das Leben, das wir leben. Beispielsweise haben manche Menschen genetisch ein größeres Risiko durch Rauchen an Krebs zu erkranken. Diejenigen haben Glück, die dabei nicht Krebs bekommen.

(iv) Bedingtes Glück: Unsere Vorgeschichte ist Glück und beeinflusst uns langfristig, wie beispielsweise unser Elternhaus.

Fünf Theorien zur Verteilungsgerechtigkeit

Zufall und Gerechtigkeit sind z. B. im Rahmen verschiedener Theorien zur Verteilungsgerechtigkeit miteinander verbunden. Die folgenden fünf Theorien sollen vorgestellt werden.

(i) Egalitarismus: Diese Theorie besagt, dass nur eine Gleichverteilung gerecht ist. Der Zufall sollte also ausgeschaltet oder glückliche oder unglückliche Zufälle ausgeglichen werden.

(ii) Suffizientarismus: Diese Theorie bezeichnet eine Verteilung als gerecht, wenn alle Personen einen bestimmten Schwellenwert erreicht haben. Alle Personen sollten genug haben. Alles was über diesen Mindestwert geht, ist in Ordnung. Es wird versucht den Zufall in der Verteilung zu kontrollieren.

(iii) Prioritarismus: Nach dieser Theorie ist eine Verteilung gerecht, wenn die am schlechtesten Gestellten die größte Priorität zukommt. Hierbei wird der Zufall in der Verteilung als eine Art Sortiermechanismus genutzt.

(iv) Differenzprinzip: Wie man bei dem zweiten Grundsatz von Rawls beobachten kann, beschreibt dieses Prinzip eine ungleiche Verteilung als gerecht, wenn es allen Bürgerinnen nützt.

(v) Utilitarismus: Diese Theorie ist unter der Maxime »Das größte Glück der größten Zahl« bekannt und legt den Fokus nicht auf Einzelschicksale. Der Zufall spielt dabei eine untergeordnete Rolle und es kommt auf den Gesamtnutzen an.

Literatur

[1] ANIMAL ETHICS: *Unterschiedliche Ethiktheorien (Blog)* URL: `https://tinyurl.com/unterschiedliche` (aufgerufen am 13. 02. 2023).

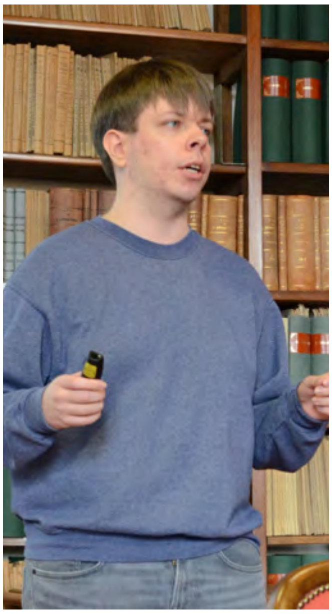
[2] K. LIPPERT-RASMUSSEN: *Justice and bad luck*. Stanford Encyclopedia of Philosophy (2005).

[3] J. RAWLS: *Eine Theorie der Gerechtigkeit*. Suhrkamp (1979).

[4] J. RAWLS, E. KELLY & J. SCHULTE: *Gerechtigkeit als Fairness: Ein Neuentwurf*. Suhrkamp (2003).

Zufällig Sicher - Sicher Zufällig. Was muss der Kryptograph über den Zufall wissen?

Moritz Harnisch



> Computer sind nutzlos. Sie können nur Antworten geben.
>
> *(Pablo Picasso)*

In diesem Beitrag soll die Rolle des Zufalls in der Kryptographie kurz diskutiert werden und anschließend die Nachweisbarkeit von Zufall untersucht werden.

Zufällig Sicher

Kryptographie

Warum benötigt man in der Kryptographie den Zufall? Um diese Frage zu beantworten, muss erst kurz festgestellt werden, was Kryptographie eigentlich ist.

Eine wesentliche Aufgabe der Kryptographie ist das Verbergen von Informationen gegenüber Dritten (siehe dazu unter anderem POHLMANN [3]). Um dies zu gewährleisten, muss man Informationen, welche man geheim halten möchte, verschlüsseln. Dafür benötigt man wiederum einen Schlüssel, welcher auch vor Dritten geheim gehalten, aber auch dem Empfänger der verschlüsselten Nachricht mitgeteilt werden muss. Aus diesem Dilemma ergeben sich einige Kompromisse, welche eingegangen werden müssen.

Passwörter

Eine alltägliche Situation, in der man der Kryptographie begegnet, bilden Anmeldemasken. So muss meist ein Passwort eingegeben werden, um z. B. auf ein E-Mail-Postfach zuzugreifen. Die meisten Systeme geben dabei kein Passwort vor, sondern lassen den Benutzer des Systems dieses zu Beginn – meist bei der Erstellung eines Kontos – selber festlegen. Vor allem bei wichtigen Daten, welche durch ein Passwort gesichert werden, scheint es im ersten Moment verwunderlich, warum Passwörter wie »123456«, »qwerty«, »password« oder »iloveyou« zu den beliebtesten Passwörtern unserer Zeit gehören (siehe DOEL [1]). Sobald jedoch auch betrachtet wird, wie viele verschiedene Konten ein Durchschnittsnutzer heutzutage betreibt – also Internet Banking, E-Commerce, E-Mail, Social Media etc.– so findet sich schnell eine Erklärung. Durch die Herausforderung sich so viele Anmeldedaten zu merken, existiert praktisch nur die Möglichkeit, entweder für jedes Konto das gleiche, dafür ein relativ komplexes Passwort zu verwenden, oder eben sich jedes Mal ein neues, weniger komplexes Passwort auszudenken. Eine Abhilfe hierfür bieten allerdings sogenannte Password Manager, welche primär zweierlei Funktionen aufweisen. Zum einen dienen diese als zentraler Ablageort aller Anmeldeinformationen des Benutzers, zum anderen können diese Password Manager auch neue Anmeldeinformationen, sprich Passwörter, generieren. Um aber nicht-triviale Passwörter zu generieren, benötigt man nun ein Prozess, welcher sichere Passwörter erzeugen kann.

Messenger

Ein weiteres Szenario, welches näher am anfangs beschriebenen Kryptographie Szenario liegt, ist das Austauschen von Nachrichten zwischen Individuen. Während lange Zeit die Kommunikation über einfache Unterhaltung, Briefpost oder später Telefonie möglich war, ist seit der Verbreitung des Internets ein Austausch von Informationen über dieses Medium zu einer der wichtigsten Kommunikationskanäle geworden. Damit einhergehend ist natürlich das Interesse, Informationen auszutauschen, ohne dass unberechtigte Dritte diese auslesen können. Falls man eine wichtige Nachricht nur an bestimmte Personen weitervermitteln möchte, muss bei der Nutzung des Internets davon ausgegangen werden, dass die übermittelten Daten von Dritten abgefangen und gelesen werden können. Um dabei das Bekanntwerden der eigentlichen Informationen zu verhindern, kann nun eine Verschlüsselung angewandt werden. Dies mag gut für wenige, wichtige Informationen funktionieren, bei denen der Schlüssel sich vom Verfasser der Nachricht ausgedacht, oder besser noch ausgewürfelt wird. Jedoch wird es bei vielen Nachrichten, welche übermittelt werden sollen, entweder schnell sehr zeitintensiv oder unsicher; im schlimmsten Fall beides. Ein solches Szenario ist bei den sogenannten Messengern gegeben, welche ihren Benutzern die Funktion bietet, untereinander private Nachrichten auszutauschen. Sollte jeder Nutzer vor dem Absenden einer Nachricht nach einem Schlüssel gefragt werden, mit welchem die Nachricht verschlüsselt wird, und dieser Schlüssel dann noch dem Empfänger der Nachricht übertragen werden, so würden sich diese Art von Applikationen nie großflächig durchgesetzt haben. Stattdessen wird auch hier von einem Computer bzw. einem Algorithmus ein Schlüssel für jede Nachricht generiert.

