8. Übung zur Differentialgeometrie **WS 2007/8**

1. Für die angegebenen Punkte p berechne man Hauptkrümmungen, Hauptkrümmungsrichtungen, Gauß–Kroneckerkrümmung und mittlere Krümmung der folgenden n–Flächen:
   (a) $x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2$, $r > 0$, $p = (0, \ldots, 0, r)$.
   (b) $x_1^2 + (\sqrt{x_2^2 + x_3^2} - 2)^2 = 1$, $p = (0, 3, 0)$ und $p = (0, 1, 0)$.
2. Man berechne die Gauss'sche Krümmung $K : S \to \mathbb{R}$ für die folgenden Flächen S:
   (a) $(x_1^2/a^2) + (x_2^2/b^2) - (x_3^2/c^2) = 1$ (Hyperboloid)
   (b) $(x_1^2/a^2) + (x_2^2/b^2) - x_3 = 0$ (elliptisches Paraboloid)
3. Sei S eine orientierte 2–Fläche im $\mathbb{R}^3$ und $p \in S$. Man zeige, daß für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_p$ die Formel $L_p(\mathbf{v}) \times L_p(\mathbf{w}) = K(p)\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ gilt.
4. Man zeige für die orientierte 2–Fläche S im $\mathbb{R}^3$ die Formel

$$K(p) = \mathbf{Z}(p) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{Z} \times \nabla_{\mathbf{w}}\mathbf{Z} / \|\mathbf{Z}(p)\|^4,$$

   wobei $\mathbf{Z}$ ein überall von Null verschiedenes normales Vektorfeld auf S ist, und $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ zwei Vektoren in S_p mit $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{Z}$ sind.

Abgabe 13.12.