Der Gödelsche Beweis

dargestellt von Ernest Nagel und James R. Newman

[…]

II
Das Problem der Widerspruchsfreiheit

Das neunzehnte Jahrhundert war Zeuge einer ungeheuren Ausweitung und Vertiefung der mathematischen Forschung. Viele grundlegende Probleme, die lange den größten Anstrengungen früherer Denker getrotzt hatten, wurden gelöst; neue Teilgebiete mathematischer Forschung entstanden; und verschiedenen Zweigen dieser Disziplin gab man neue Grundlagen oder gestaltete die alten mit Hilfe präziserer Methoden völlig um. Zum Beispiel: Die Griechen hatten drei elementar-geometrische Probleme aufgestellt: die Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal, die Konstruktion eines Würfels, der das doppelte Volumen eines gegebenen hat, und die Konstruktion eines Quadrates mit der gleichen Fläche wie ein gegebener Kreis. Mehr als zweitausend Jahre hatte man vergeblich versucht, diese Probleme zu lösen, bis schließlich im neunzehnten Jahrhundert die logische Unmöglichkeit der verlangten Konstruktionen bewiesen wurde. Die Bemühungen lieferten darüber hinaus ein wertvolles Nebenergebnis. Da die Lösungen wesentlich von der Bestimmung der Art der Wurzeln, die bestimmte Gleichungen befriedigen, abhängen, regte die Beschäftigung mit den in der Antike aufgeworfenen Fragen grundlegende Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahl und des Zahlenkontinuums an. Nach und nach wurden strenge Definitionen für negative, komplexe und irrationale Zahlen geliefert, eine logische Grundlage für das System der reellen Zahlen konstruiert und ein neuer Zweig der Mathematik, die Theorie der infiniten Zahlen, geschaffen.

Parallelen Postulat

Die vielleicht wichtigste Entwicklung innerhalb der vielfältigen Auswirkungen auf die nachfolgende Geschichte der Mathematik war jedoch die Lösung einer anderen von den Griechen aufgeworfenen, aber nicht beantworteten Frage. In einem der von Euklid bei der systematischen Darstellung der Geometrie benützten Axiome ist von Parallelen die Rede. Das Axiom, welches er verwendete, ist logisch der Annahme äquivalent (obwohl nicht mit ihr identisch), daß durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden kann. Dieses Axiom erschien in der Antike aus verschiedenen Gründen keineswegs »einleuchtend«. Deshalb versuchte man, es aus den übrigen euklidischen Axiomen, die als völlig einleuchtend[1] galten, abzuleiten. Ist es möglich, einen solchen Beweis für das Parallelenaxiom zu geben? Generationen von Mathematikern mühten sich vergeblich um die Antwort. Aber daß die Konstruktion eines Beweises wiederholt fehlschlug, bedeutet ebensowenig, es sei überhaupt keiner zu finden, wie die wiederholten Fehlschläge auf der Suche nach einem Mittel gegen Erkältungen zweifelsfrei beweisen, daß die Menschheit für alle Zeit an rinnenden Nasen leiden wird. Erst im neunzehnten Jahrhundert wurde, hauptsächlich durch die Arbeiten von Gauß, Bolyai, Lobatschewsky und Riemann, die *Unmöglichkeit* einer Ableitung des Parallelenaxioms aus den anderen Axiomen gezeigt. Das Ergebnis war von größter theoretischer Wichtigkeit. Erstens wies es höchst nachdrücklich auf die Tatsache hin, daß es möglich ist, einen *Beweis* für die *Unmöglichkeit eines Beweises* bestimmter Aussagen innerhalb eines gegebenen Systems zu liefern. Wie wir sehen werden, ist die Gödelsche Arbeit ein Nachweis der Unmöglichkeit, gewisse wichtige arithmetische Aussagen zu beweisen. Zweitens führte die Lösung der Frage des Parallelenaxioms zwangsläufig zur Vorstellung, daß mit Euklid nicht das letzte Wort über die Geometrie gesprochen sei, weil neue geometrische Systeme konstruiert werden können, wenn man eine Anzahl von Axiomen benützt, die von den euklidischen verschieden und mit ihnen unverträglich sind. Es ist wohlbekannt, daß man insbesondere äußerst interessante und fruchtbare Ergebnisse erhält, wenn man das euklidische Parallelenaxiom durch die Annahme er-

[1] Der Hauptgrund dieses angeführten Mangels an Selbstverständlichkeit scheint die Tatsache gewesen zu sein, daß das Parallelenaxiom eine Behauptung über *unendlich entfernte* Raumbereiche macht. Euklid definiert Parallele als Gerade in einer Ebene, die einander, »wenn man sie nach beiden Richtungen unbegrenzt verlängert«, nicht treffen. Entsprechend bedeutet der Satz, zwei Gerade seien parallel, das Postulat, daß sich die zwei Linien auch nicht »im Unendlichen« treffen. Andrerseits war man in der Antike mit Kurven vertraut, die sich zwar in keinem endlichen Gebiet der Ebene schneiden, wohl aber »im Unendlichen« aufeinander treffen. Man nennt solche Linien »asymptotisch«. So ist etwa eine Hyperbel gegen ihre Tangenten asymptotisch. Deswegen war es für die antiken Geometer nicht intuitiv einleuchtend, daß durch einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden nur eine Gerade gezogen werden kann, die die gegebene Gerade nicht einmal im Unendlichen trifft.

aus: Meixner, Uwe (2003): Philosophie der Logik, Freiburg, München 2003.

setzt, daß zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt mehr als eine Parallele gezogen werden kann, oder, wenn man andrerseits annimmt, es könnten keine Parallelen gezogen werden. Solcherart wurde der traditionelle Glaube, daß die Axiome der Geometrie (oder, aus diesem Grunde, die Axiome jeder Disziplin) durch unmittelbare Evidenz nachweisbar seien, radikal untergraben. Darüber hinaus wurde allmählich klar, daß die Tätigkeit des Mathematikers nur darin besteht, *aus festgesetzten Annahmen Theoreme abzuleiten*, und daß es nicht seine Sache als Mathematiker ist, zu entscheiden, ob die festgesetzten Axiome tatsächlich wahr sind. Schließlich regten diese erfolgreichen Abänderungen der orthodoxen Geometrie die Überprüfung und Vervollständigung der axiomatischen Grundlagen vieler anderer mathematischer Systeme an. Mit der Zeit wurden Axiome für Forschungsgebiete aufgestellt, die bis dahin nur mehr oder weniger intuitiv betrieben worden waren.