Aber wie wird nun durch einen deterministischen Algorithmus ein nicht-trivialer, sicherer Schlüssel – und das auch noch in sehr kurzer Zeit – generiert?

Sicher Zufällig

Kryptographischer Zufall

In den vorherigen Abschnitten wurde ersichtlich, dass ein Algorithmus gefunden werden muss, welcher mit minimalen Eingaben vom Benutzer schnell und sicher Schlüssel bzw. Passwörter generieren kann. Vor allem die Forderung nach Sicherheit der generierten Daten soll hier nun näher betrachtet werden.

Schlüssel werden im allgemeinem als sicher wahrgenommen, wenn diese schwer erratbar, nicht trivial und im Allgemeinen ohne leicht erkennbares Muster generiert werden können. Um diesen Anforderungen zu genügen, soll hier der Zufall als Mittel aufgegriffen werden. Falls ein Schlüssel durch echten Zufall erzeugt wurde, so ist davon auszugehen, dass sich in diesem kein vorher festgelegtes Muster versteckt und dieser nicht nach einem systematischen Vorgehen herausgefunden werden kann. Ein solcher Schlüssel sollte dann nur durch das Durchprobieren aller möglichen Kombinationen herausfindbar sein. Um diese Methode für den Angreifer möglich kostenungünstig zu gestalten, würde es reichen, seinem generierten Schlüssel eine bestimmte Länge mitzugeben, da sich die Anzahl der möglichen Kombinationen durch die Länge des Schlüssels stark erhöht. Während dies also der Idealzustand für einen solchen Algorithmus darstellt, so muss eine tatsächliche Implementierung mit den Limitierungen deterministischer Hardware begnügen. Dabei bieten die sogenannten »Pseudo Random Number Generator« (PRNG) einen Kompromiss, in welchem ein deterministischer Algorithmus verwendet wird, um aus einer kleinen Menge »wirklichem Zufall« eine Zahlenfolge zu generieren. Dafür verwendbar sind zum Beispiel Zeiten, welche für Prozesse gebraucht werden, Mausbewegung vom Benutzer oder die Eingangsspannung an nicht belegten Hardwareeingängen. Daraus wird eine Zahlenfolge generiert, welche keine offensichtlichem Muster aufweist. Ein Beispiel für einen solchen Algorithmus ist z. B. der Mersenne-Twister (siehe Makoto & Takuji [2]).

Zufallstests

So wie es für uns Menschen noch relativ trivial ist zu bestimmen, dass Passwörter wie »123456« und »password« nicht zufällig generiert sind, so ist es für komplexere Schlüssel durchaus schwierig zu sagen, ob sie zufällig generiert wurden. Es stellt sich ja grundsätzlich erstmal die Frage, ob eine mittels PRNG erzeugte Zahlenfolge wirklich zufällig ist, oder doch Muster aufweist. Diese Frage zu beantworten ist nicht sehr einfach, denn eine Zahl aus 6 zufälligen Ziffern kann durchaus die gleiche Chance haben »123456« oder »557056« zu lauten. Als Hilfsmittel werden hier sogenannte Zufallstests verwendet. Bei diesen soll sichergestellt werden, dass der erzeugte Zufall nicht unerwartet häufig bestimmte Eigenschaften aufweist. Ein Beispiel wäre der sogenannte »Runs-Test« (auch »Wald-Wolfowitz runs test«), welcher einen Wert aus nacheinander folgenden Zahlen ermittelt. Es wird also ermittelt, ob hier auch oft genug ein »Run«, also eine Aneinanderreihung ähnlicher Werte, vorkommt. Ein weiterer bekannter Zufallstest ist der Test auf »Kolmogorov complexity«. Dabei wird nach dem kürzesten Programm gesucht, mit dem die gesehenen Daten erzeugt werden. Je kürzer das Minimalprogramm, desto weniger Komplexität bzw. Entropie wird den gesehenen Daten zugestanden. Mit schrumpfender Komplexität ist dann auch unterstellbar, dass sich hier Muster in den Daten befinden, welche ausgenutzt werden können, um ein entsprechend kurzes Programm für die Erzeugung der Daten zu finden. Handelt es sich hier allerdings um wirklich zufällige Daten, so soll auch möglichst kein solches Muster in den Daten vorhanden sein.

Literatur

[1] K. Doel: *What do “password” and President Trump have in common? Both lost ranking on SplashData’s Annual Worst Passwords List.* URL: `https://bit.ly/457cdaR` (aufgerufen am 15. 04. 2023).

[2] M. MAKOTO & N. TAKUJI: *Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator*. TOMACS **8**(1) (1998) 3–30.

[3] N. POHLMANN: *Cyber-Sicherheit: Das Lehrbuch für Konzepte, Prinzipien, Mechanismen, Architekturen und Eigenschaften von Cyber-Sicherheitssystemen in der Digitalisierung*. Springer (2019).

Zufall in der Evolution

Jelle Mathis Kuiper & Hanna Unfug

Wir untersuchen zwei Aspekte, bei denen Zufall in der Evolution der Arten eine Rolle spielt: Zuerst stellen wir uns die Frage nach der Zufälligkeit von Mutationen und kommen auf Basis aktueller Forschung zum Ergebnis, dass, während die Art der Mutation zufällig ist, die Stelle, an der sie auftritt, durch epigenetische Eigenschaften beeinflusst werden kann. Ein zweiter Aspekt ist die Frage, welche Variante sich durchsetzt, nachdem Mutationen aufgetreten sind. Auch hier kommt, anders als durch die Theorie der natürlichen Selektion suggeriert, an einigen Stellen der Zufall zu tragen.

