3. Übung zur Differentialgeometrie WS 2007/8

1. Sei C eine orientierte ebene Kurve und $v \neq 0$ ein Tangentialvektor an C im Punkt p. Man zeige: Die Basis $\{v\}$ von C_p ist konsistent mit der Orientierung an C genau dann, wenn die positive Tangentenrichtung an p gleich $\frac{v}{\|v\|}$ ist.

2. Für $n = 1, 2$ skizziere man das sphärische Bild der folgenden n–Fläche mit der Orientierung $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$:

   (a) $x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$ (Zylinder),

   (b) $-x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$, $x_1 > 0$ (Kegel),

   (c) $-x_1 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$ (Paraboloid).

3. Sei S eine n–Fläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_0 \notin S$. Man zeige, daß die kürzeste Strecke von p_0 nach S (wenn eine solche existiert) senkrecht auf S steht, d.h. man zeige, daß für ein $p \in S$, das $\|p_0 - p\| \leq \|p_0 - q\|$ für alle $q \in S$ genügt, $(p, p_0 - p) \perp S_p$ gilt. (Man benutze den Satz über Extremwerte auf Flächen).

4. Sei $S = f^{-1}(c)$ eine zusammenhängende n–Fläche mit $f : U \to \mathbb{R}$ und der Orientierung $\mathbf{N}$. Es gelte $\mathbf{N}(S) = \{v\}$, d.h. das sphärische Bild von S besteht nur aus einem Punkt.

   (a) Sei $B \subset U$ eine offene Kugel, $p \in (S \cap B)$ und $H(p) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot v = p \cdot v\}$. Man zeige $H(p) \cap B \subset S$.

   (Hinweis: Man betrachte konstante Vektorfelder der Form $\mathbf{X}(q) = (q, w)$ mit $w \perp v$.)

   (b) Man zeige, daß S in einer Ebene enthalten ist.

Abgabe 5. 11.