Aus diesen kritischen Studien über die Grundlagen der Mathematik ergab sich die allgemeine Folgerung, daß der überlieferte Begriff der Mathematik als der »Wissenschaft von der Quantität« inadäquat und irreführend ist. Denn es wurde deutlich, daß die Mathematik schlechthin jene Disziplin ist, die die Folgerungen zieht, die von einem vorliegenden Axiomen- oder Postulatensystem logisch impliziert werden. Tatsächlich erkannte man, daß die Gültigkeit einer mathematischen Ableitung von einer speziellen Bedeutung der in den Postulaten benützten Zeichen oder Ausdrücke in keiner Weise abhängt. Man mußte feststellen, daß die Mathematik weit abstrakter und formaler ist, als traditionell angenommen worden war: abstrakter, weil man mathematische Sätze im Prinzip so auffassen kann, daß sie eher von irgend etwas Beliebigem handeln als von einem genau umschriebenen System von Objekten oder Eigenschaften von Objekten; und formaler, weil die Gültigkeit mathematischer Ableitungen eher auf der Form der Sätze beruht als auf den Eigenschaften eines bestimmten Gegenstandes. Die Postulate irgendeines Zweiges der beweisenden Mathematik enthalten ihrem Wesen nach nichts über Raum, Quantität, Äpfel, Winkel oder Budgets. Und eine spezielle Bedeutung, die mit den Ausdrükken (oder »deskriptiven Prädikaten«) in den Postulaten verknüpft werden kann, spielt bei der Ableitung von Theoremen keine wesentliche Rolle. Wir wiederholen, daß sich der reine Mathematiker (zum Unterschied vom Wissenschaftler, der die Mathematik zur

Erforschung eines speziellen Gegenstandes verwendet) nicht mit der Frage befaßt, ob die festgesetzten Postulate oder die abgeleiteten Folgerungen wahr sind, sondern einzig damit, ob die behaupteten Folgesätze tatsächlich aus den ursprünglichen Festsetzungen *logisch notwendig folgen*.

Nehmen wir ein Beispiel. In der berühmten Axiomatisierung der Geometrie des bedeutenden deutschen Mathematikers David Hilbert (erstmals publiziert 1899) gehören »Punkt«, »Gerade«, »liegt auf« und »zwischen« zu den nichtdefinierten (oder »primitiven«) Ausdrücken. Wir geben zu, daß die üblichen Bedeutungen dieser Ausdrücke bei der Entdeckung und beim Erlernen von Theoremen eine Rolle spielen. Da die Bedeutungen vertraut sind, verstehen wir ihre verschiedenen Beziehungen, und sie begründen die Auswahl und Formulierung der Axiome; weiters erleichtern und fördern sie die Formulierung von Aussagen, die wir als Theoreme zu beweisen hoffen. Trotzdem muß man, wie Hilbert ausdrücklich betont, die vertrauten Bedeutungen der nichtdefinierten Zeichen ignorieren, sobald man sich mit der primären mathematischen Aufgabe befaßt, die rein logischen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Sätzen zu untersuchen. Die einzigen »Bedeutungen«, die mit diesen Zeichen verbunden werden dürfen, sind jene, die ihnen durch die Axiome, in denen sie vorkommen, zugeschrieben werden[2]. Darauf bezieht sich Russells berühmtes Epigramm: Die reine Mathematik ist jene Disziplin, bei der man weder weiß, worüber man spricht, noch ob das, was man sagt, wahr ist.

In diesem Reich der strengen Abstraktion, ohne alle vertrauten Wahrzeichen, findet man sich sicherlich nicht leicht zurecht. Aber es entschädigt uns durch eine neue Bewegungsfreiheit und bisher unbekannte Ausblicke. Die verschärfte Formalisierung der Mathematik hat den menschlichen Geist von jenen Einschränkungen befreit, die für die Aufstellung neuer Axiomensysteme durch die übliche Interpretation der Ausdrücke entstanden waren. Neue Formen von Algebra und Geometrie, die wesentlich von der traditionellen Mathematik abwichen, wurden entwickelt. Indem die Bedeutungen gewisser Ausdrücke ziemlich unbestimmt wurden, wurde ihre Verwendung weitreichender und die aus ihnen ableitbaren Folgerun-

[2] Mit einem Fachausdruck sagt man, die primitiven Zeichen seien durch die Axiome »implizit« definiert; alles, was von den impliziten Definitionen nicht erfaßt wird, ist für die Ableitung von Theoremen irrelevant.

gen weniger beschränkt. Die Formalisierung führte zu einer Vielzahl von Systemen von beträchtlichem mathematischem Interesse und Wert. Man muß zugeben, daß einige dieser Systeme keine so unmittelbar intuitiv (d.h. für den gesunden Menschenverstand) verständlichen Deutungen zuließen wie jene der euklidischen Geometrie oder der Arithmetik, doch rief dieser Umstand keine Beunruhigung hervor. Einerseits ist die Intuition ein dehnbarer Begriff: Vermutlich werden unsere Kinder die Paradoxien der Relativitätstheorie ohne Schwierigkeit als intuitiv klar bezeichnen, gerade so, wie wir bei Begriffen, die vor einigen Generationen als intuitiv völlig uneinsichtig galten, keine Bedenken haben. Darüber hinaus ist allgemein bekannt, daß die Intuition kein sicherer Führer ist: Sie ist weder ein angemessenes Kriterium für die Richtigkeit noch für die Fruchtbarkeit wissenschaftlicher Erklärungen.

Aus der zunehmenden Abstraktheit der Mathematik ergab sich jedoch ein schwerwiegendes Problem. Es betrifft die Frage, ob gegebene Postulate, die als Grundlage eines Systems dienen, miteinander verträglich sind, so daß aus ihnen nicht einander widersprechende Theoreme deduziert werden können. Wenn wir es mit einem Axiomensystem über einen endlichen und bekannten Gegenstandsbereich zu tun haben, erscheint das Problem nicht bedrückend. Denn in diesem Falle ist es nicht bloß sinnvoll zu fragen, ob die Axiome über jene Objekte tatsächlich wahr sind, sondern dies kann auch festgestellt werden. Da man von den euklidischen Axiomen allgemein annahm, sie seien wahre Aussagen über den Raum (oder über Gegenstände im Raum), hat sich vor dem neunzehnten Jahrhundert niemals ein Mathematiker die Frage gestellt, ob man nicht eines Tages aus den Axiomen ein Paar von kontradiktorischen Theoremen werde ableiten können. Die Grundlage dieses Vertrauens in die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie ist das richtige Prinzip, daß logisch unverträgliche Sätze nicht gleichzeitig wahr sein können. Wenn dementsprechend ein Satzsystem wahr ist (und dies nahm man von den euklidischen Axiomen an), sind die Sätze auch untereinander verträglich.

Die nichteuklidischen Geometrien gehörten offensichtlich zu einer anderen Kategorie. Ursprünglich hatte man angenommen, ihre Axiome seien im Raume eindeutig falsch, und aus diesem Grunde war es zweifelhaft, ob sie wahre Sätze über irgend etwas seien; es galt daher, die innere Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien nachzuweisen, als ein äußerst unangenehmes

und kritisches Problem. In der Riemannschen Geometrie wird z.B. das euklidische Parallelenpostulat durch die Annahme ersetzt, man könne durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer Geraden *keine* Parallele ziehen. Betrachten wir nun die Frage: Ist das Riemannsche Axiomensystem widerspruchsfrei? Die Axiome gelten augenscheinlich im Raume und in der gewöhnlichen Erfahrung nicht. Wie kann man dann ihre Verträglichkeit zeigen? Wie kann man beweisen, daß sie nicht zu widersprüchigen Theoremen führen? Offenkundig wird die Frage nicht durch den Umstand erledigt, daß die bereits abgeleiteten Theoreme einander nicht widersprechen – denn es bleibt die Möglichkeit bestehen, daß schon das nächste Theorem, das abgeleitet wird, unser Gedankengebäude einstürzen läßt. Aber solange die Frage unerledigt ist, darf man nicht sicher sein, daß die Riemannsche Geometrie eine echte Alternative zum euklidischen System, d.h. mathematisch ebenso gültig ist. Von der Lösung dieses Problems hängt es also ab, ob nichteuklidische Geometrien überhaupt möglich sind.