Seit der Antike galt das Dogma der Unveränderlichkeit der Arten. Der erste der dieses Dogma brach war Lamarck [6] (1744–1829). Er veröffentlichte 1809 sein Werk *Philosophie zoologique ou exposition des considérations relatives à l'histoire naturelle des animaux*, in dem er erstmals die Hypothese aufstellte, dass sich Arten verändern. Eines der bekanntesten Beispiel der Lamarckschen Theorie ist, dass Giraffen, welche sich mehr und mehr nach den Blättern strecken, ihren kräftigen Hals an die nächste Generation weitergeben. Seine Idee, dass erworbene Eigenschaften an die Nachkommen weitergegeben werden, beruhte auf dem

Glauben der Zeit. Mit seiner Hypothese der Veränderlichkeit der Arten fand er allerdings keine Anerkennung. Schließlich sammelte Darwin (1809–1882) in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts Belege für die Evolution der Arten und formulierte seine Hypothese der natürlichen Selektion. Allerdings lernte Darwin aus dem Fehler der frühen Veröffentlichung von Lamarcks Werk und machte sich zunächst einen Namen als Naturforscher, indem er andere wissenschaftliche Arbeiten veröffentlichte. Als Mitte des neunzehnten Jahrhunderts deutlich wurde, dass auch der britische Naturforscher Wallace (1823–1913) an einer Evolutionstheorie arbeitete, veröffentlichte Darwin [2] 1859 in *The Origin of Species* seine Erkenntnisse. Damit erklärte er die Evolution der Arten durch einen Mechanismus, der aus Variation von vererbbaren Eigenschaften und anschließender Selektion die Evolution der Arten erklären konnte. Was Darwin allerdings nicht erklären konnte, war der Prozess der Vererbung. Dies war Thema der Forschung von Mendel (1822–1884), welcher an Erbsen forschte und erkannte, dass es „materielle Elemente" geben müsse, welche eine Vererbung erlauben. Erst lange Zeit nach Darwin und Mendel wurde 1952 erkannt, dass die DNA Träger der Erbanlagen ist. Basierend auf Mendels Ideen wurde Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts der Begriff des Gens geschaffen. Die genaue Definition wird auch heute noch auf Basis neuer Erkenntnisse verändert. Wir verstehen hier unter einem Gen einen funktionalen Abschnitt des DNA-Strangs. Nun lässt sich Evolution wie folgt definieren: Evolution ist die Veränderung der genetischen Ausstattung einer Population im Verlauf der Zeit. Diese Definition der Evolution konnten weder Lamarck noch Darwin geben, da sie auf der Kenntnis von Genen beruht.

Zufall in der Evolution

Die Idee, wie wir Zufall in der Evolutionsbiologie verstehen können, beruht auf der Tatsache, dass die Evolution der Arten den Anschein erweckt, zielgerichtet zu sein. Aufgrund dieser Feststellung definierten teleologisch eingestellte Biologen des neunzehnten und zwanzigsten Jahrhunderts, welche Ziel und Zweck in der Evolution zu erkennen glaubten, Zufall folgendermaßen: Ein Ereignis ist *zufällig*, wenn sein Eintreten unabhängig davon ist, ob es günstig oder ungünstig ist. Wir sprechen hier von *günstigen* Mutationen, wenn sie ihrem Träger einen Fitnessvorteil verschafft. Dabei beschreibt die *Fitness* eines Individuums seine Fähigkeit, Nachkommen zu zeugen. Der Begriff „Fitness" wurde schon von Darwin benutzt. Zu Darwins Zeit war es aber nicht möglich, sich das Genom anzuschauen, sodass Darwin die Fitness als Eigenschaft von Individuen verstand. Für ihn war eben dasjenige Individuum am fittesten, welches die meisten Nachkommen produzierte. Seit wir DNA-Analysen durchführen können und den genetischen Code entschlüsselt haben, stellt sich aber natürlich die Frage, ob sich Fitness als

Eigenschaft der genetischen Varianten verstehen lässt. Bei Viren und Bakterien ist die Biologie heute in der Lage, auf Basis des Genoms Vorhersagen zu treffen, wie gut sich diese Variante durchsetzen wird. Man kann also in diesem Fall einer Mutation ansehen, ob sie ihrem Träger einen Fitnessvorteil verschafft oder nicht. Bei Viren und Bakterien lässt sich die Frage also positiv beantworten. Bei anderen Arten ist die Frage noch offen.

Evolution

Es lassen sich zwei Bedingungen für Evolution formulieren. Zum einen die Variation von vererbbaren Eigenschaften, zum anderen die Variation im Fortpflanzungserfolg. Bei ersterer ist wichtig, dass die Eigenschaften, die sich entwickeln, vererbbar sind und die genetische Ausstattung der nächsten Generation auf der genetischen Ausstattung der vorangegangenen Generation basiert. Variation in diesen Eigenschaften kann zum Beispiel durch vererbbare Mutationen oder sexueller Fortpflanzung entstehen. Besonders interessiert uns hierbei der Zufallsaspekt der Mutationen, welcher später genauer mithilfe einer aktuellen Forschungsarbeit von Monroe und anderen thematisiert wird. Die Variation im Fortpflanzungserfolg sorgt dafür, dass die statistische Verteilung der Varianten in einer Population schwankt. Auch hier lassen sich Zufallsaspekte vermuten. Unabhängig von der Ursache für diese Variation, lässt sich bereits festhalten, dass sich diejenige Variante durchsetzt, welche die meisten Nachkommen produziert.

Genetische Ausstattung und Mutationen

Die genetische Ausstattung der Organismen ist in Form von DNA- oder RNA-Strängen in der Zelle abgelegt. Die Unterschiede zwischen DNA und RNA spielen im weiteren Verlauf für uns aber keine Rolle und werden daher vernachlässigt. Man kann sich DNA-Stränge als sehr lange Folgen von vier Buchstaben (A, C, T, G) vorstellen. Die bekannte Form als Doppelhelix kommt daher, dass die Buchstaben stets in komplementären Paaren auftreten. DNA-Stränge, die sich frei im Zellkern bewegen, sind anfällig für Beschädigungen. Beispielsweise können sich die Stränge verkleben und so das spätere Auslesen erschweren, es können aber auch durch physikalische oder chemische Einflüsse Fehler in der Buchstabenfolge entstehen. Ausschließen kann man solche Fehler nie, dies ist ein wesentlicher Grund für Evolution, doch durch Bindung an Proteine kann der DNA-Strang so eng gepackt werden, dass der Zugang zum Strang erschwert wird. Die wichtigsten dieser Proteine sind die *Histone*, welche auch noch eine weitere Aufgabe übernehmen: Durch chemische Veränderung der Histone kann die Packung der DNA an bestimmten Stellen gelockert werden. Weil erst diese

Lockerung das Auslesen der DNA erlaubt, kann also über die Histone gesteuert werden, welche Abschnitte des DNA-Strangs überhaupt aktiviert sind. Die Erforschung der Mechanismen, mit denen die Genexpression gesteuert wird, ist Teil der *Epigenetik*, welche sich mit denjenigen Aspekten der Vererbung beschäftigt, die nicht in der DNA codiert sind. Ein weiterer epigenetischer Faktor, der für uns im Verlauf eine Rolle spielen wird, sind sogenannte *Methylierungen.* Dies sind chemische Veränderungen der Buchstaben in der DNA-Sequenz, die durch Enzyme im Zellkern angebracht und entfernt werden können. Im Kontext der Genexpression verhindern diese Methylierungen das Auslesen der Abschnitte, an denen sie angebracht sind. Im letzten Teil werden wir sehen, dass mithilfe dieser Methylierungen auch die Wahrscheinlichkeit dafür verändert werden kann, dass Mutationen in bestimmten Abschnitten der DNA auftreten.

