5. Übung zur Differentialgeometrie WS 2007/8

1. Sei S eine n–Ebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ geben durch $a_1x_1+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}=b$, und sei $\mathbf{v}=(p,v)\in S_p$. Man zeige , daß für jede parametrisierte Kurve α in S von p nach q $P_\alpha(\mathbf{v})=(q,v)$ gilt, d.h. die Parallelverschiebung vom Weg unabhängig ist.

2. Sei p ein Punkt auf der 2–Sphäre S^2 und seien $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aus S^2_p mit $\|\mathbf{v}\|=\|\mathbf{w}\|$. Man zeige, daß es eine stückweise glatte parametrisierte Kurve $\alpha:[a,b]\to S^2$ mit $\alpha(a)=\alpha(b)=p$ gibt, so daß $P_\alpha(\mathbf{v})=\mathbf{w}$ gilt.

   (*Hinweis: Man verwende das Beispiel aus der Vorlesung.*)

3. Man zeige, daß die Richtungsableitung von Vektorfeldern die folgenden Eigenschaften hat:

   (a) $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}+\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Y}$,

   (b) $\nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{X})=(\nabla_{\mathbf{v}}f)\mathbf{X}(p)+f(p)\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X}$,

   (c) $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})=(\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{X})\cdot\mathbf{Y}(p)+\mathbf{X}(p)\cdot(\nabla_{\mathbf{v}}Y)$.

4. Man berechne $\nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{X})$, wobei $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^{n+1}_p$, $p\in\mathbb{R}^{n+1}$ und $\mathbf{X}$ geben sind durch

   (a) $\mathbf{X}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1x_2,x_2^2)$, $\mathbf{v}=(1,0,0,1)$ $(n=1)$,

   (b) $\mathbf{X}(x_1,x_2)=(x_1,x_2,-x_2,x_1)$, $\mathbf{v}=(\cos\theta,\sin\theta,-\sin\theta,\cos\theta)$ $(n=1)$,

   (c) $\mathbf{X}(q)=(q,2q)$, $\mathbf{v}=(0,\ldots,0,1,\ldots,1)$ (beliebiges n).

Abgabe 19.11.