Zu seiner Lösung wurde eine allgemeine Methode entwickelt. Es liegt ihr der Gedanke zugrunde, für die abstrakten Postulate eines Systems ein »Modell« (eine »Interpretation«) zu finden, so daß jedes Postulat in einen wahren Satz über das Modell übergeht. Im Falle der euklidischen Geometrie war das Modell, wie wir erkannt haben, der gewöhnliche Raum. Die Methode wurde zum Auffinden anderer Modelle benützt, deren Elemente als Krücken bei der Bestimmung der Widerspruchsfreiheit der abstrakten Postulate dienen konnten. Der Vorgang verläuft etwa folgendermaßen: Wir wollen unter »Klasse« eine Zusammenfassung oder Vereinigung unterscheidbarer Elemente verstehen, von denen jedes als Element der Klasse bezeichnet wird. So ist die Klasse der Primzahlen, die kleiner als 10 sind, die Zusammenfassung der Zahlen 2, 3, 5 und 7. Betrachten wir nun folgendes System von Postulaten über die Klassen K und L, deren spezielle Bedeutungen unbestimmt bleiben, sofern sie nicht durch die Postulate »implizit« definiert werden:

1. Je zwei beliebige Elemente von K sind in genau einem Element von L enthalten.
2. Kein Element von K ist in mehr als zwei Elementen von L enthalten.
3. Die Elemente von K sind nicht alle in einem einzigen Element von L enthalten.

4. Je zwei beliebige Elemente von L enthalten genau ein Element von K.
5. Kein Element von L enthält mehr als zwei Elemente von K.

Unter Benützung der gebräuchlichen Ableitungsregeln können wir aus diesem kleinen System eine Anzahl von Theoremen ableiten. Es kann z. B. gezeigt werden, daß K genau drei Elemente enthält. Aber ist das System widerspruchsfrei, so daß in ihm niemals einander widersprechende Theoreme abgeleitet werden können? Mit Hilfe des folgenden Modells läßt sich die Frage einfach beantworten:

K sei jene Klasse von Punkten, die aus den Eckpunkten eines Dreiecks besteht, und L jene Klasse von Geraden, die seine Seiten bilden; unter dem Ausdruck »ein Element von K ist in einem Element von L enthalten« wollen wir verstehen, daß ein Punkt, der ein Eckpunkt ist, auf einer Geraden, die eine Seite ist, liegt. Jedes der fünf abstrakten Postulate geht dann in einen wahren Satz über. Das erste Postulat behauptet z. B., daß irgend zwei Punkte, die Eckpunkte eines Dreiecks sind, auf genau einer Geraden, die eine Seite ist, liegen (siehe Abb. 1). Auf diese Art wird die Widerspruchsfreiheit des Systems von Postulaten bewiesen.

Ebenso läßt sich scheinbar auch die Widerspruchsfreiheit der ebenen Riemannschen Geometrie durch ein Modell, das die Postulate verkörpert, nachweisen. Wir können den Ausdruck »Ebene« in den Riemannschen Axiomen als Oberfläche einer euklidischen Kugel interpretieren, den Ausdruck »Punkt« als Punkt auf dieser Oberfläche, den Ausdruck »gerade Linie« als einen Abschnitt eines Großkreises auf dieser Oberfläche usf.

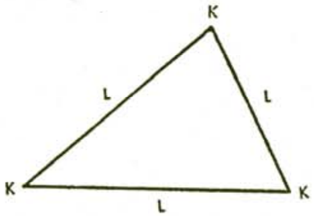

Abb. 1: Modell für das Axiomensystem über zwei Klassen K und L ist ein Dreieck, dessen Eckpunkte die Elemente von K und dessen Seiten die Elemente von L sind. Das geometrische Modell zeigt, daß die Postulate verträglich sind.

Jedes Riemannsche Postulat geht dabei in ein euklidisches Theorem über. Zum Beispiel lautet in dieser Interpretation das Riemannsche

Parallelenpostulat: Durch einen Punkt auf der Oberfläche einer Kugel kann man zu einem gegebenen Bogenstück eines Großkreises kein paralleles Bogenstück eines Großkreises ziehen (siehe Abb. 2).

Auf den ersten Blick mag dieser Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Riemannsche Geometrie beweiskräftig erscheinen. Aber eine genauere Betrachtung belehrt uns eines Besseren. Denn der kritische Leser wird entdecken, daß das Problem nicht gelöst wurde; es wurde nur auf ein anderes Gebiet verschoben. Der Beweis versucht die Frage der Widerspruchsfreiheit der Riemannschen Geometrie durch die Berufung auf die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie zu erledigen. Was sich daraus ergibt, ist aber nur folgendes: Die Riemannsche Geometrie ist widerspruchsfrei, wenn die euklidische es ist. So wird Euklids Autorität beschworen, um die Widerspruchsfreiheit eines Systems nachzuweisen, das die ausschließliche Geltung der euklidischen Theorie bestreitet. Es ergibt sich unausweichlich die Frage: Ist das euklidische Axiomensystem selbst widerspruchsfrei?

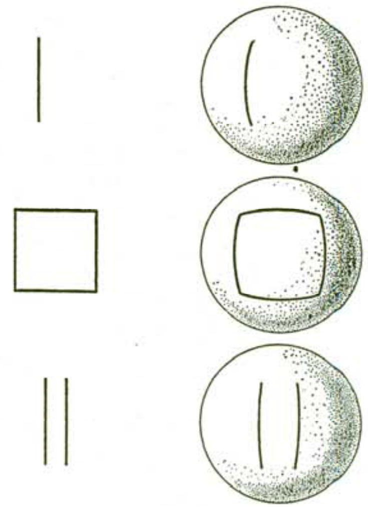

Abb. 2: Die nichteuklidische Geometrie von Bernhard Riemann kann durch ein euklidisches Modell dargestellt werden. Die Riemannsche Ebene wird zur Oberfläche einer euklidischen Kugel, Punkte in der Ebene werden Punkte auf dieser Oberfläche, gerade Linien in der Ebene werden zu Abschnitten von Großkreisen. So wird ein Teil der Riemannschen Ebene, der durch Abschnitte auf Geraden begrenzt ist, als Teil der Kugeloberfläche abgebildet, der durch Abschnitte von Großkreisen begrenzt ist *(Mitte)*. Zwei Geradenstücke in der Riemannschen Ebene sind zwei Abschnitte von Großkreisen auf der euklidischen Kugel *(unten)*, und wenn man sie verlängert, schneiden sie einander, im Widerspruch zum Parallelenpostulat.

Eine Antwort auf die Frage, die, wie wir gesehen haben, durch eine lange Tradition geheiligt ist, lautet, daß die euklidischen Axiome wahr und deshalb auch widerspruchsfrei seien. Diese Antwort wird heute als unannehmbar betrachtet; wir kommen sogleich auf sie zurück und erklären, weshalb sie unbefriedigend ist. Eine andere Antwort ist, daß die Axiome mit unseren tatsächlichen, wenngleich beschränkten Erfahrungen vom Raume übereinstimmen, und daß wir zur Extrapolation vom Begrenzten zum Allgemeinen berechtigt seien. Aber obwohl diese Behauptung durch vielerlei induktive Erkenntnisse gestützt wird, wäre auch der beste Beweis logisch unvollständig. Denn selbst, wenn alle beobachteten Tatsachen mit den Axiomen in Einklang stehen, bleibt die Möglichkeit offen, daß eine bisher nicht beobachtete Tatsache ihnen widerspricht und damit ihren Anspruch auf Allgemeingültigkeit zunichte macht. Die induktiven Überlegungen können bloß zeigen, daß die Axiome plausibel bzw. wahrscheinlich wahr sind.