Unter *Mutationen* versteht man die Veränderung der genetischen Ausstattung eines Individuums. Mutationen treten aus verschiedenen Gründen auf, sie können zum Beispiel durch UV-Strahlen oder mutagene Stoffe, die an die DNA herankommen, ausgelöst werden. Weitere Gründe liegen im Verkleben des DNA-Strangs oder in der Imperfektion des Kopiervorgangs. Im Gegensatz zu den genannten Gründen, gibt es aber auch Effekte, die bereits in den Vererbungsprozess selbst eingebaut sind. So entsteht etwa bei Arten, die sich sexuell fortpflanzen, neues genetisches Material, indem sich die Gene der Eltern „mischen“. Bakterien, die sich bekanntlich nicht sexuell fortpflanzen, können genetisches Material direkt miteinander austauschen. Beide Mechanismen erlauben es, dass die genetische Varianz in einer Population hoch bleibt.

Mutationen ereignen sich unabhängig davon, ob sie sich positiv oder negativ auf die Fitness der Individuen auswirken. Das heißt, wenn eine Mutation auftritt, ist sie in unserem Sinne zufällig.

Die Gendrift und die neutralistische Position

Im Folgenden gehen wir auf die Frage ein, inwiefern Zufall bei der Variation im Fortpflanzungserfolg eine Rolle spielt. Darwins Theorie der natürlichen Selektion minimiert in gewisser Weise die Rolle des Zufalls an dieser Stelle. Nach seiner Theorie sollte sich nämlich in einer Population diejenige Variante durchsetzen, die am besten an ihre Umgebung angepasst ist. Auch Darwin hatte aber schon erkannt, dass die Fortpflanzung gut angepasster Varianten nur wahrscheinlicher, aber keineswegs garantiert ist. So können durch Pech theoretisch fitte Individuen versterben, ohne Nachkommen gezeugt zu haben. Aber auch solche zufälligen (also nicht auf Selektionsvor- oder Nachteilen basierenden) Effekte verändern die statistische Verteilung von Varianten innerhalb einer Population, und insbesondere bei kleinen Populationen kann das Versterben weniger Individuen dazu führen, dass Varianten komplett verschwinden. Wir bezeichnen diese zufällige

Veränderung der genetischen Ausstattung einer Population als *Gendrift*.

Die Hypothese, dass Gendrift stattfindet, war bereits in den 1930er Jahren aufgestellt worden. Besonders hervorzuheben ist hier der Genetiker Sewall Wright (1889–1988), nach dem die Gendrift auch Sewall-Wright-Effekt genannt wird. Die Frage über den Einfluss der Gendrift in der Evolution wurde zu jener Zeit kontrovers diskutiert. Wright und der Statistiker Fisher (1890–1962), die sich beide für eine Mathematisierung der Evolutionstheorie einsetzten, konnten sich in wesentlichen Punkten auf ein Modell einigen. Da sie aber zu sehr unterschiedlichen Einschätzungen kamen, wie groß natürlich vorkommende Populationen seien, verwarf Fisher im Gegensatz zu Wright die Hypothese, dass die Gendrift eine entscheidende Rolle in der Evolution spielte.

Bevor wir auf die molekulare Ebene eingehen, wollen wir zwei Effekte beschreiben, bei denen die Gendrift durchaus Einfluss auf den Phänotyp haben kann: Es kann passieren, dass sich Populationen ganz plötzlich und unerwartet verkleinern, beispielsweise durch Naturkatastrophen. Da die Überlebenswahrscheinlichkeit bei einer solchen Katastrophe nicht zwangsweise mit der individuellen Fitness korreliert ist, kann es auf diese Weise zu Gendrift kommen. Das Auftreten einer Gendrift durch die plötzliche Verkleinerung einer Population wird als *Flaschenhalseffekt* bezeichnet. Ähnlich verhält es sich beim *Gründereffekt*: Entsteht eine neue Population aus wenigen Individuen, so ist die genetische Ausstattung der Population abhängig von der Ausstattung der Gründerpopulation.

Die Diskussionen über die Gendrift wurden bereits auf theoretischer Basis geführt, bevor die Vererbungsmechanismen bekannt waren. Nachdem in den 1940er Jahren die DNA als Träger der Erbinformationen erkannt wurde, erlebte die Hypothese der Gendrift eine Renaissance in der molekularen Genetik unter dem Stichwort *neutrale Evolution*. Die *Neutralisten* in der Evolutionsbiologie vertreten den Standpunkt, dass die meisten Mutationen keine (oder negative) Auswirkung auf die Fitness der Individuen haben. Da Mutationen mit negativen Auswirkungen durch die natürliche Selektion entfernt werden, haben also die meisten Mutationen, die bestehen bleiben, keine Auswirkungen. Der Populationsgenetiker Kimura [5] (1924–1994) vertrat diese Hypothese bereits in den 1960er Jahren. 1983 veröffentlichte er sein Hauptwerk *The Neutral Theory of Molecular Evolution*, in dem er eine kohärente neutralistische Theorie aufstellte. Die neutralistische Theorie schließt nicht aus, dass Unterschiede im Phänotyp den Individuen Selektionsvor- oder Nachteile verschaffen, auf denen dann die natürliche Selektion wirkt, sie machte lediglich eine Aussage über das molekulare Bild. Seit die effiziente DNA-Sequenzierung möglich ist, konnte diese Theorie mehr und mehr untermauert werden und ist heute vollständig etabliert.

Ein Hinweis darauf, dass viele Mutationen keine Auswirkungen auf die Fitness haben, findet sich im genetischen Code, welcher in Abbildung 1 schematisch dargestellt ist. Der Code beschreibt, wie die Aminosäuren, mit denen die Proteine synthetisiert werden, in einem RNA-Strang codiert sind.

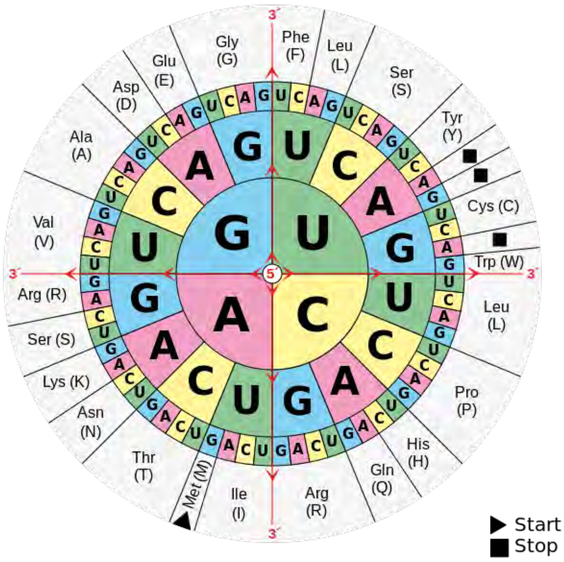


Abbildung 1: Code-Sonne, Quelle: https://tinyurl.com/mv6ha82y

Es codieren je drei Buchstaben eine Aminosäure Da es nur 24 codierte Aminosäuren, aber 64 verschiedene Basentripletts gibt, haben einige Aminosäuren notwendigerweise mehr als eine Codierung. Wir sehen an der Code-Sonne, dass häufig nur die ersten beiden Buchstaben relevant sind und der dritte keine Rolle mehr spielt, wenn entschieden wird, welche Aminosäure codiert wird. Mutationen an diesen Stellen nennen wir *stille Mutationen.* Stille Mutationen gehören zu den Mutationen, die dem Organismus weder selektive Vor- noch Nachteile verschaffen, solche Mutationen nennen wir *selektiv neutral.* Ob sich eine der Varianten in einer Population durchsetzt (und falls ja, welche) ist also rein zufällig.

