# 6. Übung zur Differentialgeometrie WS 2007/8

1. Sei $S$ eine $n$–Fläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit der Orientierung $\mathbf{N}$. $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ seien tangentiale Vektorfelder an $S$. Man zeige, daß das Vektorfeld $[X, Y](p) = \nabla_{\mathbf{X}(p)}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}(p)}\mathbf{X}$ an $S$ tangential ist. Hinweis: Man zeige, daß $(\nabla_{\mathbf{X}(p)}\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{N}(p)$ und $(\nabla_{\mathbf{Y}(p)}\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N}(p)$ beide gleich $L_p(\mathbf{X}(p)) \cdot \mathbf{Y}(p)$ sind.

2. Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ mit $t \in I$ eine lokale Parametrisierung der orientierten Kurve $C$ im $\mathbb{R}^2$. Man zeige
$$\kappa \circ \alpha = (x'y'' - y'x'')/(x'^2 + y'^2)^{3/2}.$$

3. Man zeige, daß der Krümmungskreis $O$ an einem Punkt $p$ einer orientierten ebenen Kurve $C$ mit $\kappa(p) \neq 0$ die Kurve $C$ in $p$ mit zweiter Ordnung berührt; d.h. man zeige: Sind $\alpha(t)$ bzw. $\beta(t)$ Parametrisierungen von $C$ bzw. $O$ nach der Bogenlänge mit $\alpha(0) = \beta(0) = p$, so gilt $\dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0)$ und $\ddot{\alpha}(0) = \ddot{\beta}(0)$.

4. Man bestimme die Weingartenabbildung für

   (a) die Hyperebene $a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = b$ mit $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$,

   (b) den Kreiszylinder im $\mathbb{R}^3$ $x_2^2 + x_3^2 = a^2$ mit $a \neq 0$.

**Abgabe 26. 11.**