Hilbert versuchte indes auf einem anderen Wege ans Ziel zu gelangen. Der Schlüssel dazu lag in den cartesischen Koordinaten der Geometrie. In seiner Interpretation wurden die euklidischen Axiome einfach in wahre Sätze der Algebra übersetzt. So ist z. B. in den Axiomen der ebenen Geometrie der Ausdruck »Punkt« als Kennzeichnung eines Zahlenpaares aufzufassen, der Ausdruck »Gerade« als (lineare) Beziehung zwischen Zahlen in Form einer Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten, der Ausdruck »Kreis« als eine Beziehung zwischen Zahlen, die als quadratische Gleichung bestimmter Form ausgedrückt wird usf. Der geometrische Satz, daß eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, wird in die wahre algebraische Aussage übersetzt, daß zwei verschiedene Zahlenpaare eine lineare Beziehung eindeutig bestimmen; das geometrische Theorem, wonach eine Gerade einen Kreis in höchstens zwei Punkten schneidet, geht in das algebraische Theorem über, daß ein Paar von Gleichungen (von denen eine linear und die andere von einem bestimmten quadratischen Typus ist) mit zwei Unbekannten höchstens zwei Paare von reellen Zahlen bestimmt usf. Kurz, es wird die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Postulate nachgewiesen, indem gezeigt wird, daß sie in einem algebraischen Modell erfüllbar sind. Diese Methode, die Widerspruchsfreiheit nachzuweisen, ist eindrucksvoll und tatsächlich durchführbar. Aber auch sie ist für den schon früher erhobenen Einwand nicht unangreifbar. Wieder wird ja ein Problem gelöst, indem es aus einem Bereich in einen anderen verschoben wird. Hilberts Beweisführung für die Widerspruchsfreiheit seiner geometrischen Postulate zeigt, daß sein

geometrisches System widerspruchsfrei ist, wenn die Algebra es ist. Natürlich ist dieser Beweis zur vorausgesetzten Widerspruchsfreiheit relativ und nicht » absolut«.

Die verschiedenen Versuche, das Problem der Widerspruchsfreiheit zu lösen, stoßen stets auf eine Quelle von Schwierigkeiten. Sie liegt in dem Umstand, daß die Axiome durch Modelle mit einer infiniten Zahl von Elementen interpretiert werden. Dadurch wird es unmöglich, die Modelle durch eine endliche Anzahl von Beobachtungen auszuschöpfen, und somit ist die Wahrheit der Axiome selbst anzweifelbar. Im induktiven Argument für die Wahrheit der euklidischen Geometrie befindet sich eine endliche Anzahl von beobachteten Tatsachen vermutlich in Übereinstimmung mit den Axiomen. Aber die Folgerung, die durch die Argumentation begründet werden soll, enthält eine Extrapolation von einer endlichen zu einer unendlichen Menge von Beobachtungsdaten. Wie läßt sich dieser Sprung rechtfertigen? Auf der anderen Seite wird die Schwierigkeit wesentlich geringer, wenn sie nicht überhaupt verschwindet, sofern man ein passendes Modell ersinnen kann, welches nur eine endliche Zahl von Elementen enthält. Das Dreiecksmodell, das zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der fünf abstrakten Postulate über die Klassen K und L diente, ist finit; und es ist verhältnismäßig einfach, tatsächlich durch Überprüfung festzustellen, ob alle Elemente im Modell wirklich den Postulaten genügen und damit, ob sie wahr (und somit widerspruchsfrei) sind. Zum Beispiel kann man im Modelldreieck der Reihe nach alle Eckpunkte kontrollieren und ermitteln, ob irgend zwei von ihnen genau auf einer Seite liegen – so daß die Wahrheit des ersten Postulates erwiesen ist. Da alle Elemente des Modells sowie die entscheidenden Relationen zwischen ihnen einer direkten und erschöpfenden Überprüfung zugänglich sind und da praktisch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bei der Überprüfung gleich Null ist, kann die Widerspruchsfreiheit der Postulate in diesem Falle nicht ernsthaft in Zweifel gezogen werden.

Unglücklicherweise lassen sich die meisten Axiomensysteme, die als Grundlage für wichtige Gebiete der Mathematik dienen, nicht durch finite Modelle wiedergeben. Betrachten wir das elementare arithmetische Postulat, daß jede ganze Zahl einen von jeder vorhergegangenen Zahl verschiedenen unmittelbaren Nachfolger besitzt. Offenkundig kann das Modell, welches zur Prüfung eines Systems, das dieses Postulat enthält, dient, nicht finit sein, sondern muß eine infinite Zahl von Elementen enthalten. Daraus folgt, daß die Wahrheit (und damit die Widerspruchsfreiheit) des Systems nicht mit Hilfe einer erschöpfenden Überprüfung einer endlichen Zahl von Elementen nachweisbar ist. Offensichtlich sind wir in eine Sackgasse geraten. Finite Modelle erlauben im Prinzip den Beweis der Widerspruchsfreiheit gewisser Axiomensysteme; aber ebendiese sind mathematisch von geringer Wichtigkeit. Die für eine Deutung der meisten mathematisch bedeutsamen Axiomensysteme nötigen infiniten Modelle lassen sich nur in allgemeinen Ausdrücken beschreiben; und wir dürfen es nicht als Selbstverständlichkeit betrachten, daß die Beschreibungen frei von verborgenen Widersprüchen sind.

An diesem Punkt liegt die Versuchung nahe, die Widerspruchsfreiheit von Formulierungen, in denen nichtfinite Modelle beschrieben werden, als gesichert zu betrachten, wenn die benützten Grundbegriffe völlig »klar« und »deutlich« sind. Aber die Lehre von den klaren und deutlichen Ideen, oder die Doktrin von der intuitiven Erkenntnis, die implizit in diesem Standpunkt enthalten ist, ist in der Geistesgeschichte nicht gut weggekommen. In gewissen Gebieten der mathematischen Forschung, wo infinite Mengen die Hauptrolle spielen, sind trotz der intuitiven Klarheit der in den Postulaten enthaltenen Begriffe und trotz dem scheinbar widerspruchsfreien Charakter der angeführten intellektuellen Konstruktionen schwere Widersprüche zutage getreten. Solche Widersprüche (die in der Fachsprache als »Antinomien« bezeichnet werden) sind in der Theorie der infiniten Zahlen aufgetreten, die von Georg Cantor im neunzehnten Jahrhundert entwickelt wurde; und das Auftreten dieser Widersprüche machte es deutlich, daß die scheinbare Klarheit sogar eines so elementaren Begriffes wie der *Klasse* (oder *Menge*) die Widerspruchsfreiheit irgendeines speziellen Systems, das auf ihm aufgebaut ist, nicht gewährleistet. Da die mathematische Theorie der Klassen, die sich mit den Eigenschaften und Beziehungen von Klassen oder Mengen von Elementen befaßt, oft als Grundlage für andere Teile der Mathematik, speziell der elementaren Arithmetik, dient, ist die Frage zweckdienlich, ob die Formulierungen anderer Teile der Mathematik von ähnlichen Widersprüchen befallen sind, wie sie in der Theorie der infiniten Klassen auftreten.