Mutationen und Zufall

Im Folgenden wollen wir uns der Frage widmen, wie zufällig die Stelle im Genom ist, an der eine Mutation auftritt. Dazu wurde 2022 eine Forschungsarbeit von Monroe, Srikant, Carbonell-Bejerano et al. [7] veröffentlicht, welche hier als Grundlage dient. Eine denkbare Konsequenz zufällig auftretender Mutationen ist es, dass diese gleichverteilt im Genom auftreten sollten, allerdings zeigen Untersuchungen der DNA, dass dies nicht der Fall ist. Genauer zeigen diese, dass Mutationen seltener in Genen auftreten, am seltensten in essenziellen Genen. Für sich genommen steht dies nicht im Widerspruch zur Annahme des gleichverteilten Auftretens von Mutationen. So könnte es sein, dass Mutationen zwar gleichverteilt auftreten, aber mehrheitlich unvorteilhaft sind und durch natürliche Selektion aussortiert werden. Mit sogenannten *Mutationsakkumulationslinien* lässt sich diese Frage experimentell klären. Ziel solcher Experimente ist es, den Einfluss der natürlichen Selektion auf die Evolution zu verringern. Dazu hält man im Labor eine Population, bei welcher man aus jeder Generation zufällig auswählt, welche Individuen sich fortpflanzen dürfen und welche nicht. Anschließend isoliert man diese Individuen. Klar ist, dass dadurch der Einfluss der natürlichen Selektion minimiert wird, ausschließen kann man diese aber nicht, da Mutationen, die lebens- oder fortpflanzungsunfähige Individuen produzieren, nicht weitergegeben werden können.

Die Arbeitsgruppe um Monroe führte eine solche Studie an der Ackerschmalwand, einem biologischen Pflanzenmodell, durch. Obwohl der Einfluss der natürlichen Selektion bei den Mutationsakkumulationslinien minimiert ist, lässt sich dieselbe Verteilung beobachten, wie zuvor: Mutationen treten in Genen nur halb so oft auf, wie man unter der Annahme der Gleichverteilung erwarten würde. In essenziellen Genen war das Auftreten sogar um zwei Drittel verringert. Dies zeigt, dass nicht die natürliche Selektion für dieses Muster verantwortlich ist. Die Autoren konnten sogar zeigen, dass die Verteilung dieser Mutationen mit dem Methylierungsmuster der Pflanze korreliert ist. Diese Korrelation ist so stark, dass sich sogar bei Pflanzen in der Natur auf Basis beobachteter Mutationen vorhersagen lässt, welches Methylierungsmuster diese Pflanze aufweist. Letzteres ist das eigentlich Neue in Monroe, Srikant, Carbonell-Bejerano et al. [7].

Bei Pflanzen lässt sich eine Weitergabe der Methylierungen über Generationen hinweg beobachten, auch wenn diese nicht so treu ist, wie jene der DNA. Dies gibt Anlass zur Vermutung, dass sich das konkrete Muster aufgrund natürlicher Selektion gebildet hat, um die Individuen vor allzu schlimmen Mutationen zu schützen. Insbesondere zeigt die Arbeit von Monroe, dass die Stellen, an denen Mutationen auftreten, *nicht* vollständig zufällig sind, denn durch das Methylierungsmuster kann die Wahrscheinlichkeit von Mutationen mit negativen Effekten verringert werden. Wenn eine Mutation allerdings auftritt, ist es (in unserem Sinne) zufällig, wie sich das Erbgut verändert.

Inwiefern sich die Ergebnisse dieser Studie auf Säugetiere oder gar Menschen übertragen lassen, ist fragwürdig, da es zwischen Pflanzen und Säugetieren Unterschiede in Funktion der Methylierungen sowie der Art der Vererbung der Methylierungen gibt.

Literatur

[1] T. Dagan. Persönliches Gespräch. 2023.

[2] C. Darwin: *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life.* John Murray (1859).

[3] G. Gigerenzer, Z. Swijtink, T. Porter et al. *The Empire of Chance: How Probability Changed Science and Everyday Life.* Cambridge University Press (1990).

[4] D. Graur, A. K. Sater & T. F. Cooper: *Molecular and Genome Evolution.* Springer (2016).

[5] M. Kimura: *The Neutral Theory of Molecular Evolution.* Cambridge University Press (1983).

[6] J.-B. Lamarck: *Philosophie zoologique ou exposition des considérations relatives à l'histoire naturelle des animaux.* Musée d'Histoire Naturelle (1809).

[7] J. G. Monroe, T. Srikant, P. Carbonell-Bejerano et al. *Mutation Bias Reflects Natural Selection in Arabidopsis Thaliana.* Nature **602** (7895) (2022) 101–105.

[8] H. Schulenburg. Persönliches Gespräch. 2023.

[9] J. Zrzavý, D. Storch, S. Mihulka & S. Begall: *Evolution: ein Lese-Lehrbuch.* Springer-Verlag (2009).

Jack the Dripper unter der Lupe der Mathematik

J. Sophia Schmidt

„Wer nur als Mathematiker an das Kunstwerk herantritt, geht arm wieder davon. Aber wer zur unerlässlichen künstlerischen Einfühlung ein mathematisch geschultes Auge mitbringt, der erkennt Reize, die anderen verborgen bleiben."

(Walther Lietzmann,1931)

Mathematik ist seit jeher an vielen Stellen der Kunst zu finden. Entweder wird sie als Werkzeug, Inspiration, oder zur Analyse verwendet. In diesem Beitrag werden wir die Mathematik benutzen, um die Authentizität der Bilder von Jackson Pollock zu untersuchen. Seine Werke sind das Resultat von kontrollierbaren und unkontrollierbaren Faktoren.

Abbildung 1: Gemälde von Jackson POLLOCK [7].

Wenn man das Kunstwerk in Abbildung 1 sieht und den Künstler nicht kennt, könnte man schon ins Staunen geraten, dass es einen Wert von ungefähr 75 Millionen Dollar hat. Fällt aber der Name Jackson Pollock, ist es nicht unbedingt überraschend. Doch wer ist überhaupt dieser Jackson Pollock gewesen, um den es hier gehen soll?

