2. Übung zur Differentialgeometrie WS 2007/8

1. Man zeige oder widerlege:

   (a) Die Menge aller Tangentialvektoren an einem Punkt p einer Niveaumenge einer glatten Funktion f bildet einen Untervektorraum des $\mathbf{R}_p^{n+1}$.
   (Aufgabe 4 erst zu lösen, ist möglicherweise hilfreich!)

   (b) Die Menge aller Tangentialvektoren an einem Punkt p einer Niveaumenge einer glatten Funktion f ist eine echte Teilmenge des $\mathbf{R}_p^{n+1}$.

2. Sei $f : U \to \mathbf{R}$ eine glatte Funktion und $\alpha : I \to U$ eine Integralkurve auf dem Vektorfeld ∇f.

   (a) Man zeige: $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) = \|\nabla f(\alpha(t))\|^2$ für alle $t \in I$.

   (b) Sei $t_0 \in I$ und $\beta : \overline{I} \to U$ eine Kurve mit $\beta(s_0) = \alpha(t_0)$ für ein $s_0 \in \overline{I}$ und $\|\dot{\beta}(s_0)\| = \|\dot{\alpha}(t_0)\|$. Man zeige $\frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0) \geq \frac{d}{dt}(f \circ \beta)(s_0)$.

3. Sei S eine n–Fläche im $\mathbf{R}^{n+1}$.

   (a) Seien f, g zwei geeignete Funktionen mit $S = f^{-1}(c) = g^{-1}(d)$ und $\nabla f(p) \neq 0$, $\nabla g(p) \neq 0$ für $p \in S$. Man zeige: Es gibt ein $\lambda(p) \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ mit $\nabla f(p) = \lambda(p)\nabla g(p)$.

   (b) Sei $h : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ eine glatte Funktion und $p \in S$ ein Extrempunkt von h bezüglich S mit $\nabla h(p) \neq 0$. Man zeige: Die Menge der Tangentialvektoren zur Niveaumenge $h^{-1}(h(p))$ an p ist gleich S_p, der Menge der Tangentialvektoren an p bezüglich S.

4. Für welche Werte von c ist die Niveaumenge $f^{-1}(c)$ eine Fläche?

   (a) $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2$,

   (b) $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1 x_2 \ldots x_{n+1} + 1$.

Abgabe 30.10.