Tatsächlich hat Bertrand Russell innerhalb des Systems der
Antinomie elementaren Logik selbst einen Widerspruch konstruiert, der dem

zuerst in der Cantorschen Theorie der infiniten Klassen entwickelten genau analog ist. Die Russellsche Antinomie läßt sich folgendermaßen darstellen: Es scheint zwei Arten von Klassen zu geben: jene, die sich selbst als Elemente enthalten, und jene, bei denen dies nicht der Fall ist. Wir nennen eine Klasse dann und nur dann »normal«, wenn sie sich selbst nicht als Element enthält. Im anderen Fall wird sie »nichtnormal« genannt. Ein Beispiel einer normalen Klasse ist die Klasse der Mathematiker, denn offenkundig ist die Klasse selbst kein Mathematiker und deshalb nicht Element von sich selbst. Ein Beispiel einer nichtnormalen Klasse ist die Klasse aller denkbaren Dinge, denn die Klasse aller denkbaren Dinge ist selbst denkbar und daher ein Element von sich selbst. Es sei nun ›**N**‹ als die Klasse *aller* normalen Klassen definiert, und wir fragen, ob **N** selbst eine normale Klasse ist. Wenn **N** normal ist, enthält es sich selbst als Element (weil **N** per definitionem alle normalen Klassen enthält). In diesem Falle ist **N** aber nichtnormal, weil eine Klasse, die sich selbst als Element enthält, per definitionem nichtnormal ist. Wenn **N** andrerseits nichtnormal ist, ist es ein Element von sich selbst (wegen der Definition von nichtnormal); in diesem Falle ist **N** aber normal, weil die Elemente von **N** per definitionem normale Klassen sind. Kurz gesagt, **N** ist dann und nur dann normal, wenn **N** nichtnormal ist. Es folgt daraus, daß der Satz ›**N** ist normal‹ gleichzeitig wahr und falsch ist. Dieser fatale Widerspruch entspringt aus dem unkritischen Gebrauch des anscheinend durchsichtigen Begriffes der Klasse. Später wurden andere Paradoxien gefunden, die alle mit ähnlichen und scheinbar zwingenden Beweisverfahren konstruiert wurden. Die Mathematiker mußten einsehen, daß Vertrautheit und intuitive Klarheit bei der Entwicklung widerspruchsfreier Systeme Strohhalme sind, an die man sich nicht klammern soll.

Wir haben die Wichtigkeit des Problems der Widerspruchsfreiheit erkannt und sind mit den klassischen Lösungsverfahren mit Hilfe von Modellen vertraut geworden. Es wurde gezeigt, daß das Problem in den meisten Fällen den Gebrauch eines nichtfiniten Modells erfordert, in dessen Beschreibung selbst Widersprüche verborgen sein können. Wir kommen zu dem Ende, daß die Modellmethode, obwohl sie ein unschätzbares mathematisches Werkzeug ist, keine endgültige Antwort für das Problem liefert, zu dessen Lösung sie ausgebildet worden ist.

III
Absolute Beweise der Widerspruchsfreiheit

Die im Wesen der Modelle zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit liegenden Grenzen und die wachsende Sorge, die üblichen Formulierungen vieler mathematischer Systeme könnten innere Widersprüche enthalten, führten zur neuerlichen Inangriffnahme des Problems. Eine Alternative zu den relativen Widerspruchsfreiheitsbeweisen wurde von Hilbert vorgeschlagen. Er versuchte, »absolute« Beweise zu konstruieren, durch welche die Widerspruchsfreiheit von Systemen gezeigt werden kann, ohne daß dieselbe von einem anderen System vorausgesetzt werden muß. Zur Vorbereitung für das Verständnis der Gödelschen Leistung müssen wir auch dieses Verfahren kurz erklären.

Der erste Schritt bei der Konstruktion eines absoluten Beweises, so wie ihn Hilbert verstand, ist die *vollständige Formalisierung* eines deduktiven Systems. Dies zieht die völlige Bedeutungsentleerung der im System enthaltenen Ausdrücke nach sich: Sie werden einfach als leere Zeichen angesehen. Eine Anzahl genau formulierter Regeln gibt an, wie diese Zeichen kombiniert werden können, und wie man mit ihnen verfahren darf. Zweck des Verfahrens ist die Aufstellung eines Systems von Zeichen (genannt ein »Kalkül«), in dem uns nichts verborgen ist, und das nur dasjenige enthält, was wir ausdrücklich hineingebracht haben. Die Postulate und Theoreme eines vollständig formalisierten Systems sind »Ketten« (oder endlich lange Folgen) von sinnleeren Zeichen, die gemäß den Kombinationsregeln für die Elementarzeichen des Systems aufgebaut sind. Darüber hinaus ist in einem vollständig formalisierten System die Ableitung von Theoremen aus den Postulaten nichts weiter als die (den Regeln gemäße) Umformung einer Anzahl solcher »Ketten« in andere »Ketten«. Auf diese Weise wird die Gefahr der Benützung irgendwelcher verschwiegener Argumentationsverfahren ausgeschaltet. Die Formalisierung ist eine schwierige Tätigkeit, die manche Kunstgriffe erfordert, aber sie dient einem wertvollen Ziele. Wie ein aufgeschnittenes Modell einer arbeitenden Maschine zeigt sie uns die Form und Funktion in unverhüllter Klarheit. Wenn ein System formalisiert worden ist, liegen die logischen Beziehungen zwischen mathematischen Sätzen offen vor uns; man kann die Formgesetze verschiedener »Ketten« von »sinnlosen« Zeichen erkennen, wie sie zusammen-

hängen, kombiniert werden, wie eine in der anderen enthalten ist usf.

Eine Seite, bedeckt mit »sinnlosen« Zeichen einer solcherart formalisierten Mathematik, *behauptet* gar nichts – sie ist nur eine abstrakte Zeichnung oder ein Mosaik, das eine bestimmte Struktur besitzt. Aber es ist offenbar möglich, die Anordnungen in einem solchen System zu beschreiben und darüber und über ihre verschiedenen Beziehungen zueinander Aussagen zu machen. Man könnte sagen, daß eine »Kette« hübsch ist, daß sie einer anderen »Kette« gleicht oder daß sie aus drei anderen aufgebaut zu sein scheint usf. Es ist einleuchtend, daß derartige Sätze sinnvoll sind und wichtige Informationen über das formale System vermitteln können. Dabei muß jedoch beachtet werden, daß solche sinnvollen Sätze über ein sinnloses (formalisiertes) mathematisches System natürlich selbst nicht zu dem System gehören. Sie gehören zu dem, was Hilbert die »Metamathematik« genannt hat, zu der Sprache, in der wir *über* die Mathematik sprechen. Metamathematische Aussagen handeln von den in einem formalisierten mathematischen System (d. h. einem Kalkül) auftretenden Zeichen – von der Art und Anordnung solcher Zeichen, wenn sie zu längeren Ketten kombiniert werden, die man »Formeln« nennt, oder von den Beziehungen zwischen den Formeln, die sich als Folge der für sie geltenden Regeln ergeben können.