Jackson Pollock

Paul Jackson Pollock erblickte am 28. Januar 1912 in Cody, Wyoming, die Welt. Er war unter seinen fünf Geschwistern der jüngste. Sein Vater arbeitete als Hilfsgeometer und seine Familie zog über die Jahre immer wieder durch den Südwesten des Landes. Jackson Pollock entwickelte schon früh eine Liebe zur Natur. Im Alter von 11 Jahren kam er mit der Kunst und der Kultur der First Nations in Kontakt. Er besuchte eine Highschool, an der Kunsthandwerk gelehrt wurde. In den Briefwechseln mit seinem älteren Bruder Charles erzählte er von seiner Zuneigung zur Theosophie und zur Kunst. Charles ermutigte ihn, Künstler zu werden. Nicht viel später zog Jackson Pollock zu ihm nach New York und begann Kunst zu studieren, nachdem er sich das Geld für das Studium erarbeitet hatte. Das Grundstudium langweilte ihn jedoch. Im Jahre 1936 nahm er an einer experimentellen Werkstatt von David Alfaro Siqueiros teil und lernte dort unkonventionelle Maltechniken. Den Großteil der 1930er Jahre lebte Jackson Pollock in Armut. Teilweise arbeitete er auch als Hausmeister, um Geld zu verdienen. Seit seiner Jugend stellte sein Alkoholkonsum ein Problem dar, und er begab sich ab 1939 in Therapie. Nichtsdestotrotz erlag er am 11. August 1956 seiner Sucht und starb durch einen selbstverschuldeten Autounfall. Davor schaffte er es jedoch noch, einen der abstraktesten und radikalsten Kunststile zu entwickeln. Indem er mit dynamischen und kraftvollen Bewegungen Farbe auf die Leinwand tropfen ließ, löste er die Linie von der Farbgebung und beschrieb den Bildraum auf eine fundamental andere Art und Weise. Der reine Zufall ist dennoch nicht der Urheber seiner Werke, letztlich hatte er ein Bild vor Augen. Seine »Drippings« sind also eher Resultate von kontrollierten Bewegungen und auch unkontrollierbaren Faktoren, in denen wir den »Zufall« finden können.

> Art is full of things that everyone knows about, of generally acknowledged truths. Although everyone is free to use them, the generally accepted principles have to wait a long time before they find an application. Such a piece of luck was Scriabin. Just as Dostoievsky is not only a novelist and just as Blok is not only a poet, so Scriabin is not only a composer, but an occasion for perpetual congratulations, a personified festival and triumph of Russian culture.
>
> *(Boris Pasternak, I Remember, Essai d´Autobiographie)*

Für die amerikanische Kultur ist Jackson Pollock solch ein Ereignis. Er schaffte es trotz seiner Alkoholsucht und ohne sich auf Vorbilder zu stützen, ein eigenständiges Werk zu erdenken. Er hat viel für die zeitgenössische amerikanische Kunst getan. Diese hatte es bis dato nämlich nicht geschafft, sich von dem künstlerisch progressiven Europa abzuheben. Nun konnten die abstrakten Expressionisten der nordamerikanischen Moderne endlich ihre Flügel ausbreiten. Und wie ist unser Künstler zu seinem Spitznamen gekommen? Im Gegensatz zu den meisten Künstlern seiner Zeit brachte Jackson Pollock die Farbe gewaltvoller auf die Leinwand. Der Kontrast zu diesen Künstlern ist schon recht groß, wenn man bedenkt, wie diese in ihrem Kittel sorgfältig mit den Pinseln die Leinwand liebkosten. In ihren Augen war der Malstil von Pollock einfach unheimlich. Jedenfalls taufte das *Time Magazine* den Künstler 1956 »Jack the Dripper« nach dem Pseudonym des bekannten Serienmörders. Denn ähnlich wie Jack the Ripper mit seinen Opfern umging, so ging Jackson Pollock mit der traditionellen Herangehensweise um, ein Kunstwerk auf eine Leinwand zu bringen.

Der kommerzielle Wert seiner Werke ist über die Jahre enorm gestiegen. Daher spielt die Authentizität seiner Werke eine besondere Rolle. Subjektive Beurteilungen sind ohne objektive wissenschaftliche Beurteilungen von geringem Wert in einem Rechtsstreit. Außerdem ist es im Falle von Jackson Pollock schwer, unbekannte Werke von den Seinigen mit bloßem Auge zu unterscheiden. Denn es gab bereits zu seinen Lebzeiten eifrige Nachahmer, die mit Hilfe der gleichen Technik, ähnlicher Farbe und ähnlicher Leinwand ähnliche Werke kreierten. Vor seinem Erfolg in der Kunstwelt ist er zudem oft aufgrund von Armut gezwungen worden, seine Werke zu verkaufen. Diese Transaktionen hat er jedoch nicht notiert. Dementsprechend kann es also sein, dass Kunstwerke von Pollock existieren, die nicht verzeichnet wurden.

Um zu demonstrieren, wie schwer es ist, die Werke von Pollock von anderen zu unterscheiden, wird der Leser nun angehalten, die Bilder in Abbildung 2 einzuteilen: Werk von Pollock oder kein Werk von Pollock.

Hier nun die Antwort auf unsere Frage.

Die Abbildungen 2a, 2b und 2d sind Werke von Pollock, wohingegen Abbildungen 2c und 2e von anderen kreiert wurden.

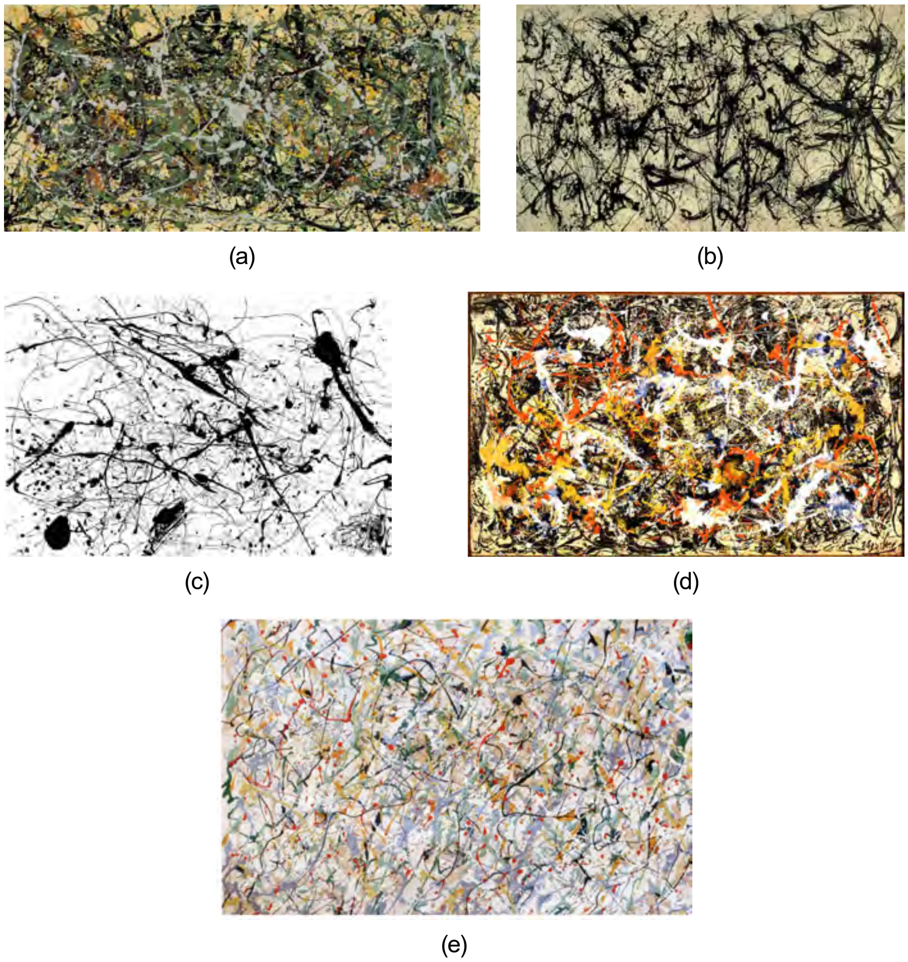
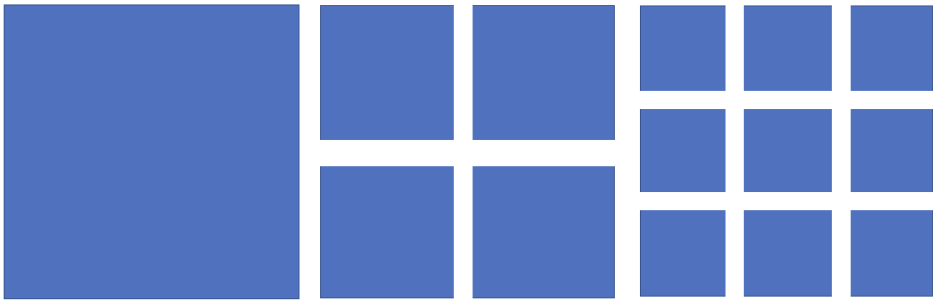


Abbildung 2: Vermeintliche Kunstwerke von Jackson Pollock [5], [6], [11], [8].

