

1. Man bestimme Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigung und Geschwindigkeit der folgenden parametrisierten Kurven:
  - (a)  $\alpha(t) = (t, t^2)$ ,
  - (b)  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,
  - (c)  $\alpha(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$ ,
  - (d)  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,
  - (e)  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 2 \cos t, 2 \sin t)$ .
2. (a) Sei  $S$  der Zylinder im  $\mathbb{R}^3$  mit  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  für ein  $r > 0$ . Man zeige:  $\alpha$  ist eine geodätische Linie von  $S$  genau dann, wenn für geeignete  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  gilt  $\alpha(t) = (r \cos(at + b), r \sin(at + b), ct + d)$ .  
 (b) Sei  $S$  die  $n$ -Spähre  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ . Man zeige:  $\alpha$  ist eine geodätische Linie von  $S$  genau dann, wenn für geeignete orthogonale Einheitsvektoren  $v_1, v_2$  und  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\alpha(t) = (\cos at)v_1 + (\sin at)v_2$ .
3. Sei  $C$  eine ebene Kurve in der oberen Halbebene  $x_2 > 0$  und  $S$  die 2-Fläche, die durch Drehung um die  $x_1$ -Achse entsteht.  $\alpha : I \rightarrow C$ ,  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$  sei eine parametrisierte Kurve in  $C$  mit konstanter Geschwindigkeit  $> 0$ . Für  $\theta \in \mathbb{R}$  sei  $\alpha_\theta : I \rightarrow S$  gegeben durch

$$\alpha_\theta(t) = (x_1(t), x_2(t) \cos \theta, x_2(t) \sin \theta)$$

und für  $t \in I$  sei  $\beta_t : \mathbb{R} \rightarrow S$  gegeben durch

$$\beta_t(\theta) = (x_1(t), x_2(t) \cos \theta, x_2(t) \sin \theta).$$

Die Kurven  $\alpha_\theta$  heißen Meridiane von  $S$  und die Kreise  $\beta_t$  heißen Parallele von  $S$ .

- (a) Man zeige:  $\dot{\alpha}_\theta(t) \cdot \dot{\beta}_t(\theta) = 0$  für alle  $t \in I$  und  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- (b) Man zeige: Für  $p = \alpha_\theta(t)$  bilden  $\dot{\alpha}_\theta(t)$ ,  $\dot{\beta}_t(\theta)$  eine Basis von  $S_p$ .
- (c) Man zeige, daß jeder Meridian eine geodätische Linie von  $S$  ist.
- (d) Man zeige:  $\beta_t$  ist genau dann eine geodätische Linie von  $S$ , wenn  $\dot{x}_2(t) = 0$  gilt.
- (e) Man skizziere in einem Beispiel Meridiane und Parallele.