Meta-math

Einige Beispiele werden das Verständnis für die Hilbertsche Unterscheidung zwischen [formalisierter] Mathematik (d. i. ein System sinnleerer Zeichen) und Metamathematik (sinnvolle Aussagen über die Mathematik, die im Kalkül auftretenden Zeichen, ihre Anordnung und ihre Beziehungen) erleichtern. Nehmen wir den Ausdruck

$$2 + 3 = 5$$

Dieser Ausdruck gehört zur Mathematik (Arithmetik) und ist zur Gänze aus elementaren arithmetischen Zeichen aufgebaut. Demgegenüber behauptet der *Satz*

›2 + 3 = 5‹ ist eine arithmetische Formel

etwas über den genannten Ausdruck. Der Satz drückt keine arithmetische Tatsache aus und gehört nicht zur formalen Sprache der Arithmetik; er gehört zur Metamathematik, weil er eine bestimmte Kette arithmetischer Zeichen als eine Formel kennzeichnet. Der folgende Satz gehört auch zur Metamathematik:

> Wenn in einer arithmetischen Formel das Zeichen ›=‹ benützt wird, so müssen links und rechts von ihm Ausdrücke für Zahlenwerte stehen.

Dieser Satz legt eine notwendige Bedingung für den Gebrauch eines bestimmten arithmetischen Zeichens in arithmetischen Formeln fest: die Form, die eine arithmetische Formel haben muß, wenn sie jenes Zeichen enthält.

Als nächstes betrachten wir die drei Formeln

$$x = x$$
$$0 = 0$$
$$0 \neq 0$$

Sie gehören alle zur Mathematik (Arithmetik), weil jede von ihnen vollständig aus arithmetischen Zeichen aufgebaut ist. Aber der Satz

›x‹ ist eine Variable

gehört zur Metamathematik, weil er ein bestimmtes arithmetisches Zeichen als Element einer speziellen Klasse von Zeichen (der Klasse der Variablen) kennzeichnet. Auch der folgende Satz gehört zur Metamathematik:

> Die Formel ›$0 = 0$‹ kann aus der Formel ›$x = x$‹ durch Einsetzen der Zahl ›0‹ an Stelle der Variablen ›x‹ abgeleitet werden.

Er bestimmt, auf welche Weise eine arithmetische Formel aus einer anderen erhalten werden kann, und beschreibt damit die Beziehung zwischen den beiden Formeln. Analog gehört auch der Satz

›$0 \neq 0$‹ ist kein Theorem

zur Metamathematik, weil er von einer bestimmten Formel aussagt, daß sie nicht aus den arithmetischen Axiomen deduzierbar ist, und somit behauptet, daß zwischen der angeführten Formel und den Axiomen eine bestimmte Relation nicht besteht. Schließlich gehört zur Metamathematik folgender Satz:

Die Arithmetik ist widerspruchsfrei

(d.h. es ist nicht möglich, aus den Axiomen der Arithmetik zwei einander formal widersprechende Formeln abzuleiten, z.B. die Formeln ›$0 = 0$‹ und ›$0 \neq 0$‹). Diese Feststellung über die Arithmetik behauptet, daß Formelpaare einer bestimmten Art nicht in einer

Def

speziellen Relation zu jenen Formeln stehen, welche die Axiome der Arithmetik bilden[3].

Der Leser wird das Wort ›Metamathematik‹ vielleicht schwerfällig und den Begriff verwirrend finden. Wir behaupten nicht, daß das Wort ansprechend ist; der Begriff selbst aber wird niemanden verblüffen, wenn man bedenkt, daß er im Zusammenhang mit einem speziellen Fall einer altbekannten Unterscheidung benützt wird, nämlich jener zwischen dem Gegenstand einer Untersuchung und der Untersuchung dieses Gegenstandes. Der Satz ›Bei den Sturmseglern bebrütet das Männchen die Eier‹ betrifft einen von den Zoologen erforschten Gegenstand und gehört in die Zoologie. Wenn wir aber etwa sagen, diese Aussage über den Sturmsegler beweise die Irrationalität der Zoologie, dann reden wir nicht vom Sturmsegler, sondern über die Aussage, und die Disziplin, in der diese Redeweise vorkommt, ist die Meta-Zoologie. Wenn wir sagen, das *Es* sei mächtiger als das *Ich*, produzieren wir eine Laut-

[3] Es ist der Mühe wert, zu bemerken, daß die im Text angeführten metamathematischen Sätze selbst keine *mathematischen Zeichen und Formeln*, die in den Beispielen vorkommen, als Bestandteile enthalten. Diese Feststellung mag auf den ersten Blick sichtlich unwahr erscheinen, denn die Zeichen und Formeln sind deutlich zu sehen. Betrachtet man die Sätze aber kritisch, so erkennt man die Berechtigung unserer Behauptung. Die metamathematischen Sätze enthalten die *Namen* gewisser arithmetischer Ausdrücke, nicht aber die Ausdrücke selbst. Diese subtile Unterscheidung ist wichtig und hat triftige Gründe. Sie entspringt den Regeln der deutschen Grammatik, die erfordern, daß kein Satz im wörtlichen Sinne jene Objekte enthalte, auf welche sich die Ausdrücke im Satz beziehen, sondern ausschließlich die *Namen* solcher Objekte. Offensichtlich können wir ja, wenn von einer Stadt die Rede ist, nicht die Stadt selbst in einen Satz hineinstellen, sondern nur den Namen der Stadt; wenn wir etwas über ein Wort (oder ein anderes Sprachzeichen) mitzuteilen wünschen, dann tritt analog nicht das Wort (oder das Zeichen) selbst in dem Satz in Erscheinung, sondern nur ein Name für das Wort (oder Zeichen). Gemäß einer allgemeinen Übereinkunft stellen wir den Namen für einen sprachlichen Ausdruck so dar, daß wir letzteren zwischen einfache Anführungszeichen setzen. Dies geschieht auch im vorliegenden Buch. Man schreibt korrekt:

Chicago hat viele Einwohner.

Aber es wäre unkorrekt, zu schreiben:

Chicago ist dreisilbig.

Das, was der zweite Satz ausdrücken soll, muß so formuliert werden:

›Chicago‹ ist dreisilbig.

Ebenso ist die Schreibweise

$x = 5$ ist eine Gleichung

unkorrekt, und man müßte das, was wir im Sinn haben, durch

›$x = 5$‹ ist eine Gleichung

ausdrücken.

folge, die zur orthodoxen Psychoanalyse gehört; wenn wir diesen Satz aber als sinnlos und unbeweisbar kritisieren, dann gehört unsere Kritik in die Meta-Psychoanalyse. Dasselbe gilt im Falle von Mathematik und Metamathematik. Die von den Mathematikern konstruierten formalen Systeme fallen unter die Überschrift »Mathematik«; die Beschreibung, Diskussion und theoretische Untersuchung der Systeme aber gehören in die Abteilung »Metamathematik«.

Für unser Thema kann die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Mathematik und Metamathematik gar nicht überschätzt werden. Ihre Nichtbeachtung führte zu Paradoxien und Verwirrung. Ihre Beachtung ermöglichte es, die logische Struktur mathematischer Argumentationen mit voller Klarheit darzustellen. Es ist das Verdienst dieser Unterscheidung, daß sie eine sorgfältige Kodifizierung der verschiedenen Zeichen, die zum Aufbau eines formalen Kalküls herangezogen werden, mit sich bringt, eine Kodifizierung, die frei ist von stillschweigenden Annahmen und unwesentlichen Bedeutungsassoziationen. Darüber hinaus wird es nötig, die Operationen und logischen Regeln der mathematischen Konstruktion und Deduktion exakt zu definieren, welche die Mathematiker vielfach angewendet hatten, ohne sich ausdrücklich darüber im klaren zu sein, was sie eigentlich verwendeten.