Es ist deshalb vonnöten, wissenschaftliche und künstlerische Untersuchungen zusammenzuführen. Eine Methode, die Werke voneinander zu unterscheiden, ist die Fraktale Analysis. Der Artikel „Authenticating Pollock paintings using fractal geometry" ist darauf aufgebaut, dass manche gedrippten Werke von Pollock eine fraktale Dimension besitzen, eine sensationelle Beobachtung. Wie hat es Jackson Pollock geschafft, komplizierte fraktale Muster so exakt zu malen? Fraktale Muster hat man in der Natur tatsächlich erst nach seiner Zeit entdeckt, und dann erst ist die Fraktalkunst entstanden. Wir gehen nun der Frage nach: Ist diese Fähigkeit einzigartig? Dazu zunächst einige Grundlagen.

Zum Dimensionsbegriff

Dazu ein paar Bilder:



(a) (b) (c)

Abbildung 3: Zerlegung eines Quadrates in vier bzw. neun kleinere Quadrate.

Betrachten wir zuerst die Abbildungen 3. Abbildung 3a ist ein blaues Quadrat. Wenn wir die Seitenlänge halbieren, erhalten wir vier kleine Quadrate. Dritteln wir hingegen die Seitenlänge des Ausgangsquadrates, so bekommen wir neun kleinere Quadrate. Wir können demnach folgende Relation festhalten. Die Anzahl der benötigten Quadrate N wächst in Relation zur Seitenlänge L des Quadrates mit $N \sim \frac{1}{L^2}$. Wie schaut es bei einem Würfel aus? Halbieren wir hier die Seitenlänge, so erhalten wir acht kleinere Würfel. Dritteln wir hingegen die Seitenlänge, bekommen wir 27 Würfel. Die Anzahl der benötigten Quader N verhält sich in Relation zur Seitenlänge L des Quadrates mit $N \sim \frac{1}{L^3}$.

Für Objekte, die keine Quader sind, benötigen wir den Begriff der Überdeckung.

Definition Eine Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen einer Menge A heißt Überdeckung einer Teilmenge $B \subset A$, wenn

$$B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

gilt.

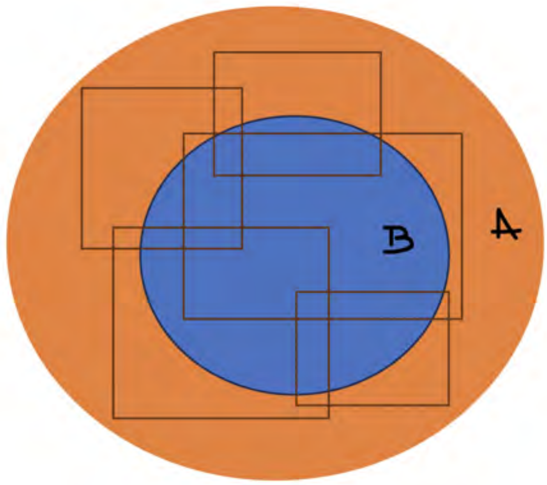


Abbildung 4: Die rotumrandeten Rechtecke stellen eine Überdeckung der Menge B dar.

Beispiel

Die Abbildung 4 zeigt eine Überdeckung der Teilmenge B in der Menge A. Damit können wir einen Dimensionsbegriff definieren.

Definition Zu einer Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ sei $N(L)$ die kleinste Anzahl an Quadern mit Seitenlänge L, mit denen man M überdecken kann. Definiere dann die Hausdorffdimension D durch

$$N(L) \sim \frac{1}{L^D},$$

was

$$D = -\lim_{L \to 0} \frac{\log N(L)}{\log L}$$

entspricht.

Fraktalanalyse

Wenn wir nun die Dimension von Bildern bestimmen wollen, können wir nicht den obigen Limes anwenden. Irgendwann sind unsere Skalierungsmöglichkeiten in der Realität erschöpft. Daher verwendet man die »Boxcounting-Dimension«. Hier stoppen wir ab einer sinnvollen Skalierung.

In unserem Beispiel wollen wir die Boxcounting-Dimension von der britischen Küste ermitteln (Abb. 5). Dazu überdecken wir die Küstenlinie mit gleich großen

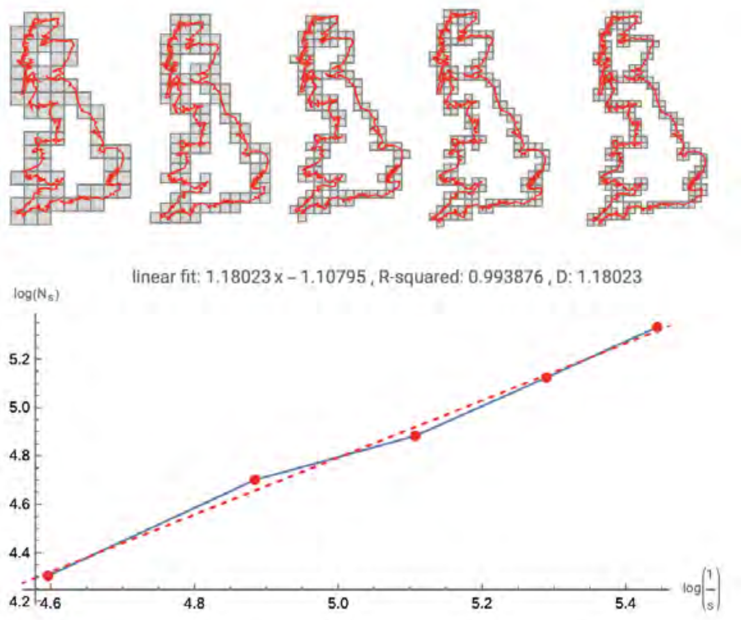


Abbildung 5: Boxcounting-Dimension dargestellt an der Küstenlinie Britanniens (siehe MAHIEU [2]).

Kästen und zählen deren Anzahl. Anschließend wiederholen wir das mit einer kleineren Überdeckung. Die Dimension ist die interpolierte Gerade der Punkte des Graphen.

In einem zweiten Beispiel ist unser Objekt ein selbstähnliches Fraktal (Abb 6). Dieses überdecken wir zunächst mit 27 Kästchen und ermitteln die Anzahl derer, welche nicht leeren Durchschnitt mit dem Objekt haben. Nun überdecken wir unser Fraktal mit kleineren Kästchen und so weiter. Die Dimension beträgt hier $D = \log 4/ \log 3$.

Dieses Verfahren werden wir jetzt auf die schwarze Farbschicht der Abbildungen 1, 2c und 2e anwenden. Das Werk von Abbildung 1 stammt von Pollock selbst, das in Abbildung 2c von einem Kunststudenten, der Pollocks Technik so gut wie möglich nachgeahmt hat. Das in Abbildung 2e ist von einem unbekannten Künstler.

Die Resultate, dargestellt in Abbildung 7, sprechen für sich. Lediglich dem Bild von Pollock kann eine Dimension zugeordnet werden. Man hat dieses Verfahren an 50 Werken von Pollock, 14 bei Werken von unbekannter Herkunft und 37 bei Werken von Kunststudenten angewandt. Die Ergebnisse fielen signifikant gleich aus.

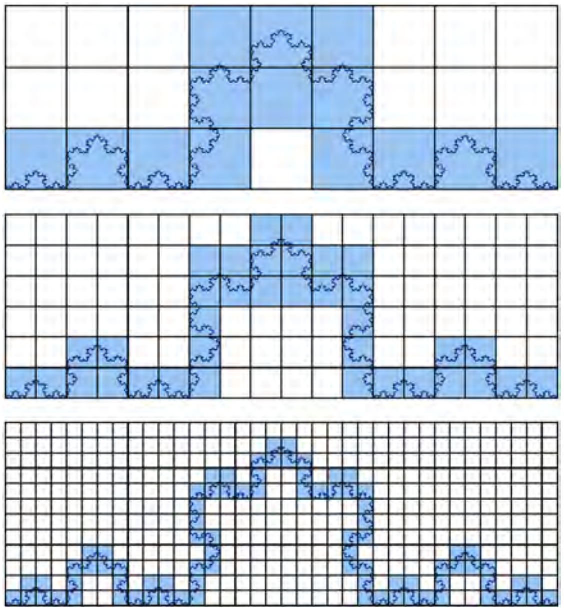


Abbildung 6: Boxcounting-Dimension dargestellt an einem selbstähnlichem Fraktal (siehe PILGRIM & TAYLOR [4]).

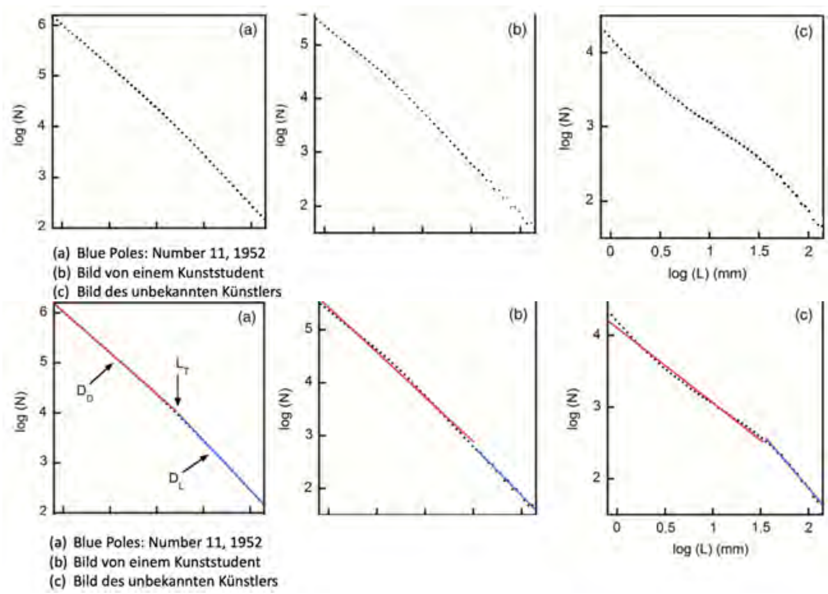


Abbildung 7: Fraktalanalyse eines Gemäldes von Pollock (a), eines Kunststudenten (b) und eines unbekannten Künstlers (c), die jeweils Pollocks »Drip«-Technik nachstellen wollten (siehe TAYLOR, GUZMAN, MARTIN et al. [11]).

Fazit

Dieses Forschungsprojekt erzielte eine 100-prozentige Erfolgsquote bei der Identifikation von Jackson Pollocks Werken bezüglich des fraktalen Verhaltens. Im Gegensatz dazu steht die 100-prozentige Misserfolgsquote bei den Werken anderer Künstler bekannter Herkunft. Hier wird das Potenzial von Computern deutlich. Wie erwartet, betrug die Fehlerquote bei den Gemälden unbekannter Herkunft, die von Privatsammlern stammen, 100 Prozent. Es wird davon ausgegangen, dass gedrippte Werke, die nicht von Pollock stammen, den unentdeckten von Jackson Pollock zahlenmäßig weit überlegen sind. Zu dem Zeitpunkt der Publikation wurden innerhalb von 17 Jahren nur sechs neue Werke authentifiziert.

Die Analyse mittels Fraktaler Dimension ist nicht nur auf die Authentifikation von Jackson Pollock beschränkt. Beispielsweise kann sie auch bei abstrakten Gemälden angewendet werden, die nicht fraktale Muster beinhalten. Es wird dann nach charakteristischen Merkmalen der Abweichung der Muster zur fraktalen Skalenvarianz gesucht. Des Weiteren ist die Anwendung nicht auf das Bild selbst beschränkt, sondern kann sogar zur Untersuchung der Struktur der Farbschicht verwendet werden. Spannungsbrüche bilden nämlich ein Fraktal, und daher kann man auch von alternden Gemälden die Risse in der Farbschicht untersuchen. Ganz allgemein können wir zukünftig ein engeres Zusammenspiel zwischen Kunst und Wissenschaft im Bereich der Authentizitätsarbeit erwarten.

Literatur

[1] L. BALG: *Jackson Pollock – Biografie, Fakten und bekannte Gemälde.* URL: `https://bit.ly/46tM9aJ` (aufgerufen am 14. 05. 2023).

[2] E. MAHIEU: *Box-Counting the Dimensions of Coastlines.* Wolfram Demonstration Project
URL: `http://bit.ly/3Qm7TAD` (aufgerufen am 30. 07. 2023).

[3] F. O'HARA: *Jackson Pollock.* Pickle Partners Publishing (2015).

[4] I. PILGRIM & R. TAYLOR: *Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges.* (2018).

[5] J. POLLOCK: *Number 8.* (1949).

[6] J. POLLOCK: *Number 32.* (1950).

[7] J. POLLOCK: *Blue Poles.* 212cm x 488cm (1952).

[8] J. POLLOCK: *Convergence.* (1952).

[9] L. Sahne: *Ein Blick auf: Jackson Pollock.*
URL: `https://bit.ly/3PwPq2i` (aufgerufen am 30. 09. 2023).

[10] S. Spies: *Ästhetische Erfahrung Mathematik: über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler* (2013).

[11] R. P. Taylor, R. Guzman, T. P. Martin et al. *Authenticating Pollock paintings using fractal geometry.* Pattern Recognition Letters **28**(6) (2007) 695–702.