Hilbert erkannte den Kern der Sache, und er gründete seinen Versuch eines »absoluten« Beweises der Widerspruchsfreiheit auf die Unterscheidung zwischen einem formalen Kalkül und dessen Beschreibung. Im einzelnen versuchte er eine Methode auszubilden, deren Widerspruchsfreiheitsbeweise in logischer Hinsicht ebensowenig ernstlich angezweifelt werden können wie die Verwendung von finiten Modellen zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit gewisser Postulatensysteme – und zwar durch Analyse einer endlichen Anzahl formaler Eigenschaften der Ausdrücke in vollständig formalisierten Kalkülen. Die Analyse besteht darin, daß die im Kalkül auftretenden Zeichen angegeben werden, gezeigt wird, wie sie zu Formeln kombiniert werden dürfen, und wie Formeln aus anderen Formeln erhalten werden können, sowie in der Feststellung, ob Formeln bestimmter Art aus anderen mit Hilfe explizit angeführter Regeln abgeleitet werden können. Hilbert glaubte, daß es möglich sei, jeden mathematischen Kalkül so zu betrachten wie eine Art »geometrisches« Muster von Formeln, wobei die Formeln zueinander in einer endlichen Zahl von strukturellen Be-

ziehungen stehen. Durch erschöpfende Überprüfung dieser strukturellen Eigenschaften von Ausdrücken des Systems hoffte er zeigen zu können, daß aus den Axiomen eines gegebenen Kalküls keine formal widersprüchigen Formeln abgeleitet werden können. Eine wesentliche Forderung in Hilberts ursprünglichem Programm war, daß die Beweise der Widerspruchsfreiheit sich weder einer infiniten Anzahl von Struktureigenschaften bedienen dürfen noch einer infiniten Zahl von Operationen mit den Formeln. Solche Verfahren nennt man »finitistisch«; und ein Beweis der Widerspruchsfreiheit, der den genannten Anforderungen genügt, heißt »absolut«. Ein »absoluter« Beweis kommt mit Hilfe eines Minimums an Ableitungsregeln ans Ziel und setzt die Widerspruchsfreiheit irgendeines anderen Systems nicht voraus. Ein absoluter Beweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik – wenn ein solcher ausgeführt werden könnte – würde deshalb mit Hilfe eines finitistischen metamathematischen Verfahrens zeigen, daß zwei einander widersprechende Formeln, wie z. B. ›0 = 0‹ und die formale Negation davon, ›~(0 = 0)‹ – bei der das Zeichen ›~‹ die Bedeutung ›nicht‹ hat – nicht beide unter Benützung der Ableitungsregeln aus den Axiomen oder Ausgangsformeln deduziert werden können[4].

Es ist zweckmäßig, sich die Metamathematik als eine Beweistheorie an Hand der Theorie des Schachspiels zu verdeutlichen. Bsp
Schach wird mit 32 Steinen einer bestimmten Ausführung auf einem quadratischen Brett, das in 64 quadratische Felder unterteilt ist, gespielt, wobei die Figuren in Übereinstimmung mit bestimmten Regeln ziehen dürfen. Offenbar kann das Spiel ohne Zuordnung irgendeiner »Interpretation« an die Figuren und ihre verschiedenen Stellungen auf dem Brett gespielt werden, obwohl eine solche Interpretation gefunden werden könnte, falls man dies wünscht. Es ließe sich etwa annehmen, ein bestimmter Bauer repräsentiere ein gewisses Regiment einer Armee, ein gegebenes Feld vertrete einen Landstrich usf. Aber solche Annahmen (oder Interpretationen) sind nicht üblich; weder die Figuren, noch die Felder, noch die Stellungen der Figuren auf dem Brett bezeichnen irgend etwas *außerhalb* des Spieles. In diesem Sinne sind die Figuren und

[4] Hilbert hat nicht völlig präzise erklärt, welche metamathematischen Verfahren zu den finitistischen zu rechnen seien. In der ursprünglichen Fassung seines Programmes waren die Anforderungen an einen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis strenger als in den späteren Fortführungen des Programms durch Angehörige seiner Schule.

der auf die formalen Deduktionen der Arithmetik abgebildet werden kann[18]. Metamathematische Widerspruchsfreiheitsbeweise sind tatsächlich konstruiert worden, insbesondere im Jahre 1936 von Gerhard Gentzen, einem Angehörigen der Hilbertschen Schule, und später von anderen[19]. Diese Beweise sind von großer logischer Wichtigkeit, unter anderem deswegen, weil sie neue Formen metamathematischer Konstruktionen nahelegen und dadurch zur Klärung der Frage beitragen, wie die Klasse der Schlußregeln erweitert werden muß, wenn die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik nachgewiesen werden soll. Aber diese Beweise können im arithmetischen Kalkül nicht dargestellt werden; und da sie nicht finitistisch sind, erreichen sie die im ursprünglichen Hilbertschen Programm proklamierten Ziele nicht.

VIII
Abschließende Betrachtungen

Die Bedeutung der Gödelschen Resultate ist eine tiefgehende, wenngleich sie bisher noch nicht voll ergründet worden ist. Die Ergebnisse zeigen, daß die Aussicht, für jedes deduktive System (und speziell für ein System, in dem die gesamte Arithmetik ausgedrückt werden kann) einen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis zu finden, der die finitistischen Anforderungen des Hilbertschen Programms erfüllt, zwar nicht logisch ausgeschlossen, aber

[18] Wir wollen den Leser an dieser Stelle daran erinnern, daß der Beweis, es sei unmöglich, einen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen, in ähnlicher Weise *nicht* bedeutet, ein Winkel könne nicht durch irgendwelche andere Verfahren in drei Teile geteilt werden. Im Gegenteil, ein beliebiger Winkel kann dreigeteilt werden, wenn z. B. zusätzlich zu Zirkel und Lineal der Gebrauch eines festen Abstandes auf dem Lineal erlaubt ist.

[19] Der Beweis von Gentzen beruht darauf, daß die Beweise der Arithmetik in eine lineare Ordnung entsprechend dem Grade ihrer »Einfachheit« gebracht werden. Die Anordnung zeigt eine Struktur, die von einem bestimmten »transfiniten Ordnungs-« Typ ist. (Die Theorie der transfiniten Ordnungszahlen ist im neunzehnten Jahrhundert vom deutschen Mathematiker Georg Cantor geschaffen worden.) Der Beweis der Widerspruchsfreiheit erfolgt unter Anwendung einer Schlußregel, die das »Prinzip der transfiniten Induktion« genannt wird, auf die lineare Ordnung. Gentzens Beweisgang kann nicht auf den Formalismus der Arithmetik abgebildet werden. Der Beweis ist, obwohl seine Schlüssigkeit von den meisten Denkern nicht in Frage gestellt wird, im Sinne der ursprünglichen Hilbertschen Forderungen an einen absoluten Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht finitistisch.

doch recht unwahrscheinlich ist[20]. Sie zeigen weiter, daß es eine unendliche Anzahl wahrer arithmetischer Sätze gibt, die aus irgendeinem gegebenen Axiomensystem nicht formal mit Hilfe eines abgeschlossenen Systems von Schlußregeln deduziert werden können. Es folgt, daß eine axiomatische Behandlung z. B. der Zahlentheorie den Bereich der arithmetischen Wahrheiten nicht voll ausschöpfen kann. Es folgt weiter, daß dasjenige, was wir unter einem bestimmten mathematischen Beweisverfahren verstehen, nicht mit der Durchführung einer formalisierten axiomatischen Methode zusammenfällt. Ein formalisiertes axiomatisches Verfahren gründet sich auf eine von Anfang an festgelegte Zahl von Axiomen und Umformungsregeln. Wie Gödels eigener Beweis zeigt, lassen sich der Erfindungskraft des Mathematikers bei der Entwicklung neuer Beweisverfahren keine Grenzen setzen. Infolgedessen kann keine endgültige Darstellung der genauen logischen Form mathematischer Beweise gegeben werden. Unter Berücksichtigung dieser Umstände ergibt sich die Frage, ob sich eine vollständige Definition der mathematischen oder logischen Wahrheit erreichen läßt, und ob – wie Gödel selbst zu glauben scheint – nur ein wohlüberlegter philosophischer Realismus vom alten platonischen Typus eine adäquate Definition ermöglicht – Probleme, die gegenwärtig noch zur Diskussion stehen und hier für eine genauere Darstellung zu schwierig sind[21].

Gödels Ergebnisse sind für die Frage von Bedeutung, ob eine Rechenmaschine konstruiert werden kann, die dem menschlichen

[20] Die Möglichkeit für die Konstruktion eines finitistischen absoluten Beweises der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik wird durch Gödels Ergebnisse nicht ausgeschlossen. Gödel zeigte, daß kein solcher Beweis möglich ist, der innerhalb der Arithmetik wiedergegeben werden kann. Seine Beweisführung schließt die Möglichkeit streng finitistischer Beweise, welche sich nicht innerhalb der Arithmetik darstellen lassen, nicht aus. Aber heute dürfte wohl niemand eine klare Vorstellung davon haben, wie ein solcher finitistischer Beweis auszusehen hätte, der einer Formalisierung innerhalb der Arithmetik *nicht* zugänglich ist.

[21] Der platonische Realismus vertritt die Ansicht, daß die Mathematik ihre »Objekte« nicht erschaffe oder erfinde, sondern entdecke, so wie Kolumbus Amerika entdeckt hat. Wenn dies aber wahr ist, müssen die Objekte unabhängig von ihrer Entdeckung in irgendeinem Sinne »existieren«. Nach der platonischen Lehre sind die Objekte der mathematischen Untersuchung nicht in Raum und Zeit zu finden. Sie sind körperlose ewige Formen oder Archetypen, die in einer nur dem Intellekt zugänglichen Wirklichkeit existieren. Für diesen Standpunkt sind Dreiecke oder Kreise aus materiellen Körpern, welche wir durch die Sinne wahrnehmen, nicht die eigentlichen Gegenstände der Mathematik. Diese Gestalten sind bloß unvollkommene Verkörperungen eines

Geist an mathematischer Intelligenz ebenbürtig ist. Die heutigen Rechenmaschinen haben vorgegebene Befehle eingebaut; diese Befehle entsprechen den festgesetzten Schlußregeln des formalisierten axiomatischen Verfahrens. Die Maschinen liefern damit Antworten auf Fragen, indem sie Schritt für Schritt arbeiten, wobei jeder Schritt durch eine eingebaute Regel bestimmt wird. Aber wie Gödel in seinem Unvollständigkeitstheorem gezeigt hat, gibt es in der elementaren Zahlentheorie unzählbar viele Probleme, die außerhalb des Bereiches einer bestimmten axiomatischen Methode liegen und die von solchen Maschinen nicht gelöst werden können, wie kompliziert und geistreich auch immer die eingebauten Programme sein und wie schnell sie auch ablaufen mögen. Wenn ein bestimmtes Problem gegeben ist, kann man wohl eine Maschine bauen, die es zu lösen imstande ist; aber es ist keine Maschine möglich, die jedes Problem zu lösen vermag. Natürlich könnte auch das menschliche Gehirn selbst seine Grenzen haben, und es könnte mathematische Probleme geben, die es nicht zu lösen vermag. Aber selbst wenn dem so ist, scheint uns das Gehirn doch eine Struktur von Operationsregeln in sich zu enthalten, die viel weitreichender ist als die Struktur der gegenwärtig denkbaren künstlichen Gehirne. Es besteht derzeit nicht die geringste Aussicht, daß sich der menschliche Geist durch Roboter ersetzen ließe.

Gödels Beweis sollte nicht als Anlaß zur Verzweiflung oder als Entschuldigung für Geheimniskrämerei gedeutet werden. Die Entdeckung, daß es arithmetische Wahrheiten gibt, die nicht formal beweisbar sind, heißt nicht, daß es Wahrheiten gibt, die uns ewig unerkennbar bleiben müssen oder daß eine »mystische« Intuition (die sich in Art und Autorität radikal von allem unterscheidet, was im allgemeinen für den intellektuellen Fortschritt wirksam ist) an die Stelle zwingender Beweise zu treten hätte. Sie bedeutet nicht, wie dies von einem zeitgenössischen Autor behauptet wird, daß es

idealen und »vollkommenen« Dreiecks, Kreises usf., welch letztere unerschaffen und in der Körperwelt niemals vollkommen abgebildet sind. Sie können nur durch den forschenden Geist des Mathematikers begriffen werden. Gödel scheint eine ähnliche Ansicht zu vertreten, wenn er sagt: »Klassen und Begriffe können … als reale Objekte aufgefaßt werden … die unabhängig von unseren Konstruktionen und Definitionen existieren. Es scheint mir, daß die Annahme solcher Objekte genau so legitim ist wie die Annahme materieller Körper, und daß es ebenso viele Gründe gibt, an ihre Existenz zu glauben.« (Kurt Gödel, »Russell's Mathematical Logic«, in *The Philosophy of Bertrand Russell* (Hrsg. Paul A. Schilpp, Evanston und Chicago, 1944) S. 137).

für den menschlichen Verstand »unüberschreitbare Grenzen« gibt. Sie bedeutet, daß die Quellen des menschlichen Intellekts nicht vollständig formalisiert wurden und daß dies auch in Zukunft nicht möglich ist, so daß neue Beweismethoden immer erfunden oder entdeckt werden können. Wir haben gesehen, daß mathematische Aussagen, die durch formale Deduktion aus einem gegebenen Axiomensystem nicht erhalten werden können, dennoch durch »nicht-formale« metamathematische Überlegungen aufgestellt werden können. Es wäre unverantwortlich als Grundlage solcher Aussagen nur die Intuition zu nennen.

Die den Rechenmaschinen innewohnenden Begrenzungen bedeuten auch nicht, es sei hoffnungslos, eine Erklärung der Phänomene des Lebens und des menschlichen Geistes durch Physik und Chemie zu versuchen. Die Möglichkeit solcher Erklärungen wird durch das Gödelsche Unvollständigkeitstheorem weder ausgeschlossen noch behauptet. Das Theorem zeigt uns, daß Struktur und Leistungsfähigkeit des menschlichen Verstandes weit komplexer und differenzierter sind als die jeder bisher konzipierten leblosen Maschine. Gödels Arbeit selbst ist ein bemerkenswertes Beispiel solcher Komplexheit und Subtilität. Sie ist kein Anlaß zur Niedergeschlagenheit, sondern zur erneuten Würdigung der Reichweite schöpferischer Vernunft.

Nagel, Ernest; Newman, James R.: *Der Gödelsche Beweis*, 6. unveränderte Aufl., München: Oldenbourg 2001, pp. 14–40, 69–99.